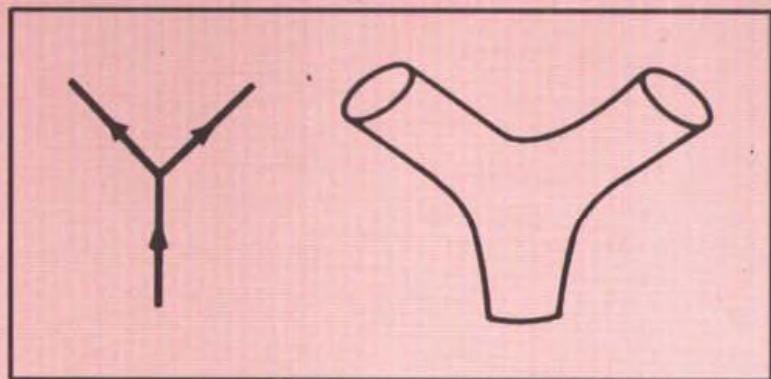


М. Каку

**Введение
в теорию суперструн**



Издательство «Мир»

Michio Kaku

**Introduction to
Superstrings**

With 48 Illustrations

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

М. Каку

**Введение
в теорию суперструн**

Перевод с английского
под редакцией И. Я. Арефьевой



Москва «Мир» 1999

УДК 53
ББК 22.31
К16

Каку М.

К16 Введение в теорию суперструн: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 624 с., ил.

ISBN 5-03-002518-9

Книга американского специалиста, содержащая систематическое изложение одного из наиболее актуальных направлений современной теоретической математической физики. Теория суперструн объединяет квантовую гравитацию и современные калибровочные теории элементарных частиц. В рамках этой теории были решены, в частности, знаменитые проблемы ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля и микроскопического объяснения энтропии черных дыр. В книге в доступной форме представлены основные сведения по квантовой теории поля и теории струн, даны введение в полевую теорию струн и методы построения четырехмерных струн. Книга снабжена приложением, в котором сжато изложены теории относительности, суперсимметрии, гравитации, даны сведения из теории групп и дифференциальной геометрии.

Для математиков и физиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

ББК 22.31



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 97-02-14002

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002518-9 (русск.)
ISBN 0-387-96700-1 (англ.)

© 1988 by Springer-Verlag. All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokio

© перевод на русский язык, Арутюнов Г. Э., Попов А. Д., Чудов С. В., 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория суперструн – это теория, объединяющая квантовую гравитацию и калибровочную теорию элементарных частиц. Она является наиболее сложной и амбициозной теорией в современной теоретической и математической физике. В теории суперструн решена знаменитая проблема ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля, которая долгие годы была в центре внимания физиков-теоретиков. Решена также и другая фундаментальная проблема – о включении квантовой гравитации в единую схему вместе с известными калибровочными теориями элементарных частиц.

Предлагаемая читателю книга М. Каку является современным учебником по теории суперструн, рассчитанным на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теоретической и математической физике. Изложение теории суперструн проведено параллельно как на языке первичного квантования, так и на языке вторичного квантования. Изложенный формализм применен к построению феноменологических моделей, основанных на теории суперструн.

Достоинством книги является краткость и четкость изложения. Автору удалось изложить в компактной форме огромный объем материала по теории суперструн. В частности, по сравнению с известной монографией М. Грина Дж. Шварца и Э. Виттена «Теория суперструн», «Мир», 1990, здесь рассмотрены основы ковариантной струнной полевой теории, а также многопетлевые струнные амплитуды вместе с необходимым математическим аппаратом по теории модулей римановых поверхностей.

К моменту выхода английского издания книги одним из принципиальных нерешенных вопросов был вопрос выбора той или иной струнной теории в качестве кандидата на роль единой теории. Именно в решении этого фундаментального вопроса в последние годы был достигнут замечательный прогресс. Оказалось, что все известные суперструнные теории связаны преобразованиями дуальности. Открытие дуальности позволило выявить непертурбативные свойства суперструн, связанные с существованием новых протяженных объектов – D -бран. Была выдвинута гипотеза, согласно которой все струнные теории являются специальными случаями единой фундаментальной теории – M -теории, которая «живет» в 11-мерном пространстве-времени и на сравнительно больших расстояниях описывает 11-мерную супергравитацию. Открытие дуальности и необходимость проверки гипотезы существования M -теории вместе с появлением технических возможностей проверки этой гипотезы вызвали взрыв интереса к теории суперструн. С открытием дуальности произошла, по словам Дж. Шварца, «третья струнная революция». Имеется в виду, что «первая струнная революция» была связана с открытием амплитуды Венециано и ее интерпретацией как струны Намбу, а вторая «струнная революция» связана с открытием М. Грином и Дж. Шварцем сокращения аномалий. Наиболее важные результаты, полученные за последние годы:

- микроскопический вывод формулы Бекенштейна – Хокинга для энтропии черных дыр [1];
- дуальность, D -браны, M -теория [2, 3, 4];
- исследование (супер) калибровочных теорий методами теории суперструн; теория Зайберга – Виттена [5];
- матричная теория в пределе больших N как M -теория [6];

- появление квантовой бoльцмановской статистики в пределе больших N в квантовой хромодинамике; модель квантовых черных дыр как теории бoльцмановских D -бран [7];
- голографическая связь теории суперструн на пространстве анти-де-Ситтера (Лобачевского) и конформной теории поля в пределе больших N [8, 9, 10].

В этой связи выход перевода современного, достаточно краткого учебника по теории суперструн, охватывающего период до «третьей струнной революции», является очень своевременным, поскольку изложенный в книге материал является необходимой базой для занятий современной теорией суперструн. Отмечу, что вышло в свет второе английское издание книги М. Каку, в котором нашло отражение новейшее развитие теории суперструн, включая M -теорию.

И. Арефьева

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein–Hawking entropy”, *Phys. Lett.* **B379** (96) 99–105.
- [2] J. Polchinski, “Dirichlet–Branes and Ramond–Ramond Charges”, *Phys. Rev. Lett.* **75** (95) 4724–4726
- [3] C. M. Hull and P. K. Townsend “Enhanced Gauge Symmetries in Superstring Theories”, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 525–546.
- [4] E. Witten, “String theory in various dimensions”, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85.
- [5] N. Seiberg and E. Witten “Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N = 2$ Supersymmetric QCD”, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 484–550.
- [6] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, “M Theory As A Matrix Model: A Conjecture” *Phys. Rev.* **D55** (1977) 5112–5128.
- [7] I. Ya. Arefeva and I. V. Volovich, “The Master Field for QCD and q -Deformed Quantum Field Theory”, *Nucl. Phys.* **B462** (1996) 600–612; I. V. Volovich, “D-branes, Black Holes and $SU(\infty)$ Gauge Theory”, in: Proc. of the Second International Sakharov Conference on Physics, Moscow, 1996.
- [8] J. Maldacena, “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–245.
- [9] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge Theory Correlators from Non-critical String Theory”, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–111.
- [10] E. Witten, “Anti De Sitter Space and Holography”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–270.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Все мы согласны, что ваша теория безумна. Мы расходимся лишь в одном: достаточно ли она безумна?

Нильс Бор

Теория суперструн возникла как наиболее многообещающий кандидат на роль квантовой теории всех известных взаимодействий. Суперструны, по-видимому, решают проблему, которая не поддавалась решению в течение последних пятидесяти лет, а именно объединение двух великих фундаментальных физических теорий нашего столетия — квантовой теории поля и общей теории относительности. Теория суперструн вводит в теоретическую физику совершенно новую физическую картину мира и новую математику, изумившую даже математиков.

Есть некая ирония в том, что, хотя теория суперструн предназначалась для того, чтобы дать единую полевую теорию всего сущего, сама эта теория часто выглядит как беспорядочная куча легенд, произвольных рецептов и интуитивных представлений. Причина в том, что развитие теории суперструн было совсем непохоже на развитие какой-либо другой теории, вроде общей теории относительности, которая начиналась с геометрии и действия, а затем превратилась в квантовую теорию. Теория суперструн, напротив, за последние 20 лет развивалась как раз в обратном направлении. У нее причудливая история, начавшаяся с чисто случайного открытия в области квантовой теории, сделанного в 1968 г. Дж. Венециано и М. Судзуки.

Перелистывая старые труды по математике, они случайно натолкнулись на бета-функцию, выписанную в прошлом веке Леонардом Эйлером. К своему изумлению, они обнаружили, что бета-функция удовлетворяет почти всем жестким требованиям, предъявляемым к матрице рассеяния, описывающей взаимодействия частиц. Никогда еще в истории физики важное научное открытие не было сделано таким случайным образом.

Из-за этой исторической случайности физики с тех пор стараются продвинуться в обратном направлении, чтобы выявить физические принципы и симметрии, лежащие в основе этой теории. В отличие от общей теории относительности Эйнштейна, которая исходила из геометрического принципа эквивалентности и выводила из него действие, для теории суперструн лежащие в ее основе фундаментальные физические и геометрические принципы до сих пор неизвестны.

С целью свести к минимуму недоумения и недоразумения, с этим связанные, на протяжении всей книги особое внимание будет уделяться двум темам. Чтобы при изучении теории суперструн студент ощущал твердую почву под ногами, мы в первую очередь выделили метод фейнмановского континуального интеграла, обеспечивающий намного более мощный по сравнению с другими формализм, пригодный для

обсуждения модели. Континуальные интегралы стали незаменимым инструментом теоретической физики, особенно при квантовании калибровочных теорий. Поэтому мы посвятили гл. 1 этой книги введению в методы континуального интегрирования для точечных частиц.

Вторая тема этой книги – метод вторичного квантования. Хотя традиционно теория поля формулируется как вторично квантованная теория, значительная часть теории суперструн дается в виде первично квантованной теории, что создает для впервые знакомящихся с ней многочисленные концептуальные трудности. В отличие от метода вторичного квантования, где все правила можно вывести из единственного действия, метод первичного квантования должен быть дополнен многими другими правилами и соглашениями. Надеяться нужно на то, что квантованная теория выявит лежащую в основе ее геометрию, на которой построена модель в целом. Поэтому мы стремились подчеркнуть важность вторичного квантования и полевой теории струн на протяжении всей книги. Это делается не только из соображений удобства обучения. В конечном итоге это может решить еще нерешенную проблему теории суперструн: динамическую редукцию 10-мерной теории к четырем измерениям.

Кроме предоставления студенту прочной основы в виде континуальных интегралов и теории поля, другой целью этой книги является ознакомление с последними достижениями теории суперструн, т.е. с быстро развивающимися областями наиболее активных теоретических исследований, таких как:

- полевая теория струн;
- конформная теория поля;
- алгебры Каца – Му迪;
- многопетлевые амплитуды и пространства Тейхмюллера;
- феноменология Калаби – Яу;
- орбиобразия и четырехмерные суперструны.

Назначение настоящей книги – предоставить студентам обзор, с помощью которого они смогут оценить различные области исследований или даже начать самостоятельно работать в этих областях. Для чтения книги достаточно предварительного знакомства с квантовой механикой в объеме стандартных специальных курсов математической физики. Однако математика теории суперструн взлетела на головокружительную высоту. Чтобы снабдить читателя введением в более сложные математические концепции, такие, как группы Ли, общая теория относительности, суперсимметрия и супергравитация, мы включили краткие введения в эти теории в Приложение, которое, как мы надеемся, заполнит возможные пробелы в математической подготовке читателя. Наконец, термины, которые могут быть незнакомы студентам-старшекурсникам, включены в словарь терминов, также имеющийся в Приложении.

Для удобства студентов упомянем, как мы рекомендуем пользоваться настоящей книгой. Главы 1–5 составляют часть I, результаты

первичного квантования. Они представляют собой существенную основу последующих глав, и пропускать их не следует. Глава 1, однако, может быть пропущена теми, кто достаточно свободно владеет методами обычной квантовой теории поля, такими как калибровочная инвариантность и квантование Фаддеева–Попова. (Подчеркнем все же, что метод интегралов по траекториям составляет основу этой книги и поэтому даже хорошо подготовленный читатель может извлечь пользу из просмотра материала гл. 1.)

Главы 2 и 3 составляют важнейшую часть элементарного введения в теорию струн. Однако читатель, которого интересует лишь обзор теории струн, может пропустить гл. 4. За исключением фермионного вертекса и духов, большинство результатов теории струн можно получить из материала гл. 2 и 3, не прибегая к конформной теории поля, и поэтому начинающий может пропустить эту главу. (Подчеркнем тем не менее, что большинство современных подходов к квантовой теории струн используют результаты конформной теории поля, поскольку она является наиболее гибкой. Тот, кто хочет серьезно изучить теорию струн, должен поэтому быть хорошо знаком с результатами гл. 4.)

Глава 5 важна для понимания чудесного сокращения расходимостей теории – свойства, отличающего теорию струн от всех других теорий поля. Поскольку теория автоморфных функций становится все более трудной при переходе к описанию многопетлевых амплитуд, начинающий может опустить обсуждение высших петель. Однако нужно помнить, что многопетлевые амплитуды образуют область активного научного поиска.

Часть II начинается с обсуждения полевой теории струн, а в части III изучается феноменология. Порядок знакомства с этими двумя частями несуществен. Каждая из них написана так, чтобы она была сравнительно независима от другой, так что читатель, которого больше интересует феноменология, может переходить прямо к части III без каких-либо трудностей.

Главы 6–8 части II описывают развитие трех подходов к полевой теории струн. В гл. 6 обсуждаются исходная теория в переменных светового конуса и построение многопетлевых струнных теорий, основанных на струнах. Однако изложение гл. 7 достаточно замкнуто, так что серьезный читатель может пропустить гл. 6 и сразу углубиться в ковариантную теорию.¹⁾

¹⁾ К моменту выхода английского издания была построена лишь ковариантная полевая теория открытых бозонных струн (E. Witten, Nucl. Phys. B268 (1986) 253), а вопрос о построении полевой теории открытых суперструн и замкнутых струн оставался открытым. Полевая теория открытых суперструн была построена независимо в работах (I. Ya. Arefeva, P. B. Medvedev and A. P. Zubarev, Phys. Lett. B240 (1990) 356; Nucl. Phys. B341 (1990) 464; C. P. Preitschopf, C. V. Thorn and S. A. Yost, Nucl. Phys. B337 (1990) 363). Полевая теория замкнутых струн была построена позднее в работе (B. Zwiebach, Nucl. Phys. B390 (1993) 33). – Прим ред.

В конце концов все полевые теории струн будут описаны геометрически, и один из многообещающих геометрических формализмов представлен в гл. 8. Начинающему читателю гл. 8 может показаться трудноватой, поскольку она содержит много математики. Поэтому он может ее опустить.

В части III начинающий может опустить гл. 9. Обсуждение аномалий включает довольно много вычислений, в основном оперирует с точечными частицами и часто пересекается с материалом, который можно найти в других книгах. Главу 10 пропускать не следует, так как в ней изложена одна из наиболее многообещающих теорий суперструн из обсуждаемых в настоящее время. Подобным образом гл. 11 содержит существенную часть нашего понимания того, как теория суперструн может в конечном итоге стать предметом сопоставления с экспериментальными данными.

Автор надеется, что это поможет как начинающему, так и более подготовленному читателю решить, как ему следует подходить к настоящей книге.

Часть I

ПЕРВИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 1

КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТОЧЕЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ 1.1. ДЛЯ ЧЕГО СТРУНЫ?

Объединение двух фундаментальных теорий современной физики, квантовой теории поля и общей теории относительности, в рамках единого теоретического подхода, является одной из важнейших нерешенных проблем. Примечательно, что эти две теории, вместе взятые, воплощают всю сумму человеческих знаний о наиболее фундаментальных силах природы. Квантовая теория поля, например, добилась необычайного успеха в объяснении физики микромира вплоть до расстояний, не превышающих 10^{-15} см. Общая теория относительности (ОТО), с другой стороны, не имеет себе равных в объяснении крупномасштабного поведения космоса, давая красивое и захватывающее объяснение происхождения самой Вселенной. Поразительный успех этих двух теорий заключается в том, что вместе они могут объяснить поведение материи и энергии в ошеломляющем диапазоне величин в 40 порядков, от субъядерной до космологической области.

Большой загадкой последних пяти десятилетий, однако, была полная несовместимость этих двух теорий. Это выглядит так, как если бы у природы было два ума, каждый из которых работает независимо от другого в своей области, действуя в полной изоляции друг от друга. Почему природа на своем самом глубоком и фундаментальном уровне должна требовать двух полностью различных подходов с двумя наборами математических методов, двух наборов постулатов и двух наборов физических принципов?

В идеале хотелось бы иметь единую теорию поля, объединяющую эти две фундаментальные теории:

Квантовая теория поля	}	Единая теория поля.
Общая теория относительности		

Однако история попыток объединения этих двух теорий в минувшие десятилетия была печальной. Они неизменно вдребезги разбивались из-за появления бесконечностей (расходимостей) или нарушали некоторые почитаемые физические принципы, вроде принципа причинности. Мощные методы теории перенормировок, разработанные в квантовой теории поля за последние десятилетия, не смогли устранить расходи-

мости квантовой теории гравитации. Ясно, что важнейший кусок головоломки пока не найден.

Хотя квантовая теория поля и ОТО кажутся совершенно несовместимыми, последние два десятилетия интенсивных теоретических исследований сделали все более ясным, что секрет этой тайны скорее всего лежит в мощи калибровочной симметрии. Одна из наиболее замечательных черт природы – то, что ее основные законы обладают величественным единством и симметрией, когда они выражены на языке теории групп. Объединение с помощью калибровочной симметрии, несомненно, один из самых поучительных уроков, преподнесенных физикой. В частности, использование локальных симметрий в теориях Янга–Миллса привело к огромному успеху в борьбе с расходимостями квантовой теории поля и в объединении законов физики элементарных частиц в элегантном и исчерпывающем подходе. Природа, похоже, не просто включает симметрию в физические законы по эстетическим соображениям. Природа требует симметрии.

Проблема заключалась, однако, в том, что даже мощных симметрий калибровочной теории Янга–Миллса и общей ковариантности уравнений Эйнштейна оказалось недостаточно для получения свободной от расходимостей квантовой теории гравитации.

В настоящее время наибольшие надежды на действительно единое и свободное от расходимостей описание этих двух теорий возлагаются на теорию суперструн [1–12]. Суперструны обладают намного большим набором калибровочных симметрий, чем любая другая физическая теория; возможно даже, что этот набор достаточен для устранения расходимостей квантовой теории гравитации. Симметрии теории суперструн не только включают симметрии ОТО и теории Янга–Миллса, они также содержат в качестве подмножеств симметрии супергравитации и теорий Великого Объединения (ТВО) [13].

Грубо говоря, способ, которым теория суперструн решает загадку расходимостей, можно изобразить наглядно так, как это показано на рис. 1.1, где амплитуда рассеяния двух точечных частиц вычисляется суммированием по бесконечному набору фейнмановских диаграмм

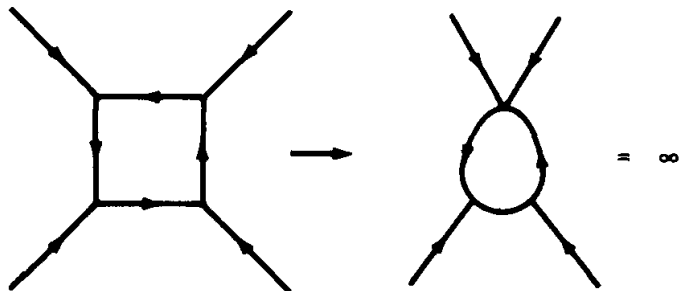


Рис. 1.1. Однопетлевая фейнмановская диаграмма для четырехчастичного рассеяния. Ультрафиолетовая расходимость этой диаграммы соответствует стягиванию в точку одной внутренней линии.

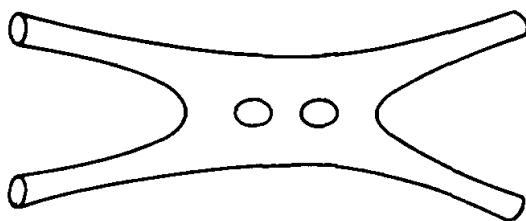


Рис. 1.2. Двухпетлевая фейнмановская диаграмма для рассеяния замкнутых струн. Эта диаграмма не содержит ультрафиолетовой расходимости, так как в ней нельзя стянуть в точку внутреннюю линию в отличие от случая точечных частиц. Из одних лишь топологических соображений видно, что теория струн является менее расходящейся, чем теория точечных частиц. Инфракрасные расходимости, однако, по-прежнему могут присутствовать.

с петлями. В общем случае эти диаграммы имеют особенности, соответствующие «стягиванию в точку» одной из внутренних линий с сохранением топологии графа. Для сравнения на рис. 1.2 показан однопетлевой вклад в амплитуду рассеяния двух замкнутых струн. Заметим, что, в отличие от случая точечных частиц, мы не можем здесь стянуть в точку одну из внутренних линий. Поэтому мы интуитивно ожидаем, что теория суперструн будет менее расходящейся или даже конечной вследствие симметрий (топологических инвариантов), запрещающих эту топологическую деформацию.

Любая теория, которая может одновременно устранить расходимости S -матрицы и включить квантовую механику, общую теорию относительности, ТВО и супергравитацию, с очевидностью должна содержать в себе математику, обладающую захватывающей дух красотой и сложностью. Действительно, даже математики были поражены той математикой, которая выросла из теории суперструн и соединила воедино самые несхожие между собой, далеко отстоящие друг от друга области математики, такие, как алгебры Каца–Мури, римановы поверхности и пространства Тейхмюллера, модулярные группы и даже теория группы «монстр».

Величайший парадокс теории струн, однако, состоит в том, что сама она не является единой. Тому, кто впервые изучает эту теорию, она часто представляется удручающим набором легенд и исторических анекдотов, взятых с потолка рецептов и интуитивных допущений. Порой кажется, что нет никакого смысла во многих допущениях модели. Для теории, претендующей на воплощение единого подхода к описанию всех законов физики, то, что сама она выглядит столь разобщенной, кажется издевательской насмешкой судьбы!

Секреты модели на ее наиболее фундаментальном уровне остаются пока непознанными.

Обычно при формулировании какой-нибудь квантовой теории мы начинаем с ее геометрии или симметрии и затем выписываем действие. Из действия, в свою очередь, мы выводим все предсказания модели,

включая унитарную S -матрицу. Так, вторичное квантование действия является обычным способом формулировки любой квантовой теории поля. Подлинная причина того, что теория суперструн порой выглядит как неупорядоченный набор кажущихся случайными допущений и произвольных условностей, состоит в том, что она обычно формулируется как первично квантованная теория. Поэтому приходится прибегать к интуиции и традиционным рецептам, почерпнутым из физического фольклора, чтобы построить все фейнмановские диаграммы, необходимые для унитарной теории.

К несчастью, вторично квантованное действие и геометрия суперструны относятся к завершающим характеристикам разрабатываемой модели. Действительно, как явствует из этой перспективы, интересующая нас модель в течение последних двадцати лет разрабатывалась в обратном направлении, начиная со случайного открытия ее квантовой теории в 1968 году!

Напротив, когда Эйнштейн впервые открыл общую теорию относительности, он начал с физических принципов, таких, как принцип эквивалентности гравитационной и инерциальной масс, и сформулировал его на языке общей ковариантности. После того как геометрия была найдена, он выписал действие как единственное решение задачи. Позднее были найдены классические решения уравнений в формализме искривленных многообразий, дающие первые удачные модели поведения Вселенной в космологических масштабах. Наконец, последним шагом в развитии ОТО была разработка квантовой теории гравитации. Решающие этапы исторического развития ОТО можно поэтому представить следующей схемой:

Геометрия → Действие → Классическая теория → Квантовая теория.

Кроме того, и ОТО, и теория Янга–Миллса – это зрелые теории: обе они могут быть сформулированы на основании аксиом, выделяющих геометрические и физические допущения, служащие фундаментом каждой из них. Теория суперструн только начинает вступать в эту стадию развития.

Замечательно, что теория Янга–Миллса и теория гравитации представляют собой *единственное* решение, удовлетворяющее двум простым геометрическим требованиям:

(1) Глобальная симметрия

Свободная теория должна описывать распространение «чистых», свободных от духов полей со спинами 1 и 2, преобразующихся как неприводимые представления группы $SU(N)$ и группы Лоренца.

(2) Локальная симметрия

Теория должна быть локально инвариантной относительно преобразований группы $SU(N)$ и общековариантной.

Замечательно, что совместное действие теории Янга–Миллса и теории гравитации является единственным решением, удовлетворяю-

щим этим двум простым аксиомам:

$$L = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (1.1.1)$$

(Первая аксиома содержит в себе реальную физическую сущность теории и не может быть включена в формулировку второй аксиомы. Есть бесконечно много общековариантных и $SU(N)$ -симметричных инвариантов, так что нам необходима первая аксиома, чтобы включить в теорию физические соображения и выбрать неприводимые представления базисных полей. Под «чистыми» полями мы понимаем свободные от духов поля, имеющие самое большее две производные, что исключает теории R^2 и F^4 , содержащие производные высших порядков.)

Возникает вопрос: *что соответствует этим двум аксиомам в теории суперструн?* Предстоит большая работа, чтобы сделать возможной чисто геометрическую формулировку теории струн, но наиболее многообещающая попытка это сделать представлена в гл. 8, где обсуждается геометрическая формулировка полевой теории струн.

Порядок изложения в этой книге, конечно, должен отражать тот факт, что теория развивалась в обратном направлении. По причинам педагогического характера мы в основном будем следовать историческому развитию теории. Поэтому часть I, в которой вводится теория, возникающая из первичного квантования, будет порой производить впечатление неупорядоченного набора условных допущений, отбор которых производился без всяких руководящих принципов. По этой причине мы предпочли в части I особо подчеркнуть подход к теории струн с помощью *континуальных интегралов* или *функционалов*. Только фейнмановские континуальные интегралы дают нам формализм, позволяющий вывести другие формализмы, например формализм гармонических осцилляторов. Хотя этот подход к квантовой механике по-прежнему весьма неуклюж по сравнению с истинно вторичным квантованием, но это самый удобный формализм для того, чтобы свести концы с концами в теории первичного квантования.

В части II настоящей книги мы обсудим собственно теорию поля, из которой можно вывести все результаты теории, исходя из одного действия. Однако мы снова будем следовать истории развития теории и представим теорию поля от результатов к основам. Мы начнем с теории нарушения симметрии, а затем опишем возможный вариант геометрической теории.

Наконец, в части III будет изложена «феноменология» струн. Хотя, может быть, слишком самонадеянно пока описывать феноменологию, начиная с энергий 10^{19} ГэВ, важно установить, какого рода предсказания дает эта теория.

Однако чтобы действительно оценить достижения и возможные недостатки теории суперструн, нам следует попытаться понять исторические затруднения, преследовавшие физиков в течение последних пяти десятилетий. Поэтому обратимся теперь к краткому обзору

развития калибровочных теорий, чтобы можно было оценить трудность построения конечной теории гравитации. Мы также вкратце обрисуем историю развития теории суперструн.

§ 1.2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В шестидесятые годы казалось, что физика элементарных частиц беспомощно барахтается, запутавшись во множестве частных теорий. Каждый вид фундаментальных взаимодействий – слабое, электромагнитное, сильное и гравитационное – изучался отдельно, почти независимо от других. Кроме того, исследования всех этих взаимодействий натолкнулись на фундаментальные трудности:

- (1) Слабые взаимодействия. Теоретические модели этих сил добавили разочаровывающе мало к теории Ферми, впервые предложенной тремя десятилетиями ранее в тридцатых годах:

$$L_{\text{Ферми}} \sim \bar{\psi}_p \Gamma^A \psi_n \bar{\psi}_e \Gamma_A \psi_\nu, \quad (1.2.1)$$

где Γ^A представляет различные комбинации матриц Дирака. Следующий крупный шаг, теория W -бозонов, страдал от расходимостей. Кроме того, никто не знал, какая симметрия объединяет лептоны и есть ли она вообще.

- (2) Сильные взаимодействия. В отличие от слабых взаимодействий, теория мезонов Юкавы дает перенормируемую теорию сильных взаимодействий:

$$L_{\text{Юкавы}} \sim g \bar{\psi} \psi \phi. \quad (1.2.2)$$

Однако теория Юкавы не могла объяснить лавину «элементарных» частиц, без конца открываемых в экспериментах на ускорителях. Роберт Оппенгеймер даже предложил, чтобы Нобелевская премия по физике была присуждена тому физическому, который *не* открыл в этом году новой частицы. Кроме того, модель кварков, которая, кажется, объясняет данные намного лучше, чем это можно каким-либо разумным образом понять, страдает от того факта, что кварки никогда не были обнаружены экспериментально.

- (3) Сила тяготения. Изучение гравитационных сил было совершенно не связано с исследованиями других взаимодействий. Классический релятивистский подход позволял находить все новые классические решения независимо от физики элементарных частиц. Попытки канонически квантовать эту теорию были блокированы ее огромной избыточностью. Обескураживало также ощущение, что если даже теорию гравитации удастся успешно проквантовать, она все равно окажется перенормируемой.

Этот унылый пейзаж драматически изменился в начале семидесятых годов с приходом «калибровочной революции». Одно из крупнейших

достижений последних пятнадцати лет – разработка полностью перенормируемой теории калибровочных частиц со спином 1, в которой физикам впервые удалось действительно вычислить реалистичные значения элементов S -матрицы. Итак, потребовалось более 100 лет, чтобы продвинуться дальше исходной калибровочной теории, предложенной Максвеллом в 60-х годах прошлого века! (См. в приложении элементарное введение в калибровочные теории и теорию групп.)

Очевидно, что ключом к устранению расходимостей релятивистской квантовой механики должны служить более обширные и более сложно устроенные группы калибровочных преобразований. Симметрия перестает быть лишь эстетическим достоинством конкретной модели и становится ее наиболее важной чертой.

Например, уравнения Максвелла, ставшие первым объединением электрической и магнитной сил, имели калибровочную группу $U(1)$. Объединение слабого и электромагнитного взаимодействий в электрослабое требует группы $SU(2) \otimes U(1)$. Силы, связывающие кварки в адроны, или квантовая хромодинамика (КХД), основаны на группе $SU(3)$. Вся физика элементарных частиц в действительности совместима с минимальной теорией, обладающей симметрией $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Хотя в отношении теорий Великого объединения (ТВО), которые, как предполагается, должны объединить электрослабое и сильное взаимодействия, вердикт еще не вынесен, но снова можно ожидать, что решение состоит в калибровочной симметрии; предлагаются группы $SU(5)$, $O(10)$ и другие.

Хотя калибровочная революция является одним из важнейших достижений за целые десятилетия, ее все же недостаточно. Растет понимание того, что теория Янга–Миллса сама по себе не может продвинуть наше понимание физической природы Вселенной дальше нынешнего уровня. Дело не только в том, что различные ТВО не могут объяснить важные физические явления, но и в том, что есть настоятельная необходимость сформулировать квантовую теорию гравитации.

Прежде всего, необходимо заметить, что теории Великого объединения не могут быть последним словом в построении единой теории всех взаимодействий. ТВО обладают несколькими особенностями, по-прежнему оставляющими без удовлетворительного ответа важные вопросы. Они перечислены ниже.

- (1) ТВО не могут объяснить, почему существуют три почти точные копии, или семейства, элементарных частиц. Мы по-прежнему не можем ответить на вопрос Рэби: «Кто заказал мюон?»
- (2) ТВО все еще содержат около 20 произвольных параметров. Они не могут, например, вычислить массы кварков или различные константы теории Юкавы. Действительно, единая теория поля должна иметь самое большее один произвольный параметр.
- (3) ТВО встречают трудности при решении проблемы иерархии. Если не прибегать к суперсимметрии, трудно сделать так, чтобы физика

частиц с невероятно большими массами не смешивалась с обычным диапазоном энергий, что привело бы к разрушению иерархии.

- (4) Объединение межчастичных взаимодействий происходит на расстояниях порядка 10^{-28} см, что очень близко к планковской длине 10^{-33} см, где можно ожидать преобладания гравитационных эффектов. Однако ТВО вообще никак не учитывают гравитации.
- (5) До сих пор не удалось получить достоверных данных о распаде протона, что уже исключило минимальную группу симметрии SU(5). Тем самым нет экспериментальных подтверждений необходимости вводить такого рода теорию.
- (6) Трудно поверить, что между доступными на сегодняшний день энергиями и масштабами, на которых происходит объединение, не будут обнаружены новые взаимодействия. Эта «пустыня» может оказаться полным-полна новыми взаимодействиями, пока нам неизвестными.

С точки зрения фундаментальной науки, из всех этих проблем самая трудная и важная – найти способ квантования общей теории относительности Эйнштейна. Хотя теория Янга–Миллса добилась впечатляющих успехов в объединении известных законов физики элементарных частиц, законы тяготения удивительно отличаются от них на фундаментальном уровне. Ясно, что теория Янга–Миллса и обычная калибровочная теория неспособны справиться с этой проблемой. Итак, ТВО сталкиваются с серьезными экспериментальными и теоретическими трудностями при попытках расширить границы их применимости.

Общая теория относительности также наталкивается на подобные трудности при приближении к границам ее применимости. Они таковы.

- (1) Классический подход установил, что решения уравнений Эйнштейна с необходимостью включают точечные сингулярности, в которых законы ОТО должны нарушаться. В этой области квантовые поправки должны доминировать над классической теорией.
- (2) Действие не ограничено снизу, поскольку оно линейно зависит от тензора кривизны. Поэтому оно не может быть квантовомеханически устойчивым.
- (3) Общая теория относительности не является перенормируемой. Компьютерные вычисления, например, однозначно показали, что в теории Эйнштейна существует ненулевой контрчлен на двухпетлевом уровне.

Наивные попытки квантовать эйнштейнову теорию тяготения окончились обескураживающей неудачей. Одним из первых, кто указал на несовместимость общей теории относительности с квантовой механикой, был Гейзенберг, заметивший, что наличие размерной константы взаимодействия делает неосуществимой обычную процедуру перенормировки.

Если положить

$$\frac{h}{2\pi} = 1; \quad c = 1, \quad (1.2.3)$$

то все равно даже в ньютоновской теории тяготения сохранится размерная константа, а именно гравитационная постоянная G :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.2.4)$$

Ее размерность равна квадратному сантиметру. При разложении в степенной ряд метрического тензора $g_{\mu\nu}$ вблизи плоского пространства с метрикой $\eta_{\mu\nu} = (- + + +)$ мы вводим константу взаимодействия κ , имеющую размерность сантиметра:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (1.2.5)$$

Поэтому

$$G \sim \kappa^2. \quad (1.2.6)$$

В этой системе единиц, где единственной единицей является сантиметр, константа взаимодействия κ становится планковской длиной, 10^{-33} см, или 10^{19} ГэВ, что лежит далеко за пределами возможностей эксперимента!

Теория перенормировок, однако, основана на фундаментальном допущении о возможности устранить все расходимости посредством бесконечного переопределения некоторых констант. Наличие размерной константы взаимодействия означает, что эта сложная перетасовка и повторное суммирование графов становятся невозможны. В отличие от обычных перенормируемых теорий, в квантовой гравитации невозможно складывать диаграммы с разными степенями константы взаимодействия. Это означает, что общая теория относительности не может быть перенормируемой теорией. Амплитуда рассеяния для пары гравитон-гравитон, например, является теперь степенным рядом по степеням размерного параметра (см. рис. 1.3):

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^n A_n. \quad (1.2.7)$$

Здесь мы уже не можем перетасовывать графы с разными значениями n , чтобы расходимости сократились, а в этом вся суть теории перенормировок. Поэтому теория перенормировок не работает.

Поскольку безнадежно пытаться втиснуть ОТО в рамки обычной теории перенормировок, необходимо заново рассмотреть принципиальное возражение Дирака против таких теорий. Именно Дирак заметил, что успех квантовой механики был основан на приближенных схемах, в которых каждый новый поправочный член был мал по сравнению

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^n A_n$$

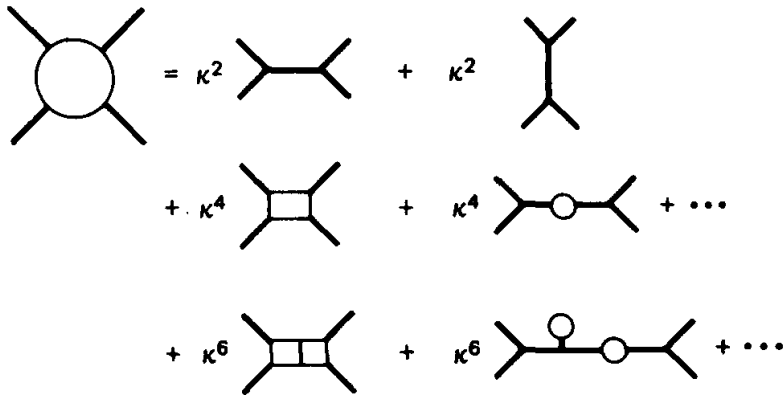


Рис. 1.3. Амплитуды гравитон-гравитонного рассеяния. Поскольку константа взаимодействия не является безразмерной, диаграммы разных порядков нельзя складывать для перенормировки теории. Таким образом, теории, включающие квантовую гравитацию, должны быть либо расходящимися, либо полностью конечными в каждом порядке. Для квантовой гравитации к тому же необходимо найти контрчлены, описывающие взаимодействия с частицами с низким спином. Тем самым теория суперструн является единственным кандидатом на роль конечной теории.

с предыдущим. Но теория перенормировок порочна, поскольку она вопиющим образом нарушает этот принцип, оперируя с бесконечными величинами, которые затем отбрасываются.

Одним из решений могло бы быть построение теории гравитации, которая была бы конечной в каждом порядке относительно константы взаимодействия и вообще не нуждалась бы в перенормировке. А пока надежды возлагались на супергравитацию [14, 15], основанную на калибровочной группе $Osp(N/4)$ (см. приложение); это было первое нетривиальное обобщение уравнений Эйнштейна за 60 лет. Надежды заключались в том, что указанная калибровочная группа даст нам достаточно много тождеств Уорда–Такахаша, чтобы расходящиеся диаграммы, составляющие обширный класс, сократились. Чем обширнее калибровочная группа, тем вероятнее, что беспокоящие нас бесконечности сократятся (см. рис. 1.4):

Теория	Калибровочная группа
Электромагнетизм	$U(1)$
Электрослабое взаимодействие	$SU(2) \otimes U(1)$
Сильное взаимодействие	$SU(3)$
ТВО (?)	$SU(5), O(10)$
Гравитация (?)	$GL(4), O(3, 1)$
Супергравитация (?)	$Osp(N/4)$

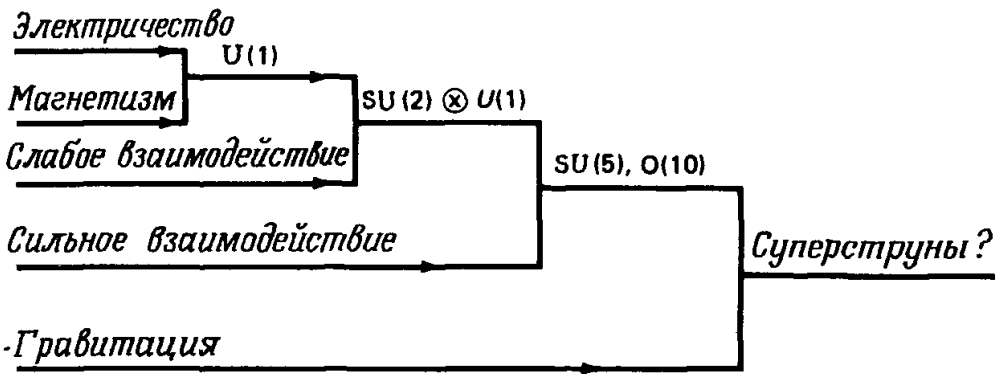


Рис. 1.4. Схема, показывающая, как калибровочные теории, основанные на группах Ли, объединили фундаментальные взаимодействия. Теория Максвелла, основанная на группе $U(1)$, объединяет электричество и магнетизм. Модель Вайнберга–Салама, основанная на группе $SU(2) \otimes U(1)$, объединяет слабое и электромагнитное взаимодействия. Теории Великого объединения (основанные на группах $SU(5)$, $O(10)$ или более обширных группах) являются лучшими кандидатами на роль теории, объединяющей сильное и электрослабое взаимодействия. Теория суперструн является единственным кандидатом на роль калибровочной теории, способной объединить гравитацию с остальными силами, действующими на точечные частицы.

Основная стратегия была такова:

Калибровочная симметрия → Тождества Уорда–Такахаша
→ Сокращение диаграмм → Перенормируемая теория.

Например, даже для эйнштейновой теории тяготения можно тривиально показать, что на уровне однопетлевых диаграмм она конечна. Существует замечательное тождество Гаусса–Бонне, из которого немедленно следует, что все однопетлевые диаграммы в общей теории относительности (чтобы их все выписать, нужен компьютер) суммируются к нулю. Действительно, супертождества Гаусса–Бонне устраняют многие расходимости супергравитации, но, вероятно, их все же недостаточно, чтобы сделать теорию конечной.

Самая обширная и многообещающая из теорий супергравитации, $O(8)$ -супергравитация, по-видимому, является расходящейся. К сожалению, можно выписать локально суперсимметричные контрчлены на уровне диаграмм с семью петлями. Весьма маловероятно, что коэффициенты этих и, возможно, бесконечного числа других контрчленов могут все обратиться в нуль без обращения к еще более высоким симметриям. Это обескураживает, так как означает, что калибровочная группа самой обширной теории супергравитации, т. е. $Osp(8/4)$, все еще слишком мала для устранения расходимостей общей теории относительности.

Более того, калибровочная группа $O(8)$ слишком мала для того, чтобы включить в себя минимальную калибровочную группу

$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ физики элементарных частиц. Если перейти к более обширным группам, чем $O(8)$, то обнаружим, что нам придется включать всё более высокие спины. Однако теория для спина 3 со взаимодействием, вероятно, противоречива, что заставляет подозревать в калибровочной группе $O(8)$ предел теорий супергравитации.

Итак, супергравитацию следует исключить по следующим двум принципиальным соображениям:

- (1) Это, вероятнее всего, не конечная теория, поскольку ее калибровочная группа недостаточно обширна, чтобы устранить все возможные суперсимметричные контрчлены. На уровне диаграмм с семью петлями имеется неустранимый контрчлен.
- (2) Ее калибровочная группа $O(8)$ недостаточно обширна, чтобы включить минимальную калибровочную симметрию физики элементарных частиц, а именно группу $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Сталкиваясь с этими и другими трудностями теории в течение многих лет, физики пришли к выводу, что от одного или нескольких почитаемых ныне представлений о природе Вселенной придется отказаться. Поскольку общая теория относительности и квантовая механика выведены из небольшого набора постулатов, один или более чем один из них должны быть ложными. Ключевым должен быть отказ от одного из основанных на здравом смысле предположений о законах природы; на этих предположениях основаны теория относительности и квантовая механика. За многие годы были выдвинуты следующие предложения об отказе от диктуемых здравым смыслом представлений о мире:

(1) Непрерывность

Этот подход предполагает, что пространство-время должно быть зернистым. Размер этих зерен обеспечит естественное обрезание фейнмановских интегралов, что позволит получить конечную S -матрицу. Интегралы вроде

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} d^4x \quad (1.2.8)$$

будут тогда расходиться как ε^{-n} , но мы никогда не будем переходить к пределу при ε , стремящемся к нулю. Решеточные теории гравитации относятся к этому типу. В исчислении Редже [16], например, мы разбиваем риманово пространство на дискретные ячейки-симплексы (четырёхмерные) и заменяем тензор кривизны угловым дефектом, который вычисляется движением по окружности, охватывающей симплекс:

$$-\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} R \rightarrow \text{угловой дефект.}$$

(В плоском пространстве угловой дефект отсутствует при обходе замкнутого контура и действие просто ничего не означает.) Обычно в решеточных теориях переходят к пределу при стремлении решеточной длины к нулю. Здесь, однако, мы сохраняем эту длину фиксированной и равной некоторому малому числу [17]. В настоящее время, однако, нет экспериментальных данных, поддерживающих идею о зернистости пространства-времени. Хотя мы никогда не сможем исключить этот подход, он представляется идущим против естественного направления развития физики элементарных частиц, состоящего в постулировании все более обширных и элегантных групп.

(2) Причинность

Этот подход допускает небольшие нарушения принципа причинности. Теории, включающие механизм Ли-Вика [18], действительно перенормируемы, но в них возможны малые отклонения от причинности. В этих теориях сходимость фейнмановских диаграмм обеспечивается добавлением фиктивного поля Паули-Виллара с массой M , изменяющего ультрафиолетовое поведение пропагатора. Обычно фейнмановский пропагатор сходится как p^{-2} в ультрафиолетовом пределе. Однако добавлением фиктивной частицы его можно сделать сходящимся еще быстрее, как p^{-4} :

$$\frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + M^2} \rightarrow \frac{1}{p^4}. \quad (1.2.9)$$

Заметим, что поле Паули-Виллара является духом из-за -1 , появляющейся в пропагаторе. (Это означает, что теория столкнется с трудностями, вызванными появлением отрицательных вероятностей.) Как правило, мы устремляем массу поля Паули-Виллара к бесконечности. Здесь, однако, мы оставляем ее конечной, позволяя полю перейти на нефизический лист. Исследования структуры полученных фейнмановских диаграмм показывают, однако, что принцип причинности нарушается; это, значит, что вы можете встретиться с вашими родителями до вашего рождения.

(3) Унитарность

Можно заменить теорию Эйнштейна, основанную на тензоре кривизны, конформной теорией, основанной на тензоре Вейля:

$$\sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \rightarrow \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma}^2. \quad (1.2.10)$$

Здесь тензор Вейля определяется формулой

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + g_{\mu[\sigma} R_{\rho]v} + g_{v[\rho} R_{\sigma]\mu} + \frac{1}{3} R g_{\mu[\rho} g_{\sigma]v}, \quad (1.2.11)$$

где скобки означают антисимметризацию. Конформный тензор обладает более обширной группой симметрии, чем тензор кривизны, т. е. инвариантностью относительно локальных конформных пре-

образований:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} \rightarrow e^\sigma g_{\mu\nu}, \\ C_{\nu\rho\sigma}^\mu \rightarrow C_{\nu\rho\sigma}^\mu. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Теория Вейля сходится, потому что пропагаторы имеют асимптотику p^{-4} ; тем самым это теория с высшими производными. Однако в ней присутствует «унитарный дух», который также входит с множителем -1 в пропагаторе по тем же причинам, что и выше. Самое большее, на что можно надеяться, — «конфайнмент» этих унитарных духов с помощью механизмов, аналогичных конфайнменту кварков [19, 20].

(4) Локальность

Много лет выдвигались также предложения отказаться от некоторых важных постулатов квантовой механики, например от локальности. В конце концов нет никакой уверенности в том, что законы квантовой механики обязаны выполняться вплоть до столь малых расстояний, как 10^{-33} см. Однако всякий раз возникали затруднения, как только физики пытались от этих законов отклониться (так было и в случае с причинностью). В настоящее время нет удовлетворительной альтернативы квантовой механике.

(5) Точечные частицы

Наконец, существует подход суперструн, отвергающий понятие идеализированных точечных частиц, впервые введенных греками 2000 лет тому назад.

Теория суперструн, поскольку она отбрасывает лишь предположение о том, что на фундаментальном уровне материя состоит из точечных частиц, наносит наименьший ущерб почитаемым физическим принципам и продолжает традицию перехода к все более сложным и хитроумным калибровочным группам. Она не нарушает никаких законов квантовой механики, однако ей удастся устранить большую часть, если не все, из расходимостей фейнмановских диаграмм. Группа симметрии суперструнной модели, самая обширная из когда-либо встречавшихся в истории физики, возможно, достаточно обширна, чтобы сделать теорию конечной во всех порядках. И снова именно симметрия, а не отказ от квантовой механики, является решающим обстоятельством, обеспечивающим конечность теории.

На рис. 1.5 наглядно представлены разные этапы развития теоретических взглядов на природу тяготения. Первой была ньютонова теория действия на расстоянии, в которой гравитационное взаимодействие распространялось быстрее скорости света. Эйнштейн заменил ее классической интерпретацией искривленных многообразий. Квантовая теория гравитации, в свою очередь, вводит квантовые поправки к теории Эйнштейна, добавляя петли. Наконец, теория суперструн вводит дальнейшие поправки к квантовой теории точечных частиц,

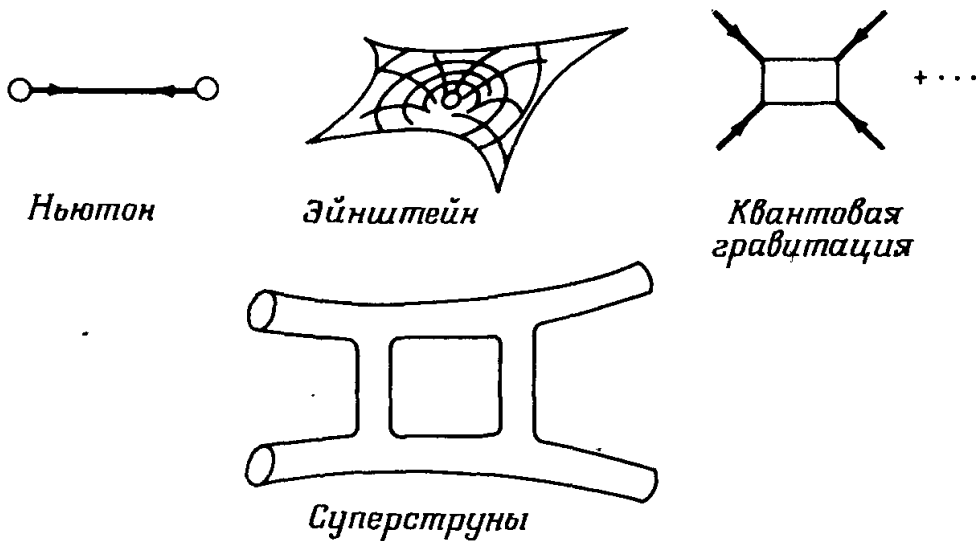


Рис. 1.5. Этапы развития теории гравитации. Каждый шаг, показанный на этой схеме, основан на успехе предыдущего шага. Ньютон представлял себе тяготение как силу, мгновенно действующую на расстоянии. Эйнштейн предположил, что тяготение вызывается кривизной пространства-времени. Наивное объединение общей теории относительности и квантовой механики дает расходящуюся теорию, так называемую квантовую гравитацию, в которой предполагается, что тяготение порождается обменом особыми «частицами» – гравитонами. В теории струн предполагается, что тяготение вызывается обменом замкнутыми струнами.

суммируя по всем возможным топологическим конфигурациям взаимодействующих струн.

Теория суперструн, однако, своим историческим развитием ничуть не напоминает ее предшественников. У нее, вероятно, самая странная в истории науки судьба с большим числом кренов и поворотов, чем в аттракционе «американские горы».

Началась она с того, что два молодых физика, Венециано и Судзуки [21, 22], независимо открыли квантовую теорию этой модели. Перелистывая математический справочник, они случайно заметили, что бета-функция Эйлера удовлетворяет всем аксиомам S -матрицы для взаимодействий адронов, кроме унитарности. Невё, Шварц и Рамон [23–25] быстро обобщили теорию, чтобы включить в нее частицы со спином. Чтобы разрешить проблему унитарности, Киккава, Сакита и Вирасоро [26] предложили считать бета-функцию Эйлера борновским членом теории возмущений. Наконец, Каку, Яу, Лавлейс и Алессандрини [27–33] завершили построение квантовой теории, вычислив бозонные многопетлевые диаграммы. Теория, однако, оставалась целиком сформулированной на языке амплитуд S -матрицы на массовой оболочке.

Затем Намбу и Гото [34, 35] поняли, что за этими амплитудами рассеяния скрывается классическая релятивистская струна. Одним

махом они революционизировали всю теорию, открыв за ней объединяющую классическую картину. Взаимосвязь между классической и квантовой теориями была быстро установлена Голдстоуном, Годдардом, Ребби и Торном [36] и далее развита Мандельштамом [37]. Эта теория, однако, по-прежнему формулировалась как первично квантованная теория, так что вершины, меру, правила подсчета диаграмм и другие конструкты приходилось постулировать специально для данного случая, а не выводить из основных аксиом.

Действие (в некоторой частной калибровке) было наконец выписано Каку и Киккавой [38]. Наконец, модель оказалось возможным вывести из одного лишь действия в терминах физических переменных, хотя у действия не осталось никаких симметрий. Однако, когда было обнаружено, что эту теорию можно определить лишь в 10 или 26 измерениях, модель сразу перестала быть привлекательной. Кроме того, быстрое развитие квантовой хромодинамики в качестве теории взаимодействия адронов, казалось, забило последний гвоздь в гроб теории суперструн.

В течение десяти лет модель влачила жалкое существование, поскольку никто не мог поверить, что 10- или 26-мерная теория имеет какое-либо отношение к четырехмерной физике. Когда Шерк и Шварц [39] сделали скандальное (для того времени) предположение, что дуальная модель является на самом деле теорией всех известных взаимодействий, никто не принял его всерьез. Идея не получила никакой поддержки.

Наконец, теория опять ожила, когда Грин и Шварц [40] в 1984 г. открыли, что теория суперструн свободна от аномалий и, вероятно, конечна во всех порядках теории возмущений. «Гетеротическая струна» $E_8 \otimes E_8$ Гросса, Харви, Мартиника и Рома [41] в настоящее время представляется лучшим кандидатом на роль теории, объединяющей гравитацию с физически разумными моделями взаимодействий частиц.

Одна из областей, в которой сейчас ведутся интенсивные исследования, — завершение развития теории с целью выяснить, почему в этой модели происходят все ее «чудеса». Наблюдалась бешеная активность в попытках выписать ковариантное действие с помощью методов, открытых за последнее десятилетие, например подхода BRST. Однако теперь растет понимание того, что ковариантный формализм BRST сам по себе есть теория в фиксированной калибровке, что весьма напоминает формализм светового конуса. Недавно, однако, опубликована работа по действительно *геометрической теории поля*, в которой все свойства теории могут быть выведены из простых физических принципов. Она рассматривается в гл. 8. Это и в самом деле явилось бы завершением развития теории, продвигавшегося вперед в обратном направлении в течение последних двадцати лет:

Квантовая механика → Классическая теория → Действие → Геометрия.

Подытожим теперь некоторые обнадеживающие особенности модели суперструн:

- (1) Калибровочная группа включает $E_8 \otimes E_8$, что намного обширнее минимальной группы $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. В этой теории остается вполне достаточно места для феноменологии.
- (2) В теории нет аномалий. Эти небольшие, но важные дефекты квантовой теории поля налагают чрезвычайно строгие ограничения на то, какие теории являются самосогласованными. Симметрии теории суперструн с помощью ряда «чудес» могут сократить все эти потенциальные аномалии.
- (3) Веские аргументы из теории римановых поверхностей указывают на то, что теория конечна во всех порядках теории возмущений (хотя строгого доказательства этого утверждения пока нет).
- (4) Возможности выбора вариантов теории сильно ограничены. Суперструнные модели очень трудно модифицировать, не разрушая при этом их волшебных свойств. Поэтому в них не возникает проблем с наличием двадцати или более произвольных констант взаимодействия.
- (5) Теория включает различные ТВО, супертеорию Янга–Миллса, супергравитацию и теорию Калуцы–Клейна в качестве ее подмножеств. Поэтому многие черты феноменологии, развитые в этих теориях, переносятся в теорию струн.

Грубо говоря, теория суперструн объединяет различные силы и частицы тем же способом, которым скрипичная струна дает единое описание музыкальных тонов. Сами по себе ноты ля, си, до и др. не являются фундаментальными. Однако скрипичная струна фундаментальна; один физический объект может объяснить множество музыкальных нот и даже гармоний, которые можно из них построить. Весьма сходным образом суперструны дают единое описание элементарных частиц и сил. Фактически «музыка», создаваемая суперструной, это силы и частицы, существующие в природе.

Хотя теория суперструн вследствие баснословно обширного множества симметрий проявляет «чудесное» сокращение аномалий и расходимостей, мы должны также представить объективную картину и указать на недостатки этой теории. Справедливости ради мы должны перечислить также потенциальные трудности теории, указанные критиками модели:

- (1) Невозможно экспериментально достичь чудовищных энергий, обнаруживаемых на планковской длине. Поэтому теория в некотором смысле не подлежит экспериментальной проверке. Но непроверяемая теория не является приемлемой физической теорией.
- (2) Не было найдено никаких экспериментальных подтверждений существования суперсимметрии, не говоря уже о суперструнах.
- (3) Было бы легкомысленно предполагать, что в «пустыне» между 100

- и 10^{19} ГэВ не встретится никаких неожиданностей. Новые, совершенно неожиданные явления неизменно обнаруживались при увеличении предельных энергий ускорителей. Теория суперструн, однако, делает предсказания, относящиеся к следующим 17 порядкам величины энергии, что неслыханно в истории науки.
- (4) Теория не объясняет, почему космологическая постоянная равна нулю. Всякая теория, претендующая на роль «теории всего», несомненно должна объяснить загадку обращения в нуль космологической постоянной, и непонятно, как теория суперструн решает эту проблему.
 - (5) Богатство теории обескураживает. Существует около тысячи способов редуцировать теорию к низким энергиям. Какой из них дает правильный вакуум? Хотя теория суперструн может дать минимальную теорию с калибровочной группой $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, она также предсказывает много других взаимодействий, которые пока не были обнаружены.
 - (6) Никто на самом деле не знает, как редуцировать 10-мерную теорию к четырем измерениям.

Из этих шести возражений против модели самым важным является последнее: неспособность предсказать размерную редукцию. Причина этого проста: в каждом порядке теории возмущений размерность пространства-времени стабильна. Поэтому для того, чтобы теория спонтанно свернулась в 4- или 6-мерную вселенную, необходимо рассматривать непертурбативные динамические эффекты, которые очень трудно вычислять. Поэтому так важен поиск геометрии, лежащей в основе теории. Геометрическая интерпретация модели может дать нам ключ к такому ее пониманию, которое позволит провести непертурбативные вычисления и сделать определенные предсказания с помощью этой теории.

Так, возражение против модели, касающееся невозможности экспериментально проверить ее на планковской длине, в определенной степени вводит в заблуждение. *Теория суперструн, если ее удастся успешно подвергнуть динамической редукции, должна быть способна делать предсказания вплоть до диапазона энергий, встречающихся на практике.* Например, она должна быть способна предсказать массы кварков. Следовательно, нам не придется ждать несколько столетий, пока у нас не будет ускорителей, способных достичь масштаба энергий планковской длины.

Итак, важнейшая трудность теории суперструн не связана с экспериментом. Она в основном теоретическая. Самая важная проблема этой теории – вычислить динамическое нарушение симметрии, чтобы ее предсказания можно было сравнить с экспериментальными данными, полученными при обыкновенных энергиях.

Теория, являющаяся фундаментальной при планковских энергиях, останется фундаментальной и при обыкновенных энергиях. Поэтому

камнем преткновения для развития теории служит понимание ее непertурбативного поведения. Ключ к такому пониманию, вероятно, лежит во вторично квантованной, геометрической формулировке модели.

В части I этой книги, однако, мы будем следовать историческому прецеденту и изложим сначала модель в формулировке первичного квантования. Как мы будем подчеркивать на протяжении всей этой книги, теория первичного квантования кажется беспорядочной кучей случайных фактов. Поэтому мы подчеркнули роль формулировки континуального интеграла (впервые выписанной для модели Венециано Су, Сакитой и Вирасоро [42, 43]) как самого мощного метода для формулирования теории первичного квантования. Хотя подход континуального интеграла и не может выявить геометрических принципов, лежащих в основании модели, он дает наиболее всеобъемлющую формулировку теории первичного квантования.

Обратимся теперь к функциональной формулировке [44] теории точечных частиц, которую можно почти непосредственно включить в теорию струн.

§ 1.3. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ТОЧЕЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Начнем наше обсуждение с анализа простейшей из всех возможных систем — классической нерелятивистской точечной частицы. Как ни странно, большая часть анализа этой простой динамической системы прямо переносится в теорию суперструн. Язык, которым мы будем пользоваться, это формализм континуального интеграла, который настолько гибок, что с одинаковой легкостью может описывать первично квантованные точечные частицы и вторично квантованные калибровочные поля.

Как и в классической механике, исходной точкой является лагранжиан точечной частицы:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x). \quad (1.3.1)$$

Здесь частица движется в поле внешнего потенциала. Собственно физика заключается в утверждении, что действие S должно быть минимальным. Уравнения движения можно вывести из минимизации действия:

$$S = \int L(x_i, \dot{x}_i, t) dt, \quad \delta S = 0. \quad (1.3.2)$$

Чтобы вычислить уравнения движения, введем малые вариации траектории частицы:

$$\delta x_i, \quad \delta \dot{x}_i. \quad (1.3.3)$$

При этих малых вариациях действие изменяется следующим образом:

$$\int dt \left\{ \frac{\delta L}{\delta x_i} \delta x_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right\} = 0. \quad (1.3.4)$$

Интегрируя по частям, получаем следующие уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} = 0. \quad (1.3.5)$$

Для нашей точечной частицы уравнения движения принимают вид

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \quad (1.3.6)$$

что соответствует обычным классическим ньютоновским уравнениям движения.

Кроме лагранжева формализма классической механики существует также гамильтонов формализм. Вместо положения и скорости в качестве фундаментальных объектов можно взять положение и импульс:

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i}. \quad (1.3.7)$$

При таком определении сопряженной переменной получаем:

$$H = p_i \dot{x}_i - L, \quad H(p_i, x_i) = \frac{p_i^2}{2m} + V(x). \quad (1.3.8)$$

Наконец, скобки Пуассона для импульсов и координат даются формулой

$$[p_i, x_j]_{PB} = -\delta_{ij}. \quad (1.3.9)$$

Знаменитая теорема классической механики утверждает, что можно показать тождественность принципа наименьшего действия и уравнений движения Ньютона. Начав с принципа наименьшего действия, можно вывести ньютоновы законы движения, и наоборот:

Уравнения движения \leftrightarrow Принцип наименьшего действия.

Эта эквивалентность, однако, нарушается на квантовом уровне. В рамках квантовой механики существует фундаментальное различие между этими двумя описаниями: уравнения движения служат лишь приближенным описанием подлинного квантового поведения материи. Поэтому принцип наименьшего действия является единственным приемлемым подходом к квантовой механике.

Теперь заново сформулируем основы квантовой механики посредством фейнмановского континуального интеграла [44]:

(1) Вероятность $P^{(a, b)}$ того, что частица переместится из точки a в точку b , есть квадрат модуля некоторого комплексного числа, а именно

функции перехода $K(a, b)$:

$$P(a, b) = |K(a, b)|^2. \quad (1.3.10)$$

- (2) Функция перехода равна сумме определенных фазовых множителей, зависящих от действия S ; эта сумма берется по всем возможным траекториям, соединяющим точку a с точкой b :

$$K(a, b) = \sum_{\text{траектории}} k e^{i2\pi S/h}. \quad (1.3.11)$$

Здесь постоянную k можно определить из соотношения

$$K(a, c) = \sum_{\text{траектории}} K(a, b) K(b, c), \quad (1.3.12)$$

в котором промежуточная сумма берется по траекториям, проходящим через все возможные промежуточные точки b .

Второй из этих принципов означает, что частица «чувствует» все возможные траектории, соединяющие a с b , какими бы сложными они ни были. Мы вычисляем указанный фазовый множитель для каждой из бесконечного множества траекторий. Затем фактор перехода для траектории, ведущей из a в b , вычисляется суммированием всех возможных фазовых множителей (см. рис. 1.6).

Замечательно, что сущность квантовой механики исчерпывается этими двумя принципами. Все наиболее важные выводы квантовой механики, являющие собой разительный отход от классической механики,

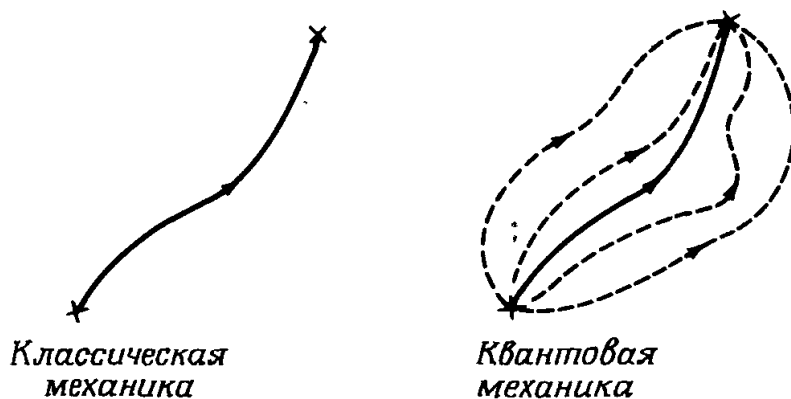


Рис. 1.6. Важнейшее различие между классической и квантовой механикой. В классической механике предполагается, что частица движется по одной-единственной траектории между двумя точками, определяемой либо уравнениями движения, либо принципом наименьшего действия. Напротив, квантовая механика суммирует вклады вероятностной функции (основанной на действии) для всех возможных траекторий между двумя точками. Хотя классическая траектория является наиболее вероятной, в принципе все возможные траектории вносят свой вклад в континуальный интеграл. Таким образом, принцип действия является более фундаментальным на квантовом уровне, чем уравнения движения.

могут быть получены из этих двух так невинно выглядящих принципов! В частности, они подытоживают сущность квантовомеханической интерпретации эксперимента с двумя щелями, который в свою очередь выражает сущность самой квантовой механики.

На этом этапе должно быть ясно, что результаты классической механики могут быть воспроизведены из наших двух допущений в некотором приближении. Заметим, что для значений S , больших по сравнению с постоянной Планка, фазовый множитель быстро флуктуирует, что приводит к взаимному погашению вкладов от этих траекторий:

$$\delta S \gg \frac{h}{2\pi}: \sum_{\text{траектории}} e^{i2\pi S/h} \rightarrow 0. \quad (1.3.13)$$

Поэтому из всех вкладов в континуальный интеграл сохраняются лишь те, для которых отклонение действия от классической траектории имеет тот же порядок, что и постоянная Планка:

$$\delta S \sim \frac{h}{2\pi}. \quad (1.3.14)$$

Мы видим, что уравнения Эйлера–Лагранжа движения частицы воспроизводятся лишь в определенном классическом пределе, а именно при стремлении постоянной Планка к нулю. Поэтому величина постоянной Планка в конце концов определяет вероятность того, что частица пройдет по траекториям, запрещенным классической механикой. Мы видим, что истоки принципа неопределенности Гейзенберга воплощены в приведенных выше двух принципах.

Теперь попробуем заново сформулировать их более строго с помощью континуального интеграла. Второй принцип теперь запишется в виде

$$K(a, b) = \int_a^b Dx e^{i2\pi S/h}, \quad (1.3.15)$$

где

$$K(a, c) = \int K(a, b) K(b, c) Dx_b \quad (1.3.16)$$

и

$$\sum_{\text{траектории}} \rightarrow \int Dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^3 \prod_{n=1}^N dx_{i,n}. \quad (1.3.17)$$

Здесь индекс n нумерует N промежуточных точек, разделяющих интервал между начальной и конечной координатами. Теперь перейдем к пределу $N \rightarrow \infty$.

Существенно важно понимать, что интегрирование по Dx — это не

обычное интегрирование по переменной x . Фактически это произведение всех возможных интегралов по всем промежуточным точкам $x_{i,n}$ между точками a и b . Это решающее отличие функционального интеграла от обычного является сердцевинной формализма континуального интеграла.

Этот бесконечный ряд интегралов в свою очередь эквивалентен суммированию по всем возможным траекториям из a в b . Поэтому следует проявлять осторожность, включая нормирующие множители при выполнении интегрирования по бесконечному числу промежуточных точек.

Если взять простой случай $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2$, все функциональные интегралы можно вычислить аналитически. Это гауссов интеграл, который, к счастью, принадлежит к небольшому числу функциональных интегралов, вычисляемых аналитически. Одно из важных затруднений метода континуального интеграла состоит в том, что немногие интегралы могут быть вычислены. Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-r^2 x^2} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{r^{2n+1}}. \quad (1.3.18)$$

Мы будем использовать эту формулу повсюду в этой книге.

Теперь разобьем траекторию на бесконечное число промежуточных точек $x_{i,n}$. (Заметим, что функциональное выражение содержит интегрирование по всем возможным значениям промежуточной точки $x_{i,n}$, так что мы не можем ожидать, что $x_{i,n}$ и $x_{i,n+1}$ будут близки друг другу даже при малых шагах по времени.) Запишем

$$dt \rightarrow \varepsilon, \\ \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 dt \rightarrow \frac{1}{2} m (x_n - x_{n+1})^2 \varepsilon^{-1}. \quad (1.3.19)$$

Чтобы выполнить функциональное интегрирование по бесконечному числу промежуточных точек, мы будем повторно пользоваться интегралом Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \exp[-a(x_1 - x_2)^2 - a(x_2 - x_3)^2] \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \exp\left[-\frac{1}{2} a (x_1 - x_3)^2\right]. \quad (1.3.20)$$

Один из решающих моментов, на который следует обратить внимание, — то, что интегрирование в одной из промежуточных точек дает другой интеграл Гаусса, в котором эта промежуточная точка удалена. В этом состоит главная причина того, что возможно осуществить функциональное интегрирование по бесконечному числу промежуточных точек.

Наконец, континуальный интеграл, который мы намерены вычис-

лить, дается формулой

$$K(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int dx_1, dx_2 \dots dx_{N-1} \times \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m} \right)^{-(1/2)N} \exp \left\{ \frac{im}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 \right\} \quad (1.3.21)$$

(где мы для краткости не выписываем векторный индекс i). Используя предыдущее соотношение (1.3.20), запишем окончательный результат в виде

$$K(a, b) = \left| \frac{m}{2\pi(t_b - t_a)} \right|^{1/2} \exp \frac{\frac{1}{2} im(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}. \quad (1.3.22)$$

Функция вероятности перехода K имеет несколько очень любопытных свойств. Например, она служит решением волнового уравнения

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} K(a, b) = i \frac{\partial}{\partial t_a} K(a, b), \quad (1.3.23)$$

где t_a больше t_b .

Ниже мы обобщим эти выражения на случай свободно распространяющихся струн и обнаружим, что они переносятся на функции Грина с небольшими, но важными изменениями.

Чтобы показать взаимосвязь между гамильтоновой и лагранжевой формулировками в подходе континуального интеграла, полезно ввести полный набор промежуточных состояний при разбиении траектории, ведущей из a в b . Будем рассматривать переменную x как оператор x , действующий на множестве собственных состояний:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle. \quad (1.3.24)$$

Запись $|x\rangle$ означает собственное состояние оператора координаты; x — это оператор, собственное значение которого равно числу x . Тогда полноту множества собственных состояний для координат и импульсов можно представить формулами

$$\begin{aligned} 1 &= \int |x\rangle dx \langle x|, \\ 1 &= \int |p\rangle dp \langle p|. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Нормируем состояния следующим образом:

$$\langle x|y\rangle = \delta(x - y), \quad \langle p|x\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.3.26)$$

(Поскольку в формализме континуального интеграла неизменно появляется бесконечно много нормировочных множителей, мы часто будем

опускать их для ясности изложения. Это не умалит общности, поскольку при желании мы всегда сможем снова ввести их в континуальный интеграл.)

С помощью этих собственных состояний мы можем теперь переписать выражение для функции Грина, описывающей переход из точки x_1 в точку x_N :

$$K(1, N) = \langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle. \quad (1.3.27)$$

Чтобы вывести предыдущее выражение (1.3.22) для амплитуды перехода, вставим полный набор промежуточных состояний в каждой промежуточной точке между x_1 и x_N :

$$\begin{aligned} \langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle &= \langle x_1, t_1 | x_2, t_2 \rangle \int dx_2 \langle x_2, t_2 | \int dx_2 \\ &\dots | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \int dx_{N-1} \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N \rangle. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Теперь исследуем каждый инфинитезимальный пропагатор с помощью гамильтониана, который запишем как функцию координат и производных по координатам:

$$H = H(x, \partial_x). \quad (1.3.29)$$

Тогда функция перехода для бесконечно малого интервала дается выражениями

$$\begin{aligned} \langle x_1, t_1 | x_2, t_2 \rangle &= \langle x_1 | e^{-iH(x, \partial_x)\delta t} | x_2 \rangle \\ &= e^{-iH(x, \partial_x)\delta t} \langle x_1 | x_2 \rangle \\ &= e^{-iH(x, \partial_x)\delta t} \langle x_1 | p \rangle \int dp \langle p | x_2 \rangle \\ &= e^{-iH(x, p)\delta t} \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x_2 - x_1)} \\ &= e^{-iH(x, p)\delta t} \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx\delta t}. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Очень важно отметить, что континуальный интеграл позволил перейти от классических к квантовым коммутаторам. Гамильтониан можно выразить либо как функцию производных по координатам, либо как функцию канонических импульсов вследствие тождества

$$\partial_x e^{ipx} = ip e^{ipx}. \quad (1.3.31)$$

Это позволяет сделать важное отождествление:

$$\begin{cases} H(x, p) \leftrightarrow H(x, \partial_x), \\ p \leftrightarrow -i \frac{\delta}{\delta x}. \end{cases} \quad (1.3.32)$$

В функциональном формализме из этого тождества возникает важное соответствие между импульсами и частными производными.

Собирая все вместе, мы можем теперь записать полную амплитуду перехода в виде

$$\langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle = \int_{x_1}^{x_N} Dp Dx \exp i \int_{t_1}^{t_N} [p\dot{x} - H(p, x)] dt, \quad (1.3.33)$$

где

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x). \quad (1.3.34)$$

(Как обычно, мы опустили все промежуточные нормирующие множители, являющиеся просто кратными 2π .) Заметим, что функциональный интеграл, который прежде был функцией только координат, теперь является функцией и импульсов, и координат.

Чтобы снова получить исходный лагранжиан, мы можем выполнить интегрирование по p аналитически, поскольку это простой интеграл Гаусса, и мы получим

$$\langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle = \int_{x_1}^{x_N} Dx \exp i \int_{t_1}^{t_N} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - V(x) \right] dt. \quad (1.3.35)$$

Тем самым мы сделали переход между лагранжевым и гамильтоновым формализмами с помощью функциональных методов. Мы можем использовать любое из двух уравнений:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x) \leftrightarrow H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x). \quad (1.3.36)$$

В функциональном смысле единственное различие между этими двумя выражениями состоит в том, по чему мы интегрируем: по координатам или по некоторой комбинации координат и импульсов. Вероятность перехода можно представить любой из двух формул:

$$\begin{aligned} K(a, b) &= \int_{x_a}^{x_b} Dx \exp i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x) \right] \\ &= \int_{x_a}^{x_b} Dx Dp \exp i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p\dot{x}_i - \frac{p_i^2}{2m} - V(x) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

§ 1.4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ

До сих пор мы обсуждали лишь нерелятивистские частицы, и все степени свободы были физическими. Однако при обобщении предыдущего обсуждения на случай релятивистских частиц возникают нетривиальные осложнения. В частности, множитель (-1) , появляющийся в лоренцевой метрике, в общем случае вызовет распространение в рамках теории нефизических состояний. Эти нефизические «духовые» состояния, имеющие отрицательную вероятность, должны быть тща-

тельно устранены, чтобы обеспечить построение разумной, удовлетворяющей принципу причинности теории, не содержащей состояний с отрицательной нормой.

Для релятивистского случая предположим, что положение точечной частицы задается четырехмерным вектором

$$x_{\mu}(\tau), \quad (1.4.1)$$

где параметризация τ не обязательно обозначает время. Действие имеет особенно простой вид и пропорционально длине четырехмерного пути:

$$S = -m \int ds = -m(\text{длина}). \quad (1.4.2)$$

Длину пути ds можно выразить через координаты:

$$ds = \sqrt{-\dot{x}_{\mu}^2} d\tau. \quad (1.4.3)$$

Точка здесь означает дифференцирование по параметру τ . Это действие, в отличие от введенного ранее нерелятивистского действия, инвариантно относительно замены фиктивного параметра τ . Сделаем замену переменной

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau). \quad (1.4.4)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}, \\ \left\{ \left(\frac{dx_{\mu}}{d\tau} \right)^2 \right\}^{1/2} d\tau &= \left\{ \left(\frac{dx_{\mu}}{d\tilde{\tau}} \right)^2 \right\}^{1/2} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Итак, действие инвариантно относительно произвольной замены переменной τ (репараметризации).

Инфинитезимально это можно записать так:

$$\begin{cases} \tau \rightarrow \tau + \delta\tau, \\ \delta x_{\mu} = \dot{x}_{\mu} \delta\tau. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Как и прежде, мы можем ввести канонически сопряженные переменные:

$$p_{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^{\mu}} = \frac{m \dot{x}_{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}_{\mu}^2}}. \quad (1.4.7)$$

Решающее отличие от предшествующего обсуждения нерелятивистской точечной частицы заключается, однако, в том, что не все канонические импульсы независимы. Действительно, мы обнаруживаем, что между ними существует связь:

$$p_{\mu}^2 + m^2 \equiv 0. \quad (1.4.8)$$

Итак, условие на массовой поверхности возникает в качестве точной связи между импульсами. При вычислении гамильтониана этой системы обнаруживаем, что

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L \equiv 0. \quad (1.4.9)$$

Гамильтониан тождественно обращается в нуль.

Эти необычные черты, обращение в нуль гамильтониана и связи на импульсы, типичны для систем с избыточными калибровочными степенями свободы. Инвариантность относительно репараметризации, например, говорит о том, что выписанный ранее континуальный интеграл на самом деле расходится:

$$\int Dx e^{iS} = \infty. \quad (1.4.10)$$

Причина этого в отдельных вкладах от каждой частной параметризации. Но поскольку Dx параметризационно инвариантно, это означает, что мы суммируем по бесконечному числу копий одного и того же объекта. Поэтому интеграл этот должен расходиться.

Дирак, однако, объяснил, как квантовать системы с избыточными калибровочными степенями свободы. Например, введем канонические импульсы p и наложим условие связи с помощью множителей Лагранжа следующим образом:

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} e (p_\mu^2 + m^2). \quad (1.4.11)$$

Условие связи (1.4.8) наложено здесь как классическое уравнение движения. Варьируя e , получим связь на импульсы. Квантовомеханически, однако, эта связь налагается взятием континуального интеграла по e . При этом интегрировании получаем

$$\int De \exp \left[-i \int d\tau \frac{1}{2} e (p^2 + m^2) \right] \sim \delta(p^2 + m^2), \quad (1.4.12)$$

где мы использовали тот факт, что интеграл от e^{ikx} (или преобразование Фурье от числа 1) равен $\delta(x)$. Заметим, что новый лагранжиан (1.4.11) все еще обладает калибровочной степенью свободы. Он инвариантен относительно преобразования

$$\delta x_\mu = \varepsilon \dot{x}_\mu, \quad \delta p_\mu = \varepsilon \dot{p}_\mu, \quad \delta e = \frac{d(\varepsilon e)}{d\tau}. \quad (1.4.13)$$

Преимущество этого действия над предыдущим состоит в том, что все переменные входят в него линейно. Не придется тревожиться об осложнениях, вызываемых квадратным корнем. (Поле e , которое мы ввели, станет метрическим тензором g_{ab} , когда мы обобщим это действие применительно к струне.)

Проведем теперь функциональное интегрирование по переменной p :

$$\int Dp \exp \left\{ i \int d\tau \left[p \dot{x} - \frac{1}{2} e (p^2 + m^2) \right] \right\} \\ \sim \exp \left\{ i \int d\tau \frac{1}{2} (e^{-1} \dot{x}^2 - e m^2) \right\}. \quad (1.4.14)$$

Итак, мы теперь получили третью версию действия для точечной частицы. Преимущество этого действия состоит в том, что оно линейно по координатам и инвариантно относительно преобразования

$$\begin{cases} \delta x_\mu = \varepsilon \dot{x}_\mu, \\ \delta e = \frac{d(\varepsilon e)}{d\tau}. \end{cases} \quad (1.4.15)$$

В итоге мы нашли три эквивалентных способа описания точечных релятивистских частиц. Лагранжиан «второго порядка» (1.4.14) выражен через производные второго порядка от переменной $x_\mu(\tau)$ и поля e . «Нелинейный» лагранжиан (1.4.3) выражен только через $x_\mu(\tau)$. Его можно вывести из (1.4.14) функциональным интегрированием по полю e . И наконец, гамильтонова форма описания содержит как $x_\mu(\tau)$, так и канонические сопряженные им переменные $p_\mu(\tau)$ (она имеет первый порядок относительно производных):

$$\text{Форма 1-го порядка (гамильтонова): } L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} e (p_\mu^2 + m^2),$$

$$\text{Форма 2-го порядка: } L = \frac{1}{2} (e^{-1} \dot{x}_\mu^2 - e m^2), \quad (1.4.16)$$

$$\text{Нелинейная форма: } L = -m \sqrt{-\dot{x}_\mu^2}.$$

Все три формы инвариантны относительно репараметризации. У каждой есть свои преимущества и недостатки. Это упражнение в выражении действия свободной релятивистской частицы тремя разными способами важно, поскольку оно непосредственно переносится в формализм теории струн. Выраженные в форме континуального интеграла, теория точечной частицы и теория струны замечательно похожи друг на друга.

§ 1.5. ПЕРВИЧНОЕ И ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

В настоящем разделе мы проквантуем классическую точечную частицу и затем покажем связь полученной теории с более обычной формулировкой теории поля на языке вторичного квантования. Программа первичного квантования, как мы увидим, довольно неуклюжа по сравнению с формализмом вторичного квантования, привычным большинству физиков, но исторически теория струн развивалась как теория первичного квантования. Огромное преимущество формализма вторичного квантования состоит в том, что вся теория может быть выведена из

одного действия, тогда как теория первичного квантования требует многих дополнительных допущений.

Переход от классической к квантовой системе тесно связан с вопросом об устранении избыточных бесконечностей. Как мы уже указывали, континуальный интеграл формально определен некорректно, поскольку содержит суммирование по бесконечному числу копий одного и того же объекта. Весь фокус в том, как выделить ровно одну копию.

Существуют по крайней мере три основных способа, которыми точечная частица может быть проквантована: кулоновская калибровка, формализм Гупты–Блейлера и формализм BRST.

Кулоновское квантование

Здесь мы выбираем калибровку

$$x_0 = t = \tau. \quad (1.5.1)$$

Другими словами, мы берем временную составляющую переменной x равной действительному времени t , которое теперь служит параметром, описывающим эволюцию струны. В этой калибровке действие сводится к

$$L = -m \int \sqrt{1 - v_i^2} dt. \quad (1.5.2)$$

В пределе малых скоростей (по сравнению со скоростью света) получаем

$$L \sim \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2, \quad (1.5.3)$$

как и ранее, так что континуальный интеграл принимает вид

$$\int D x_\mu \delta(x_0 - t) e^{iS} = \int D x_i \exp i \int \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 dt. \quad (1.5.4)$$

Для случая струны этот простой пример заложит основу для квантования в конусных переменных. Преимущество кулоновской калибровки состоит в том, что все духи явным образом удалены из теории, так что мы имеем дело лишь с физическими величинами. Другое преимущество состоит в том, что нулевая составляющая вектора положения теперь явным образом определена как временная переменная. Параметризация точечной частицы теперь задается посредством физического времени.

Недостаток кулоновского формализма, однако, в том, что явная лоренцева симметрия нарушается, и приходится непосредственно проверять, что квантованные лоренцевы генераторы замыкаются правильно. Хотя для точечной частицы это тривиально, удивительные свойства обнаружатся для квантовой струны, и они определяют фиксированную размерность пространства–времени, равную 26.

Квантование Гупты–Блейлера

Этот подход пытается сохранить лоренц-инвариантность. Это значит, конечно, что необходимо особенно позаботиться, чтобы состояния с отрицательной нормой не испортили свойств S -матрицы. В методе Гупты–Блейлера действие остается полностью релятивистским, но ограничение (1.4.8) налагается на векторы состояния:

$$[p_\mu^2 + m^2]|\varphi\rangle = 0. \quad (1.5.5)$$

(Заметим, что приведенное выше уравнение является устраняющим духи ограничением, поскольку его можно использовать для устранения p_0 .) Этот формализм позволяет нам сохранить коммутаторы полностью релятивистскими:

$$[p_\mu, x_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}. \quad (1.5.6)$$

Здесь мы выбрали $\eta_{\mu\nu} = (- + + + \dots)$. Заметим, что это калибровочное ограничение естественно обобщается до уравнения Клейна–Гордона:

$$[\square - m^2]\varphi(x) = 0. \quad (1.5.7)$$

Важность формализма Гупты–Блейлера определяется тем, что именно в этом формализме было выполнено большинство вычислений в теории струн.

Квантование BRST

Преимущество формализма BRST [45, 46] состоит в том, что оно является явно лоренц-инвариантным. Но вместо восстановления унитарности наложением калибровочных ограничений на гильбертово пространство, что может оказаться весьма трудным на практике, формулировка BRST использует духи Фаддеева–Попова для сокращения частиц с отрицательной метрикой. Так, хотя функции Грина не являются унитарными из-за распространения состояний с отрицательной метрикой и духов, окончательная S -матрица унитарна, поскольку нежелательные частицы взаимно уничтожаются. Поэтому формализм BRST включает лучшие черты обоих формализмов, т.е. явную лоренц-инвариантность формализма Гупты–Блейлера и унитарность кулоновского (или конусного) формализма. Для изучения формализма BRST, однако, необходимо сначала понять квантование Фаддеева–Попова.

§ 1.6. КВАНТОВАНИЕ ФАДДЕЕВА–ПОПОВА

Прежде чем обсуждать метод BRST, нужно вернуться назад и вкратце рассмотреть формализм, разработанный Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым [47]. Как мы отмечали ранее, задаваемая конти-

нуальным интегралом мера Dx_μ определена некорректно, поскольку она обладает калибровочной степенью свободы, так что мы интегрируем по бесконечному числу копий одного объекта. Наивно рассуждая, можно было бы ввести условие калибровки непосредственно в континуальный интеграл. Если это условие задается приравнением к нулю некоторой функции F , аргументами которой служат поля,

$$F(x_\mu) = 0, \quad (1.6.1)$$

то мы вставляем эту дельта-функцию прямо в континуальный интеграл:

$$Z = \int D x \prod_x \delta [F(x_\mu)] e^{iS}. \quad (1.6.2)$$

Однако такой наивный подход на самом деле некорректен, поскольку дельта-функция приносит *нетривиальную меру* в функциональный интеграл.

Суть метода Фаддеева–Попова – ввести в функционал число 1, которое, очевидно, имеет правильную меру. Для наших целей самая удобная форма представления числа 1 дается выражением

$$1 = \Delta_{FP} \int D \varepsilon \delta [F(x_\mu^\varepsilon)], \quad (1.6.3)$$

где ε – параметризация калибровочной симметрии координаты, описываемой преобразованиями (1.4.6), x_μ^ε – вариация поля относительно этой симметрии, а детерминант Фаддеева–Попова Δ_{FP} задан предыдущим уравнением.

Заметим, что интеграл из предыдущего уравнения берется по всем возможным параметризациям поля. Поскольку все параметризации уже учтены этим интегрированием, то по построению детерминант Фаддеева–Попова не зависит от калибровки, соответствующей какой-либо конкретной параметризации:

$$\Delta_{FP}(x) = \Delta_{FP}(x^\varepsilon). \quad (1.6.4)$$

Теперь внесем число 1 под знак функционального интеграла и сделаем калибровочное преобразование, чтобы включить зависимость от ε в x :

$$\begin{aligned} Z &= \int D x \Delta_{FP}(x) \int D \varepsilon \delta [F(x^\varepsilon)] e^{iS}, \\ &= \int D x \Delta_{FP}(x) \int D \varepsilon \delta [F(x)] e^{iS}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Заметим, что калибровочное преобразование снова возвращает нас от x^ε к исходной переменной x . Так как остальные части функционального интеграла не зависели от калибровки, имеем теперь

$$Z = \left[\int D \varepsilon \right] \int D x \Delta_{FP} \delta [F(x)] e^{iS}. \quad (1.6.6)$$

Теперь можно извлечь интеграл по параметру калибровки, служащий мерой бесконечного объема пространства калибровочной группы,

$$\text{объем} = \int D \varepsilon, \quad (1.6.7)$$

и получить новое выражение для функционала, которое больше не содержит этой бесконечной избыточности:

$$Z = \int D x \Delta_{\text{FP}} \delta [F(x)] e^{iS}. \quad (1.6.8)$$

Заметим, что наивное квантование континуального интеграла просто вставило бы ограничение F и проигнорировало бы детерминант Фаддеева–Попова – ту новую конструкцию, которая позволила получить корректную меру.

Теперь вычислим детерминант Фаддеева–Попова, несущий всю информацию о появляющихся в теории духах. Для этого произведем замену переменных, перейдя от ε к F . Это можно сделать, поскольку у ε и F одинаковое число степеней свободы. Поэтому можно вычислить якобиан:

$$\det \left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon} \right] D\varepsilon = DF. \quad (1.6.9)$$

Тем самым можно написать

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{FP}} &= \left\{ \int D\varepsilon \delta(F) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \int DF \det \left[\frac{\delta \varepsilon}{\delta F} \right] \delta(F) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \det \left[\frac{\delta \varepsilon}{\delta F} \right]_{F=0} \right\}^{-1} \\ &= \det \left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon} \right]_{F=0}. \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Итак, множитель Фаддеева–Попова можно выразить как простой определитель вариации условия калибровки. Удобнее ввести этот множитель прямо в действие, выразив его через экспоненту. Используем следующий трюк:

$$\Delta_{\text{FP}} = \int D\theta D\bar{\theta} e^{iS_{\text{gh}}}, \quad (1.6.11)$$

где новый вклад духов в действие дается формулой

$$S_{\text{gh}} = \int d\tau \bar{\theta} \left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon} \right]_{F=0} \theta, \quad (1.6.12)$$

где переменные θ суть антикоммутирующие c -числа, называемые *грассмановыми числами* (см. Приложение). Обычно при функциональном интегрировании мы ожидаем получить определитель обратной матрицы. При функциональном интегрировании по грассмановым числам определитель оказывается в *числителе*, а не в знаменателе. Грассмановы числа обладают тем странным свойством, что

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i. \quad (1.6.13)$$

В частности, это означает, что

$$\theta^2 = 0. \quad (1.6.14)$$

Обычно это означало бы, что θ равно нулю. Но для грассмановых чисел это не так. Кроме того, у нас есть странное тождество

$$e^\theta = 1 + \theta. \quad (1.6.15)$$

Это тождество весьма облегчает интегрирование экспонент от полей, значения которых являются грассмановыми числами, так как эти экспоненты становятся многочленами. Другие тождества для грассмановых чисел приведены в приложении, где мы показываем, что

$$\int \prod_{i=1}^N d\theta_i d\bar{\theta}_i \exp \left[\sum_{i,j=1}^N \bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j \right] = \det(A_{ij}). \quad (1.6.16)$$

Это тождество подтверждает, что интегрирование по грассмановым переменным дает содержащие определители множители в числителе, а не в знаменателе, так что мы можем выразить детерминант Фаддеева–Попова в (1.6.11) через грассманов интеграл.

Теперь, развив аппарат квантования Фаддеева–Попова, возвратимся к подходу BRST, в котором мы налагаем калибровочное условие

$$e = 1 \quad (1.6.17)$$

(мы опустим некоторые тонкости, связанные с этой калибровкой). В такой калибровке мы должны суметь получить обычный ковариантный фейнмановский пропагатор. Чтобы это показать, заметим, что действие (1.4.14) принимает вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_\mu^2 - m^2). \quad (1.6.18)$$

С этим лагранжианом наша функция Грина для распространения точечной частицы из одной точки в другую теперь дается формулой

$$\begin{aligned} A_F(x_1, x_2) &= \langle x_1 \left| \frac{1}{\square - m^2} \right| x_2 \rangle \\ &= \langle x_1 \left| \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\square - m^2)} \right| x_2 \rangle \\ &= \int_0^\infty d\tau \int_{x_1}^{x_2} Dx \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau d\bar{\tau} (\dot{x}_\mu^2 - m^2) \right). \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

Заметим, что это обычный ковариантный фейнмановский пропагатор, записанный в терминах первичного квантования посредством континуального интеграла.

Первоначально, до выбора калибровки, действие было инвариантно

относительно

$$\delta e = \frac{d(\varepsilon e)}{d\tau}. \quad (1.6.20)$$

Поэтому детерминант Фаддеева–Попова, связанный с выбором калибровки $e = 1$, — это определитель такой производной. Теперь мы используем интеграл Гаусса по грассмановым состояниям для выражения этого определителя с помощью уравнения (1.6.10):

$$\Delta_{FP} = \det |\partial_\tau| = \int D\theta D\bar{\theta} \exp i \int d\tau \bar{\theta} \partial_\tau \theta. \quad (1.6.21)$$

(Если бы мы взяли обычные вещественнозначные поля вместо грассмановых, то определитель появился бы в неправильной степени.)

Собирая все вместе, мы находим, что окончательное действие можно представить в виде

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} (p_\mu^2 + m^2) - i\bar{\theta} \partial_\tau \theta. \quad (1.6.22)$$

Сущность подхода BRST состоит в том, чтобы заметить, что это действие с фиксированной калибровкой обладает дополнительной симметрией

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= i\varepsilon \theta \dot{x}_\mu, \\ \delta p_\mu &= i\varepsilon \theta \dot{p}_\mu, \\ \delta \theta &= i\varepsilon \theta \dot{\theta}, \\ \delta \bar{\theta} &= i\varepsilon \theta \dot{\bar{\theta}} + \frac{1}{2} \varepsilon (p_\mu^2 + m^2). \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

На первый взгляд может показаться странным, почему уже после фиксации калибровочных степеней свободы у нас появляется еще одна симметрия. Однако эта дополнительная симметрия является глобальной и, стало быть, не позволяет наложить на теорию какие-либо ограничения. Значит, эта симметрия отлична от найденных ранее, и ее нельзя использовать для устранения из действия калибровочных полей.

Можно подытожить подход BRST, введя оператор Q , порождающий найденные ранее симметрии:

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= [\varepsilon Q, \varphi], \\ Q &= \theta(\square - m^2), \\ Q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.24)$$

Физические состояния удовлетворяют условию

$$Q|\varphi\rangle = 0. \quad (1.6.25)$$

Заметим, наложение такого ограничения дает уравнение Клейна–Гордона для частиц на массовой поверхности:

$$(\square - m^2)\varphi = 0. \quad (1.6.26)$$

§ 1.7. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

До сих пор мы исследовали лишь первично квантованный подход к квантовым частицам. Квантовались только векторы положения и импульса:

$$\text{Первичное квантование: } [p_i, x_j] = -i\delta_{ij}. \quad (1.7.1)$$

Ограниченность этого подхода, однако, скоро станет очевидной, как только мы введем взаимодействия. Допустим, что мы хотим описать точечные частицы, способные сталкиваться друг с другом и расщепляться, а не только двигаться в поле внешнего потенциала. Теперь нам придется модифицировать порождающий функционал, чтобы включить суммирование по фейнмановским диаграммам:

$$Z = \sum_{\text{топологии}} \int Dx e^{-\text{длина}}. \quad (1.7.2)$$

(Заметим, что мы сделали виковский поворот в интеграле по τ , чтобы экспонента сходилась. Так как показатель степени становится вещественным, из контекста будет ясно, когда в этой книге имеется в виду теория с таким поворотом. Мы не будем обсуждать тонкий вопрос о сходимости континуального интеграла.)

Другими словами, нам придется вручную просуммировать по всем топологиям частиц, если частицы могут расщепляться и преобразовываться. Каждая топология представляет развитие во времени траекторий всех точечных частиц в ходе взаимодействия. Амплитуду N -частичного рассеяния с импульсами, заданными набором k_1, k_2, \dots, k_N , можно теперь представить в виде

$$A(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\text{топологии}} g^n \int Dx \Delta_{\text{FP}} \times \exp \left\{ - \int dt L(t) + i \sum_{i=1}^N k_{\mu} x_i^{\mu} \right\}. \quad (1.7.3)$$

Заметим, что мы берем преобразование Фурье от функции Грина, так что амплитуда является функцией внешних импульсов. Эту формулу удобнее представить в виде

$$A_N = \sum_{\text{топологии}} \left\langle \exp i \sum_{i=1}^N k_{\mu} x_i^{\mu} \right\rangle. \quad (1.7.4)$$

Тем самым мы приписываем множитель e^{ikx} каждой внешней частице. Он происходит из соответствующего слагаемого преобразования Фурье. Эта формула для амплитуды рассеяния, выведенная посредством континуального интеграла, важна тем, что почти без изменений переносится в формализм теории струн.

Обратите внимание, насколько неуклюже такое описание. Нам приходится устанавливать все топологически разрешенные конфигурации и их веса вручную. Кроме того, унитарность S -матрицы вовсе не очевидна.

В описании методом вторичного квантования, однако, мы вводим поле $\psi(x)$ и квантовые отношения между самими полями, а не между переменными:

$$\begin{aligned} \text{Вторичное квантование: } [\pi(x), \psi(y)]_{x_0=y_0} &= \\ &= -i\delta^{(3)}(x_i - y_i). \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Преимущество подхода вторичного квантования заключается в возможности выписать в явном виде гамильтониан взаимодействия, и не придется вводить суммирование по топологиям. Достаточно показать, что этот гамильтониан эрмитов, чтобы зафиксировать веса всех диаграмм и продемонстрировать унитарность S -матрицы.

Подытожим достоинства и недостатки методов первичного и вторичного квантования:

Первичное квантование

- (1) Взаимодействия нужно складывать вручную, порядок за порядком относительно постоянной взаимодействия.
- (2) Унитарность окончательной S -матрицы не очевидна. Она должна быть проверена в каждом порядке.
- (3) Формализм с необходимостью строится в рамках теории возмущений, поскольку разложение по топологиям тесно связано с разложением по порядку постоянной взаимодействия.
- (4) Трудно описать теорию вне массовой поверхности.

Вторичное квантование

- (1) Взаимодействия явным образом включены в само действие.
- (2) Унитарность гарантирована, если гамильтониан является эрмитовым.
- (3) Формально теорию можно описать и в рамках теории возмущений, и вне этих рамок.
- (4) Теория с необходимостью формулируется вне массовой поверхности.

Переход от теории первичного квантования к теории вторичного квантования также легче всего осуществить в формализме континуального интеграла в кулоновской калибровке. Ранее мы показали, что функция Грина для распространения свободной точечной частицы может быть вычислена явно:

$$K(a, b) = \left\{ \frac{m}{2\pi i(t_b - t_a)} \right\}^{1/2} \exp i \frac{m(x_b - x_a)^2}{2(t_b - t_a)}. \quad (1.7.6)$$

Эту функцию Грина также можно записать в стиле вторичного

квантования. Начнем с гамильтониана:

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2. \quad (1.7.7)$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(i\partial_t - H)K(x, t; x', t') = \delta^{(3)}(x - x')\delta(t - t'). \quad (1.7.8)$$

Разрешая его относительно этой функции Грина, находим

$$K(a, b) = [i\partial_t - H]_{x_a, t_a, x_b, t_b}^{-1}, \quad (1.7.9)$$

где мы рассматриваем функцию, обратную функции Грина, таким образом, как если бы она была дискретной матрицей в пространстве (x, t) , а тривиальные нормирующие множители опущены. Это позволяет записать интеграл в форме вторичного квантования. Чтобы это показать, мы применим следующие тождества, которые будут использоваться на протяжении всей книги:

$$\begin{aligned} \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^N -x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^N J_i x_i \right\} = \\ = \frac{\pi^{(1/2)N}}{\det |A_{ij}|} \exp \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N J_i (A^{-1})_{ij} J_j \right\}. \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

(Эту интегральную формулу легко вывести, используя ранее полученную формулу для гауссова интеграла (1.3.18). Мы просто диагонализуем матрицу A , сделав замену переменных в пространстве x . Тогда квадратичный член в подынтегральном выражении станет функцией собственных значений матрицы A . Поскольку все моды теперь стали независимы, интеграл Гаусса можно вычислить точно дополнением до полного квадрата. Наконец, делаем обратное преобразование от собственных значений матрицы A к самой исходной матрице A .)

Отсюда можно вывести следующие интегральные формулы:

$$\begin{aligned} \int x_n x_m \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left\{ \sum_{i=1}^N -x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^N J_i x_i \right\} \\ \sim \left[\frac{\delta}{\delta J_n} \frac{\delta}{\delta J_m} \exp \left\{ \frac{1}{4} J_i (A^{-1})_{ij} J_j \right\} \right]_{J=0} \det |A_{ij}|^{-1} \\ \sim (A^{-1})_{nm} (\det |A_{ij}|)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Это некоторые из самых важных интегральных формул этой книги. С их помощью мы можем теперь переписать функцию Грина целиком на языке вторично квантованных полей:

$$K(a, b) = \int \psi^*(x_a, t_a) \psi(x_b, t_b) D\psi^* D\psi \exp i \int dx dt L(\psi), \quad (1.7.12)$$

где

$$L(\psi) = \psi^*(i\partial_t - H)\psi \quad (1.7.13)$$

и где мы снова рассматриваем $K(a, b)$, так как если бы эта функция была дискретной матрицей в дискретизированном пространстве (x, t) .

В итоге у нас есть два альтернативных описания точечной частицы, дополняющих друг друга: теорию можно излагать либо в терминах координат частицы x_i , либо в терминах полей $\psi(x)$.

На уровне свободных частиц оба описания полностью эквивалентны и в смысле легкости описания, и математически. Однако при описании взаимодействий появляются четкие отличия. Например, легко написать

$$L_I \sim \varphi^3; \quad \sim \varphi^4, \quad (1.7.14)$$

и мы можем быть уверены, что получим унитарное описание взаимодействующего поля. Однако в подходе первичного квантования сумма по топологиям

$$\sum_{\text{топологии}}$$
(1.7.15)

является неудобным способом описания унитарной теории. Нам придется проверять унитарность в каждом порядке все более сложных диаграмм. Кроме того, первично квантованное описание с необходимостью проводится в рамках теории возмущений. Сумма по топологиям в континуальном интеграле первичного квантования является суммой по фейнмановским диаграммам теории возмущений, так что теория с самого начала с необходимостью формулируется в рамках этой теории возмущений. Это важнейшая причина, по которой мы разделили эту книгу на части, отвечающие первичному и вторичному квантованию.

§ 1.8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Один пример проиллюстрирует взаимоотношения между первичным и вторичным квантованием — задача о гармоническом осцилляторе. Этот пример окажется полезным при введении представления посредством гармонических осцилляторов, которое будет широко использоваться в струнной модели. Начнем с точечной частицы, описываемой следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2. \quad (1.8.1)$$

Здесь k — упругая постоянная. Поскольку импульсы и координаты являются сопряженными переменными, мы можем при помощи тех же рассуждений, которые были изложены ранее при обсуждении континуального интеграла, положить

$$[p, x] = -i. \quad (1.8.2)$$

Теперь мы можем переопределить координаты и импульсы, выразив их

через гармонические осцилляторы:

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{1}{2} m\omega\right)^{1/2} (a + a^\dagger), \\ x &= i(2m\omega)^{-1/2} (a - a^\dagger). \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Здесь

$$k = m\omega^2. \quad (1.8.4)$$

Чтобы удовлетворялось каноническое коммутационное соотношение (1.8.2), должно выполняться

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (1.8.5)$$

Подставляя это выражение в гамильтониан, находим

$$H = \frac{1}{2} \omega (aa^\dagger + a^\dagger a). \quad (1.8.6)$$

Выделяя член с c -числом, можно записать это выражение в нормально упорядоченном виде

$$H = \omega (a^\dagger a + h_0), \quad (1.8.7)$$

где h_0 — энергия нулевой точки. Теперь можно ввести гильбертово пространство гармонических осцилляторов. Определим вакуум выражением

$$a|0\rangle = 0. \quad (1.8.8)$$

Тогда элемент фоковского пространства для гамильтониана гармонического осциллятора дается выражением

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1.8.9)$$

и состояния образуют ортонормированный базис:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (1.8.10)$$

Энергия системы квантована и дается выражением

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega. \quad (1.8.11)$$

Пока что система была представлена лишь в формализме первичного квантования. Мы квантовали каждый раз только одну точечную частицу. Теперь мы хотим перейти к волновой функции вторичного квантования, введя

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n |n\rangle, \quad (1.8.12)$$

где выполнено разложение в степенной ряд по основным состояниям гармонического осциллятора. Так, вместо описания одиночного возбужденного состояния точечной частицы мы вводим теперь волновую функцию, которая будет суперпозицией произвольного числа возбужденных состояний.

Дадим важное определение

$$\langle x | \Phi \rangle = \Phi(x). \quad (1.8.13)$$

Это выражение можно вычислить в явном виде. Заметим, что теперь у нас есть два независимых набора основных состояний, а именно основные состояния гармонического осциллятора $|n\rangle$ и собственные векторы положения $|x\rangle$. Теперь нужно вычислить способ перехода от одного из этих базисов к другому и обратно.

Для начала исследуем простейший матричный элемент:

$$\sigma_0(x) = \langle x | 0 \rangle. \quad (1.8.14)$$

Этот матричный элемент удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x | a | 0 \rangle \\ &= \langle x | \frac{p - im\omega x}{\sqrt{2m\omega}} | 0 \rangle \\ &= (2m\omega)^{-1/2} \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - im\omega x \right) \langle x | 0 \rangle \\ &= -i(2m\omega)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x \right) \sigma_0(x). \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

Последнее из этих уравнений можно решить точно:

$$\sigma_0(x) = (m\omega/\pi)^{1/4} e^{-1/2\xi^2}, \quad (1.8.16)$$

где

$$\xi = (m\omega)^{1/2} x. \quad (1.8.17)$$

Теперь можно непосредственно вычислить все такие матричные элементы. Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \langle x | n \rangle \\ &= \langle x | (n!)^{-1/2} a^{\dagger n} | 0 \rangle \\ &= (n!)^{-1/2} (2m\omega)^{-n(1/2)} x [p + im\omega x]^n | 0 \rangle \\ &= (n!)^{-1/2} (2m\omega)^{-(1/2)n} \left(-i\frac{\partial}{\partial x} + im\omega x \right)^n \sigma_0(x). \end{aligned} \quad (1.8.18)$$

Поэтому решением служит

$$\sigma_n(x) = i^n (2^n n!)^{-1/2} (m\omega/\pi)^{1/4} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^{-(1/2)\xi^2}. \quad (1.8.19)$$

В общем случае эта формула выражает не что иное, как многочлены Эрмита H_n . С их помощью можно выразить друг через друга собственные состояния $|x\rangle$ и базисные векторы $|n\rangle$:

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \langle n|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \sigma_n(x), \\ |n\rangle &= |x\rangle \int dx \langle x|n\rangle = \int dx \sigma_n(x) |x\rangle. \end{aligned} \quad (1.8.20)$$

Итак, используя (1.8.12) и (1.8.20), мы получаем степенное разложение волновой функции по полному набору ортогональных многочленов, а именно по многочленам Эрмита:

$$\Phi(x) = \langle x|\Phi\rangle = \langle x|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n H_n(\xi) e^{-(1/2)\xi^2}. \quad (1.8.21)$$

Подобным образом нетрудно вычислить функцию Грина для распространения точечной частицы в поле потенциала гармонического осциллятора. Функция Грина была бы той же, если бы мы начали в рамках формализма вторичного квантования с действием

$$L = \Phi(x)^* \left(i\partial_t + \frac{1}{2m} \nabla^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \Phi(x). \quad (1.8.22)$$

Из этого вторично квантованного действия мы можем поэтому получить уравнения движения:

$$\begin{aligned} i\partial_t \Phi(x, t) &= \left[\frac{-1}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] \Phi(x, t) \\ &= H\Phi(x, t). \end{aligned} \quad (1.8.23)$$

Отсюда можно определить канонические импульсы, сопряженные $\Phi(x, t)$, такие, что удовлетворяются канонические квантовые соотношения

$$[\Pi(x, t), \Phi(x', t)] = -i\delta(x - x'). \quad (1.8.24)$$

§ 1.9. ТОКИ И ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Начнем с обсуждения релятивистской теории вторичного квантования, которая, как мы видели, в рамках теории возмущений эквивалентна первично квантованной теории. При квантовании точечной частицы в формализме Гупты-Блейлера мы пришли к уравнениям движения

$$[\square - m^2] \varphi = 0, \quad (1.9.1)$$

которые можно вывести из вторично квантованного действия

$$L = \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2]. \quad (1.9.2)$$

Одним из наиболее мощных методов, которые мы использовали при

изучении теории первичного квантования, была симметрия. Теперь нам хотелось бы рассмотреть симметрии, возникающие в рамках формализма вторичного квантования.

Сначала вычислим уравнения движения, проварьировав поле и потребовав, чтобы действие при такой вариации было стационарным:

$$\delta S = 0 = \int d^D x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi \right). \quad (1.9.3)$$

Проинтегрируем по частям, используя

$$\delta S = \int d^D x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi + \int d^D x \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right). \quad (1.9.4)$$

Если временно пренебречь поверхностным членом, то действие будет стационарным при выполнении следующего уравнения движения:

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} - \frac{\delta L}{\delta \varphi} = 0. \quad (1.9.5)$$

Подстановка лагранжиана в это уравнение дает уравнения движения, воспроизводящие найденное ранее ограничение для формализма первичного квантования.

Сделаем теперь небольшое изменение полей, параметризованное малым, но пока не определенным числом ε^α :

$$\delta \varphi = \frac{\delta \varphi}{\delta \varepsilon^\alpha} \delta \varepsilon^\alpha. \quad (1.9.6)$$

Если подставить это выражение в предыдущее уравнение для вариации действия, сохраняя поверхностный член неизменным и предполагая выполненными уравнения движения, то получим следующее уравнение:

$$\delta S = \int d^D x \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \frac{\delta \varphi}{\delta \varepsilon^\alpha} \right) \delta \varepsilon^\alpha. \quad (1.9.7)$$

Определим тензор в скобках как ток:

$$J_\alpha^\mu = \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \varphi} \frac{\delta \varphi}{\delta \varepsilon^\alpha}. \quad (1.9.8)$$

Тогда мы получаем важное уравнение

$$\delta S = \int d^D x \partial_\mu J_\alpha^\mu \delta \varepsilon^\alpha. \quad (1.9.9)$$

Так, если действие S стационарно при этой вариации, то мы получаем сохраняющийся ток $J^{\mu\alpha}$:

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha} = 0. \quad (1.9.10)$$

Мы будем использовать это уравнение снова и снова при обсуждении струн, когда нам понадобится найти ток для суперсимметрии и кон-

формной инвариантности. Наконец мы заметим, что суммарный заряд Q^a , связанный с током, постоянен во времени:

$$\int d^p x \partial_\mu J^{\mu a} = \int d^{p-1} x \partial_0 J^{0a} + \text{поверхностный член.} \quad (1.9.11)$$

Так,

$$Q^a = \int d^{p-1} x J_0^a, \quad (1.9.12)$$

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0 \rightarrow \frac{dQ^a}{dt} = 0.$$

Наконец, мы хотим построить еще один сохраняющийся ток, связанный с действием. Сделаем небольшую вариацию пространственно-временной переменной:

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu. \quad (1.9.13)$$

При этом изменении элемент объема в интервале меняется так:

$$\delta d^p x = d^p x \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (1.9.14)$$

Следовательно, вариация действия при этом изменении равна

$$\delta S = \int d^p x [L \partial_\mu \delta x^\mu + \delta L], \quad (1.9.15)$$

$$\delta L = \delta x^\mu \partial_\mu L + \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi.$$

Если теперь предположить, что уравнения движения удовлетворены, то получим

$$\delta S = \int d^p x \partial_\mu \left\{ \left(+ L \delta_v^\mu - \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_v \phi \right) \delta x^\nu \right\}. \quad (1.9.16)$$

Если мы теперь определим тензор энергии-импульса как

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L, \quad (1.9.17)$$

то получим уравнение

$$\delta S = \int d^p x \partial_\mu (T^{\mu\nu} \delta x_\nu). \quad (1.9.18)$$

Так что если действие не изменяется при данном изменении пространственно-временной переменной, то тензор энергии-импульса сохраняется:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.9.19)$$

Например, для действия скалярной частицы тензор энергии-импульса принимает вид

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L; \quad (1.9.20)$$

эта величина сохраняется, если уравнения движения удовлетворены.

Наконец, поучительно рассмотреть, как различные процедуры квантования применяются к полю Янга–Миллса (см. приложение). Начнем с $SU(N)$ -инвариантного действия:

$$L = -\frac{1}{4} [F_{\mu\nu}^a]^2, \quad (1.9.21)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.9.22)$$

Это действие инвариантно относительно

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a - f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c, \quad (1.9.23)$$

где Λ^a – калибровочный параметр.

Метод континуального интеграла начинается с функционала

$$Z = \int \prod_{\mu, x} dA_\mu(x) e^{i \int d^4x - (1/4) F_{\mu\nu}^2}. \quad (1.9.24)$$

Теперь рассмотрим три метода квантования.

Кулоновское квантование

Калибровочная инвариантность позволяет выбрать калибровку

$$\nabla_i A_i^a = 0.$$

Мы можем проинтегрировать по компоненте A_0 , поскольку она не содержит производных по времени, так что кулоновская формулировка с очевидностью свободна от духов. (Цена, которую приходится за это платить, это, конечно, отсутствие явной лоренц-инвариантности, которую нужно проверять вручную.) В этой калибровке действие принимает вид

$$L = +\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + \dots, \quad (1.9.25)$$

где все поля являются поперечными. Это каноническая форма лагранжиана.

Квантование Группы–Блейлера

Формулировка Группы–Блейлера обладает тем преимуществом, что мы можем сохранить явную лоренц-инвариантность, не нарушая унитарности. Например, возьмем калибровку

$$\partial_\mu A^{\mu a} = 0. \quad (1.9.26)$$

В этой калибровке пропагатор безмассовых векторных частиц принима-

ет вид

$$\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}. \quad (1.9.27)$$

Заметим, что этот пропагатор в явном виде содержит дух. Времениподобное возбуждение обладает коэффициентом -1 в пропагаторе, что соответствует духу. Однако мы можем осуществить квантование в этом ковариантном подходе, поскольку мы наложим устраняющую духи связь на гильбертово пространство:

$$\langle \phi | \partial_\mu A^{\mu a} | \psi \rangle = 0. \quad (1.9.28)$$

Эта связь позволяет разрешить его относительно духовых мод и тем самым устранить их. Итак, хотя свободный пропагатор допускает распространение духов, но гильбертово пространство свободно от духов, так что сама теория одновременно и лоренц-инвариантна, и свободна от духов.

Квантование BRST

Подход BRST начинается с вычисления детерминанта Фаддеева-Попова (1.6.10). Вычислим определитель следующей матрицы:

$$\begin{aligned} M^{ab}(x, y) &= \frac{\delta(\partial_\mu A^{\mu a}(x))}{\delta\Lambda^b(y)} \\ &= \partial_\mu D^\mu \frac{\delta\Lambda^a(x)}{\delta\Lambda^b(y)} \\ &= \partial_\mu D^\mu (\delta^4(x-y)\delta^{ab}). \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

Как и выше, можно записать определитель матрицы A^{ab} , включив его в действие с помощью (1.6.10):

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \bar{c}^a M^{ab} c^b. \quad (1.9.30)$$

Здесь антикоммутирующие духовые поля Фаддеева-Попова представлены величинами c и \bar{c} . Это действие инвариантно относительно следующего преобразования BRST:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= (\nabla_\mu c)^a \varepsilon, \\ \delta c^a &= -\frac{1}{2}f^{abd}c^b c^d \varepsilon, \\ \delta \bar{c}^a &= \frac{1}{\alpha}(\partial_\mu A^{\mu a})\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.9.31)$$

Опять же важно заметить, что преобразование BRST является ниль-

потентным. Симметрия BRST не связана с сохранением каких-либо наблюдаемых величин. Для этой симметрии мы можем найти генератор Q этого преобразования, такой что

$$Q^2 = 0. \quad (1.9.32)$$

Физические состояния рассматриваемой теории тогда удовлетворяют условию

$$Q|\text{физ}\rangle = 0. \quad (1.9.33)$$

§ 1.10. РЕЗЮМЕ

Самый большой парадокс теории струн, которая призвана обеспечить единый подход ко всем известным взаимодействиям, состоит в том, что сама эта теория столь неупорядоченна. Она часто вызывает разочарование у начинающих ее изучать, поскольку в ней очень много исторических традиций, условностей и произвольных правил игры, не имеющих идейного обоснования. Важнейшая причина такого положения – то, что теория струн исторически развивалась в обратном направлении как первично квантованная теория, а не как вторично квантованная теория, в которой все соотношения определяются через фундаментальную величину – действие. Недостатки подхода первичного квантования следующие:

- (1) Взаимодействия приходится вводить вручную. Их нельзя вывести из одного действия.
- (2) Унитарность в этом подходе не очевидна. Подсчет диаграмм требует трудоемкой проверки.
- (3) Формулировка проводится в рамках теории возмущений, так что важнейшие непертурбативные вычисления, вроде размерной редукции, неосуществимы.
- (4) Теория формулируется только на массовой поверхности.

Напротив, преимущества подхода вторичного квантования состоят именно в том, что все может быть выведено из единственного действия, определенного вне массовой поверхности, что унитарность обеспечивается явным образом и что непертурбативные вычисления в принципе могут быть выполнены.

К сожалению, теория струн исторически развивалась как теория первичного квантования. Поэтому она строилась в обратном направлении, и геометрическая теория вторичного квантования все еще находится в младенческом возрасте. По причинам педагогического характера мы ввели теорию струн с квазиисторической точки зрения, начав с теории первичного квантования и затем развив теорию вторичного квантования и изложив геометрические факты, лежащие в ее основе. Мы надеемся, что в будущем эту последовательность изложения удастся обратить.

Чтобы по возможности снизить масштабы произвола при построе-

нии теории первичного квантования, в этой главе мы попытались заложить основы теории струн в формализме континуального интеграла. Этот функциональный формализм обладает огромным преимуществом – возможностью выразить калибровочные теории первичного и вторичного квантования с одинаковой легкостью. Мы находим, фактически, что значительную часть теории точечных частиц в формулировке континуального интеграла можно целиком включить в теорию струн.

Метод континуального интеграла постулирует два основополагающих принципа, выражающих сущность квантовой механики:

- (1) Вероятность $P(a, b)$ того, что частица переместится из точки a в точку b , дается квадратом модуля функции перехода $K(a, b)$:

$$P(a, b) = |K(a, b)|^2.$$

- (2) Функция перехода задается суммой фазовых множителей e^{iS} , где S есть действие, взятой по всем возможным путям, ведущим из a и b :

$$K(a, b) = \sum_{\text{пути}} ke^{iS}.$$

В пределе непрерывных путей (траекторий) получаем

$$K(a, b) = \int_a^b Dx e^{iS},$$

где

$$Dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^3 \prod_{n=1}^N dx_{i,n}.$$

Действие S первично квантованной точечной частицы дается длиной траектории, прочерчиваемой частицей в пространстве–времени. Лагранжиан для точечной частицы можно представить тремя способами:

Форма 1-го порядка (гамильтонова): $L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} e(p_\mu^2 + m^2)$,

Форма 2-го порядка: $L = \frac{1}{2} (e^{-1} \dot{x}_\mu^2 - em^2)$,

Нелинейная форма: $L = -m \sqrt{-\dot{x}_\mu^2}$. (1.10.1)

К сожалению, из-за того, что все эти три формы действия параметризационно инвариантны, континуальный интеграл расходится. Поэтому процедура квантования должна разрушить эту калибровочную симметрию и дать правильную меру для функционала.

Эти формы действия можно квантовать тремя разными способами, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Вот эти способы.

- (1) Кулоновское квантование

Явным образом зафиксировав значение некоторых полей, например

положив

$$x_0 = t = \tau,$$

мы можем устранить мешающие нам состояния с отрицательной метрикой, и лагранжиан примет вид $\frac{1}{2}mv_i^2$. Кулоновское квантование поэтому явно свободно от духов. Однако недостаток этого метода — то, что он очень неудобен, поскольку явная лоренц-инвариантность разрушается и должна быть проверена на каждом уровне.

(2) Квантование Гупты–Блейлера

Преимущество метода квантования Гупты–Блейлера состоит в том, что мы получаем явно ковариантную программу квантования. Конечно, теперь духи с отрицательной метрикой могут свободно циркулировать по теории, но они в конечном итоге устраняются наложением калибровочных условий непосредственно на гильбертово пространство:

$$[p_\mu^2 + m^2]|\varphi\rangle = 0.$$

Так, S -матрица в конце концов оказывается свободной от духов. Недосток этого подхода, однако, в том, что наложение этих калибровочных условий, особенно на уровне взаимодействий, часто весьма затруднительно.

(3) BRST-квантование

Этот метод квантования сохраняет достоинства обоих предыдущих. Теория является явно ковариантной, но S -матрица по-прежнему унитарна, поскольку добавление к теории духовых полей в точности компенсирует сокращающиеся с ними состояния с отрицательной метрикой. Метод BRST налагает калибровку $e = 1$ в форме первого порядка и затем вставляет член Фаддеева–Попова Δ_{FP} в функционал, чтобы получить правильную меру. Можно ввести этот определитель в действие в экспоненциальной форме, используя грассмановы переменные:

$$\Delta_{FP} = \det|\partial_\tau| = \int d\theta d\bar{\theta} e^{i\int d\tau \bar{\theta}\partial_\tau\theta}.$$

Полученное действие с фиксированной калибровкой обладает остаточной симметрией, которая порождается BRST-зарядом a . (Эта новая симметрия не приводит к устранению каких-либо новых полей.)

При обобщении этих методов на случай взаимодействий формулировка континуального интеграла начинается с основополагающей формулы для функции перехода N -частичного рассеяния:

$$A(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\text{топологии}} g^n \int Dx \Delta_{FP} \times \exp \left\{ i \int dt L(t) + i \sum_{i=1}^N k_{\mu} x_i^{\mu} \right\} = \sum \int Dx \langle e^{i \sum_{i=1}^N k_{\mu} x_i^{\mu}} \rangle. \quad (1.10.2)$$

Описание амплитуды N -частичного рассеяния в рамках первичного квантования неудобно, потому что оно требует явного суммирования по конкретным топологиям, которые должны быть введены в теорию вручную. Это значит, что унитарность не очевидна в формализме первичного квантования. Ниже мы увидим, что эта трудность первично квантованной теории точечных частиц прямо переносится в первично квантованную теорию струн. В описании вторичного квантования, напротив, все топологии можно явным образом вывести из одного действия.

Переход от описания первичного квантования к описанию вторичного квантования в формализме континуального интеграла можно выполнить очевидным образом. Например, пропагатор можно записать как на языке первичного квантования, так и на языке вторичного квантования:

$$\begin{aligned} \Delta_{ab} &= \int_{x_a}^{x_b} Dx e^{i \int_a^b dt L(t)} \\ &= \int D\psi D\psi^* \psi(x_a) \psi^*(x_b) e^{i \int D_x L(\psi)}, \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

где

$$\begin{aligned} \langle x | \psi \rangle &= \psi(x), \\ L(t) &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2, \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

$$L(\psi) = \psi^* (i\partial_t - H) \psi.$$

Последнее уравнение задает лагранжиан для волнового уравнения Шрёдингера, которое можно вывести, исходя из постулатов континуального интеграла и формы лагранжиана $L = \frac{1}{2} m v_i^2$.

В случае взаимодействий также возможно найти вертексы вторичного квантования из теории первичного квантования точно тем же способом. Мы просто записываем функциональный интеграл по мировому листу, где точечные частицы расщепляются на точечные частицы, а затем записываем эту функцию Грина как функциональный интеграл по вторично квантованным полям.

Мы вскоре увидим преимущества тщательного выяснения деталей континуального интеграла для точечных частиц. Мы обнаружим, что почти весь этот формализм переносится непосредственно в формализм теории струн!

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Обзоры теории струн см.: Schwarz J. H., ed., *Superstrings*, Vols. 1 and 2, World Scientific, Singapore, 1985; Schwarz, *Phys. Rep.* **89**, 233 (1982).
- [2] Green M. B. *Surv. High Energy Phys.* **3**, 127 (1983).
- [3] Alessandrini V., Amati D., LeBellac M., Olive D. I. *Phys. Rep.* **1C**, 170 (1971).
- [4] Mandelstam S. *Phys. Rep.* **13C**, 259 (1974).
- [5] Rebbi C. *Phys. Rep.* **12C**, 259 (1974).

- [6] Frampton P. *Dual Resonance Models*, Benjamin, New York, 1984.
- [7] Scherk J. *Rev. Mod. Phys.* **47**, 1213 (1975).
- [8] Veneziano G. *Phys. Rep.* **9C**, 199 (1974).
- [9] Jacob M., ed., *Dual Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [10] Schwarz J.H. *Phys. Rep.* **8C**, 269 (1973).
- [11] Green M. B., Gross D., eds., *Unified String Theories*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [12] Green M. B., Schwarz J. H., Witten E. *Superstring Theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. [Имеется перевод: М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. Теория суперструн. В двух томах.— М.: Мир, 1990.]
- [13] Georgi H., Glashow S. L. *Phys. Rev. Lett.*, 438 (1974).
- [14] Freedman D. Z., Van Nieuwenhuizen P., Ferrara S. *Phys. Rev.* **D13**, 32 (1976).
- [15] Deser S., Zumino B. *Phys. Lett.* **62B**, 335 (1976).
- [16] Regge T., *Nuovo Cim.* **19**, 558 (1961).
- [17] Christ N. H., Friedberg R., Lee T. D., *Nucl. Phys.* **B202**, 89 (1982).
- [18] Wick G. C., Lee T. D. *Nucl. Phys.* **B9**, 209 (1969).
- [19] Kaku M., *Nucl. Phys.* **B203**, 285 (1982).
- [20] Kaku M. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1895 (1983); *Phys. Rev.* **D27**, 2809, 2819 (1983).
- [21] Veneziano G. *Nuovo Cim.* **57A**, 190 (1968).
- [22] Suzuki M. (неопубликовано).
- [23] Ramond P. *Phys. Rev.* **D3**, 2415 (1971).
- [24] Neveu A., Schwarz J. H. *Nucl. Phys.* **B31**, 816 (1971).
- [25] Neveu A., Schwarz J. H. *Phys. Rev.* **D4**, 1109 (1971).
- [26] Kikkawa K., Sakita B., Virasoro M. A. *Phys. Rev.* **184**, 171 (1969).
- [27] Kaku M., Yu L. P. *Phys. Lett.* **33B**, 166 (1970).
- [28] Kaku M., Yu L. P. *Phys. Rev.* **D3**, 2992, 3007, 3020 (1971).
- [29] Kaku M., Scherk J. *Phys. Rev.* **D3**, 430 (1971).
- [30] Kaku M., Scherk J. *Phys. Rev.* **D3**, 2000 (1971).
- [31] Alessandrini V. *Nuovo Cim.* **2A**, 321 (1971).
- [32] Lovelace C. *Phys. Lett.* **32B**, 703 (1970).
- [33] Lovelace C. *Phys. Lett.* **34B**, 500 (1971).
- [34] Nambu Y. *Lectures at the Copenhagen Summer Symposium* (1970).
- [35] Goto T. *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1560 (1971).
- [36] Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C. B. *Nucl. Phys.* **B56**, 109 (1973).
- [37] Mandelstam S. *Nucl. Phys.* **B64**, 205 (1973); **B69**, 77 (1974).
- [38] Kaku M., Kikkawa K. *Phys. Rev.* **D10**, 1110, 1823 (1974).
- [39] Scherk J., Schwarz J. H. *Nucl. Phys.* **B81**, 118 (1974); см. также Yonea T., *Prog. Theor. Phys.* **51**, 1907 (1974).
- [40] Green M. B., Schwarz J. H. *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984); **151B**, 21 (1985).
- [41] Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E., Rohm R. *Nucl. Phys.* **B256**, 253 (1986); **B267**, 75 (1986).
- [42] Hsue C. S., Sakita B., Virasoro M. A. *Phys. Rev.* **D2**, 2857 (1970).
- [43] Gervais J. L., Sakita B. *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971); *Phys. Rev.* **D4**, 2291 (1971); *Phys. Rev. Lett.* **30**, 716 (1973); Fairlie D. B., Nielsen H. B., *Nucl. Phys.*, **B20**, 637 (1970).
- [44] Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [45] Vecchi C., Rouet A., Stora R. *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).
- [46] Тюгин И. В. Препринт ФИАН, № 39, 1975.
- [47] Faddeev L. D., Popov V. N. *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

Глава 2

СТРУНЫ НАМБУ–ГОТО

§ 2.1. БОЗОННЫЕ СТРУНЫ

Теория струн на первый взгляд кажется отклоняющейся от обычных методов, развитых за последние 40 лет для теорий вторично квантованных полей. Это произошло потому, что теория струн была исторически впервые открыта в форме *теории первичного квантования*. Именно поэтому теория струн порой выглядит как случайный набор произвольных допущений. Хотя теория вторично квантованного поля может быть полностью выведена из единственного выражения для действия, теория первичного квантования требует дополнительных предположений. В частности, вертексы, выбор взаимодействий и веса диаграмм теории возмущений должны быть постулированы вручную и затем проверены на унитарность.

К счастью, формализм континуального интеграла для первично квантованной точечной частицы был затем обобщен на струны Жервэ и Сакитой, что позволяет нам выписать динамику взаимодействующих струн с замечательной легкостью.

В предыдущей главе мы ввели самые важные математические понятия, на основе которых можно обсуждать теорию первичного квантования для точечных частиц. Как ни странно, почти все основные черты струны Намбу–Гото имеют те или иные аналоги в этой теории. Конечно, в теории струн встречаются совершенно новые черты, такие, как существование мощных симметрий на мировом листе, но основные методы квантования могут быть прямо перенесены со случая точечной частицы, рассмотренного в предыдущей главе.

Мы видели, что обычная формулировка вторично квантованной теории поля может быть переписана в форме первичного квантования. Так, традиционный ковариантный фейнмановский пропагатор (1.6.19) можно с помощью (1.3.28), (1.3.30), (1.3.37) переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta_F(x_1, x_2) &= \langle x_1 \left| \frac{1}{\square - m^2} \right| x_2 \rangle \\
 &= \langle x_1 \left| \int_0^\infty dt e^{-\tau(\square - m^2)} \right| x_2 \rangle \\
 &= \int_0^\infty dt \int_{x_1}^{x_2} Dx e^{-(1/2) \int_0^1 d\tau (\dot{x}_\mu^2 - m^2)},
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

где мы интегрируем по всем возможным траекториям частицы, находящейся в точке $x_\mu(\tau)$, которые начинаются в x_1 и оканчиваются в точке x_2 .

Взаимодействия, как мы видели, вводились в теорию вручную постулированием конкретного набора топологий, по которым частица может блуждать. Амплитуда рассеяния, например, есть

$$A(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\text{топология}} \int Dxe^{-\int Ldt + i\sum_{i=1}^N k_i \cdot x_i} \Delta_{FP}$$

$$= \sum_{\text{топология}} \left\langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i \cdot x_i} \right\rangle, \quad (2.1.2)$$

где мы интегрируем по всем топологиям, образующим известные фейнмановские диаграммы для теории ϕ^3 или ϕ^4 .

Важно заметить, что полученная в результате фейнмановская диаграмма является графом, а не многообразием. В точке взаимодействия локальная топология не есть \mathbf{R}^n , так что она не может быть многообразием. Нет никакой корреляции между внутренними линиями и точками взаимодействия. Это значит, что мы можем ввести в точке взаимодействия релятивистской точечной частицы произвольно высокие спины, если мы пользуемся формализмом первичного квантования. Поэтому первично квантованная теория точечной частицы обладает бесконечной степенью произвольности, что соответствует различнымospинам и массам, которые мы можем поместить в точку взаимодействия. Кроме того, ультрафиолетовые расходимости каждой фейнмановской диаграммы соответствуют числу способов, которыми можно «прищепить» эту диаграмму, стянув в точку какую-либо из внутренних линий, и тем самым деформировать локальную топологию.

Эта картина, однако, полностью меняется при переходе к струнам. Хотя формализм континуального интеграла выглядит почти тем же самым, имеются глубокие и важные различия. В частности, сумма по историям развития становится суммой по всем возможным трубкам или поверхностям, которые могут соединять две различные струны (см. рис. 2.1). Этот мировой лист является настоящим многообразием, а именно римановой поверхностью, так что множество взаимодействий, совместимых с пропагатором, резко ограничивается. Поэтому мы ожи-

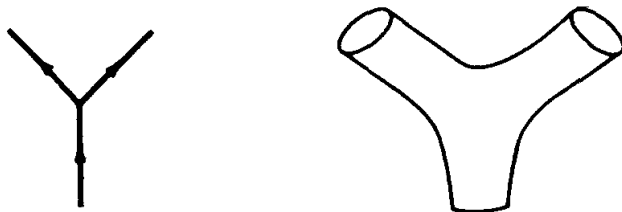


Рис. 2.1. Вершины для точечных частиц и для струн. Для точечных частиц можно построить большое число различных теорий, основанных на разных значениях спинов и изоспинов, поскольку фейнмановские диаграммы являются графами. Однако число известных теорий струн невелико, потому что взаимодействия должны описываться в этом случае многообразиями, а не графами. Конформная симметрия, модулярная инвариантность и суперсимметрия налагают жесткие ограничения на многообразия, которые можно использовать в теориях суперструн; эти ограничения не имеют аналогов в теории точечных частиц.

даем обнаружить очень малое число теорий струн, в противоположность бесконечному числу теорий точечных частиц, которые возможно написать. Кроме того, теория суперструн не испытывает трудностей, порожденных ультрафиолетовыми расходимостями, которые возникают из-за стягивания в точку одной из внутренних линий. Невозможно «прищепить» мировую поверхность струны, чтобы получить ультрафиолетовую расходимость. Поэтому теория струн свободна от расходимостей в силу чисто топологических соображений. (Необходимо отметить, однако, что такую «прищепнутую» диаграмму можно рассматривать как инфракрасную расходимость, представляющую испускание безмассовой частицы с нулевым спином в вакуум. К счастью, суперсимметрия устраняет эти инфракрасные расходимости.)

Итак, хотя формализм континуального интеграла сравнительно просто справляется и с теорией первично квантованной точечной частицы, и с теорией первично квантованной струны, но существуют глубокие и важные различия в физике этих теорий, возникающие из чисто топологических соображений.

Начнем обсуждение струн с введения координат, описывающих колеблющуюся в физическом пространстве–времени струну. Пусть точки вдоль струны параметризуются переменной σ , и пусть струна распространяется во времени. Пусть вектор

$$X_\mu(\sigma, \tau) \quad (2.1.3)$$

представляет пространственно-временные координаты этой струны (см. рис. 2.2), параметризованные двумя переменными. При движении струны она замечает двумерную поверхность, которую мы назовем «мировым листом». Он будет параметризован двумя переменными, σ и τ . Векторы, касательные к этой поверхности, определяются производными от координаты:

$$\text{Касательные векторы} = \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}; \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}. \quad (2.1.4)$$

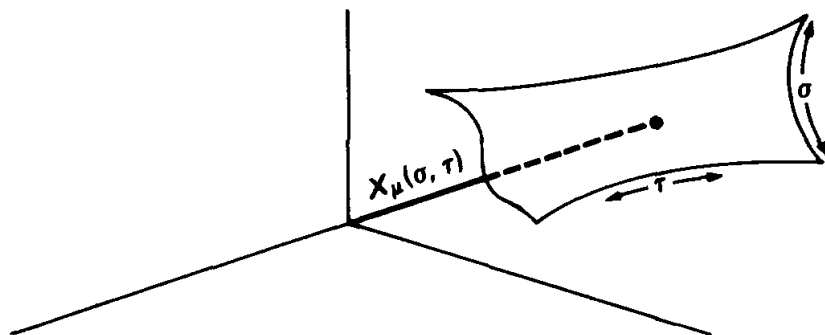


Рис. 2.2. Двумерная мировая поверхность, замечаемая струной. Когда струна, параметризованная параметром σ , движется в пространстве–времени, она замечает двумерную поверхность, параметризованную координатами σ и τ . Струнная переменная $X_\mu(\sigma, \tau)$ — это вектор, соединяющий начало координат с точкой на этом двумерном многообразии.

Свертка этих двух касательных векторов дает метрику

$$g_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu, \quad (2.1.5)$$

где мы заменили две переменные (τ, σ) набором (a, b) ; и a , и b могут принимать значения 0 и 1. Площадь бесконечно малого элемента на этой поверхности можно записать в виде

$$d\text{площадь} \sim \sqrt{\det |g_{ab}|} d\sigma d\tau. \quad (2.1.6)$$

По аналогии со случаем точечной частицы, в котором действие было длиной траектории частицы, определим теперь действие как площадь этого мирового листа. Лагранжиан поэтому дается формулой [1–4]:

$$L = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\dot{X}_\mu^2 X'^{\mu 2} - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2}, \quad (2.1.7)$$

где штрих представляет дифференцирование по σ , а точка – дифференцирование по τ . Действие есть просто лагранжиан, интегрированный по мировому листу, что равно общей площади этой двумерной поверхности:

$$S = \int d\sigma d\tau L(\sigma, \tau). \quad (2.1.8)$$

Функция Грина для распространения струны от конфигурации X_a в момент «времени» τ_a к конфигурации X_b в момент «времени» τ_b , а также континуальный интеграл по поверхности, выражающей топологию нескольких взаимодействующих струн, могут быть представлены в виде

$$K(X_a, X_b) = \int_{X_a}^{X_b} DX e^{-\int_{\tau_a}^{\tau_b} dt \int_0^1 d\sigma L},$$

$$Z = \sum_{\text{топология}} \int d\mu DX e^{-\text{площадь}}, \quad (2.1.9)$$

где $DX = \prod_{\mu, \sigma, \tau} dX_\mu(\sigma, \tau)$, $d\mu$ представляет интегральную меру по расположению внешних линий и где сделан виковский поворот по переменной τ (по формуле $\tau \rightarrow -i\tau$), чтобы интеграл сходился.

Соответствие между формализмом континуального интеграла для точечных частиц, который мы тщательно разработали в предыдущей главе, и формализмом теории струн весьма примечательно. Мы находим, что почти весь формализм точечных частиц можно перенести в формализм теории струн:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\mu(\tau) \\ \text{длина} \\ \prod_{\mu, \tau} dx_\mu(\tau) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_\mu(\sigma, \tau) \\ \text{площадь} \\ \prod_{\mu, \sigma, \tau} dX_\mu(\sigma, \tau) \end{array} \right\}.$$

Подобным образом континуальные интегралы для точечных частиц

и для теории струн обладают удивительно сходными чертами. N -точечную функцию для амплитуды рассеяния N -струн тоже можно записать в виде преобразования Фурье, подобного континуальному интегралу для точечных частиц:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_1}^{x_j} D X e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x) dt} \\ \langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i x^i} \rangle \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{X_1}^{X_j} D X e^{-\int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x) dt} \\ \langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i X^i} \rangle \end{array} \right\}.$$

Хотя имеются примечательные аналогии между теорией точечных частиц и теорией струн, когда они выражены на языке континуального интеграла, между ними выявится решающее отличие, когда мы исследуем топологии, по которым могут двигаться соответствующие объекты. Для случая точечных частиц эти топологии суть *графы*, как в фейнмановских диаграммах, тогда как для теорий струн эти топологии суть *многообразия*:

Графы \rightarrow Многообразия.

Одна из важнейших причин, по которой для точечных частиц имеется столь много различных выражений действия (и так мало разных действий для теории струн), — та, что отличает графы от многообразий. Нетривиальные ограничения, наложенные на многообразия, резко снижают число непротиворечивых теорий струн.

Как и в случае точечной частицы, выбор параметризации был вполне произволен. Поэтому наше действие должно быть независимо от параметризации. Чтобы это увидеть, сделаем произвольную замену переменных:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\sigma, \tau), \tag{2.1.10}$$

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\sigma, \tau).$$

При такой репараметризации переменная струны изменяется на величину

$$\delta X^\mu = X'^\mu \delta \sigma + \dot{X}^\mu \delta \tau. \tag{2.1.11}$$

Поскольку площадь поверхности не зависит от параметризации, действие обладает явной репараметризационной инвариантностью, что легко проверяется.

Как и прежде, выпишем канонически сопряженные переменные теории:

$$P_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - (\dot{X}_\nu X'^\nu) X'_\mu}{\det |\partial_a X^\nu \partial_b X_\nu|}.$$

Как и в случае точечных частиц, эти импульсы не все независимы.

Действительно, мы находим два тождества, которым удовлетворяют канонические импульсы:

$$\text{Связи: } \begin{cases} P_\mu^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X_\mu'^2 \equiv 0, \\ P_\mu X'^\mu \equiv 0. \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Итак, эти два условия налагают связи на канонические импульсы. Вычисление гамильтониана системы показывает, что он тождественно равен нулю, как в (1.4.9):

$$H = P_\mu \dot{X}^\mu - L \equiv 0. \quad (2.1.13)$$

Обращение в нуль гамильтониана и наличие связей на импульсы служат указаниями на то, что мы имеем дело с калибровочной системой, обладающей бесконечной избыточностью. Репараметризационная инвариантность системы является источником этой избыточности. Поэтому мы можем выписать тесное соответствие между связями теории точечных частиц и теории струн:

$$\{p^2 + m^2 = 0\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_\mu^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X_\mu'^2 = 0 \\ P_\mu X'^\mu = 0 \end{array} \right\}.$$

Прежде чем начать подробное обсуждение квантования струны, поучительно рассмотреть чисто классические движения этой струны. Сначала отождествим параметр τ с физическим временем, так что

$$\begin{aligned} \dot{X}_\mu &= (1, v_i), & ; \\ X'_\mu &= (0, X'_i). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Затем вынесем множитель X'^2 из-под знака корня в выражении для действия (2.1.7):

$$L = -\frac{1}{2\pi\alpha'} |X_i'^2|^{1/2} (1 - \tilde{v}_i^2)^{1/2}, \quad (2.1.15)$$

где \tilde{v} – составляющая скорости, перпендикулярная струне:

$$\tilde{v}_i = v_i - \frac{v_k X'_k}{X_j'^2} X'_i. \quad (2.1.16)$$

Граничные условия, выводимые из этого действия с фиксированной калибровкой, включают

$$\tilde{v}_i^2 = 1. \quad (2.1.17)$$

Это значит, что концы классической струны движутся со скоростью света.

Мы можем также вычислить энергию классической струны. Будем предполагать, что струна находится в конфигурации, максимизирующей ее момент количества движения, т.е. она является твердым стержнем, вращающимся с угловой скоростью ω вокруг оси, помеченной единичным вектором \mathbf{r} . Струну можно параметризовать выражением

$$\mathbf{X} = \sigma \mathbf{r}, \quad (2.1.18)$$

где

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.1.19)$$

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

и $-l \leq \sigma \leq l$.

Чтобы вычислить энергию и момент количества движения системы, нужно сначала выписать лоренцевы генераторы, связанные со струной:

$$M^{\mu\nu} = \int d\sigma (P^\nu X^\mu - P^\mu X^\nu). \quad (2.1.20)$$

Заметим, что это порождает алгебру группы Лоренца, если задать скобки Пуассона:

$$[X_\mu(\sigma), P_\nu(\sigma')] = \eta_{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.1.21)$$

Теперь можно вычислить энергию и момент количества движения из составляющих лоренцева генератора [5]:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-l}^l d\sigma (1 - \omega^2 \sigma^2)^{-1/2} \sim \frac{l}{2\alpha'}, \\ \mathbf{J} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-l}^l d\sigma \frac{\sigma^2}{(1 - \omega^2 \sigma^2)^{1/2}} [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \boldsymbol{\omega} (4\alpha' \omega^3)^{-1} \\ &\sim \boldsymbol{\omega} E^2 \alpha'. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Итак, момент количества движения вращающейся струны пропорционален квадрату энергии системы:

$$|\mathbf{J}| \sim E^2. \quad (2.1.23)$$

Если на оси абсцисс откладывать квадрат энергии, а на оси ординат момент количества движения (называемый также угловым моментом), то получится кривая, известная как *траектория Редже*. Наклон этой траектории равен α' , и кривая линейна. Итак, мы получили ведущую траекторию Редже для классического вращения твердого тела. На протяжении всей книги мы будем выбирать нормировку $\alpha' = \frac{1}{2}$. Это произвольное соглашение. Однако ниже мы увидим, что интерсепт a_0 ведущей траектории должен быть положен равным единице, что фикси-

руется конформной инвариантностью после квантования теории. Итак, положим

$$\alpha' = \frac{1}{2}, \quad a_0 = 1. \quad (2.1.24)$$

При квантовании системы мы обнаружим, что имеется бесконечно много таких параллельных траекторий Редже, но с все более отрицательными координатами их пересечения с осью y .

Как мы подчеркивали, есть принципиальное отличие между случаем точечных частиц и струной, состоящее в том, что струнная система обладает более обширным набором связей, порождающим калибровочную группу репараметризации. Например, если ввести канонические скобки Пуассона, то можно непосредственно показать, что эти связи порождают некоторую алгебру.

Для вычисления этой алгебры разложим X и P по нормальным модам открытой струны:

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} X_n^\mu \cos n\sigma, \quad (2.1.25)$$

$$P^\mu(\sigma) = \frac{1}{\pi} \left\{ p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} P_n^\mu \cos n\sigma \right\}.$$

Заметим, что в разложение для X входят только члены, содержащие косинусы. Причина в том, что при выводе уравнений движения струны приходится интегрировать по частям и поэтому возникают нежелательные поверхностные члены в точках $\sigma = \pi$ и $\sigma = 0$. Для устранения этих поверхностных членов нужно наложить граничное условие

$$X'_\mu = 0. \quad (2.1.26)$$

Это граничное условие устраняет все синусные моды струны.

Иногда будет удобно пользоваться тем, что разложение имеет такой вид. В частности, отсюда следует, что

$$X_\mu(\sigma) = X_\mu(-\sigma), \quad (2.1.27)$$

$$X'_\mu(\sigma) = -X'_\mu(-\sigma).$$

То же самое справедливо для мод канонически сопряженной переменной P_μ . Это в свою очередь позволяет объединить обе связи в одну, воспользовавшись свойствами симметрии струны относительно отражения-замены σ на $-\sigma$. Выбрав параметризацию, в которой длина струны равна π , определим

$$L_f = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma f(\sigma) \left(\sqrt{2\alpha'} \pi P_\mu + \frac{X'_\mu}{\sqrt{2\alpha'}} \right)^2, \quad (2.1.28)$$

где $f(\sigma)$ – произвольная функция на интервале $[-\pi, \pi]$. Заметим, что обе связи объединены теперь в одно уравнение в силу этой отражательной симметрии. С помощью (2.1.21) можно показать, что эти генераторы образуют замкнутую алгебру:

$$[L_f, L_g] = L_{f \times g}, \quad (2.1.29)$$

где

$$f \times g = fg' - gf'. \quad (2.1.30)$$

Можно также показать, что эта алгебра удовлетворяет тождествам Якоби

$$[L_{[f, [L_g, L_h]}] = 0, \quad (2.1.31)$$

где скобки означают все возможные циклические перестановки. Эта алгебра называется *алгеброй Вирасоро* [6]; она окажется одним из самых мощных инструментов построения теории струн.

Как в (1.4.11), можно включить связи в выражение для действия с помощью множителей Лагранжа $\lambda(\sigma, \tau)$ и $\rho(\sigma, \tau)$:

$$L = P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha' \lambda \left[P_\mu^2 + \frac{X_\mu'^2}{(2\pi\alpha')^2} \right] + \rho P_\mu X'^\mu. \quad (2.1.32)$$

Исключив функциональным интегрированием эти множители Лагранжа, вернемся к предыдущему набору связей. Неудивительно, что это новое действие обладает своей собственной группой репараметризации, причем параметрами служат η и ε :

$$\begin{aligned} \delta X_\mu &= 2\pi\alpha' \varepsilon P_\mu + \eta X'_\mu, \\ \delta P_\mu &= \left[\frac{\varepsilon X'_\mu}{2\pi\alpha'} + \eta P_\mu \right]', \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

$$\delta \lambda = -\dot{\varepsilon} + \lambda' \eta - \eta' \lambda + \rho' \varepsilon - \rho \varepsilon',$$

$$\delta \rho = -\dot{\eta} + \lambda' \varepsilon - \lambda \varepsilon' + \rho' \eta - \eta' \rho.$$

Преимущество этой формы действия – то, что она имеет первый порядок и не включает неудобных квадратных корней, содержащихся в исходном выражении для действия. Как и в случае точечных частиц, это указывает на существование еще одной формы действия, выраженной через вспомогательное поле. Чтобы найти эту третью формулировку действия, введем новое независимое поле

$$g_{ab}(\sigma, \tau), \quad (2.1.34)$$

представляющее метрику на двумерной поверхности. В отличие от обсуждавшегося выше случая, эта метрика совершенно независима от струнной переменной. Выпишем форму действия, предложенную в рабо-

те Полякова [7] ($g = |\det g_{ab}|$):

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \quad (2.1.35)$$

Эта формула является обобщением действия для точечной частицы (1.4.14), имеющего второй порядок. Заметим, что действие Полякова напоминает действие скалярных полей, взаимодействующих с внешним двумерным гравитационным полем. Оно также обладает явной репараметризационной инвариантностью:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \varepsilon^a \partial_a X^\mu, \\ \delta g^{ab} &= \varepsilon^c \partial_c g^{ab} - g^{ac} \partial_c \varepsilon^b - g^{bc} \partial_c \varepsilon^a, \\ \delta \sqrt{g} &= \partial_a (\varepsilon^a \sqrt{g}). \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Действие также тривиально инвариантно относительно изменения масштаба (преобразования Вейля)

$$\delta g^{ab} = \Lambda g^{ab}. \quad (2.1.37)$$

Действие Полякова полностью эквивалентно на классическом уровне приведенному выше действию Намбу–Гото. Как и в формализме Намбу–Гото, мы можем вывести алгебру Вирасоро. Проварьировав по метрическому тензору, получаем тензор энергии–импульса, который можно положить равным нулю:

$$T_{ab} = -4\pi\alpha' \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta L}{\delta g^{ab}}. \quad (2.1.38)$$

Вычислив его в явном виде, получим

$$T_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu. \quad (2.1.39)$$

Моменты тензора энергии–импульса будут соответствовать генераторам Вирасоро. Тем самым мы получаем другой способ вывода генераторов Вирасоро из этого нового, но эквивалентного формализма.

Заметим, что метрическое поле g_{ab} не является распространяющимся. Метрический тензор не содержит никаких действующих на него производных. Поэтому мы можем устранить это поле с помощью его собственных уравнений движения. Это приводит нас к следующему выводу:

$$\frac{\partial L}{\delta g_{ab}} = 0 \rightarrow g_{ab} = \frac{2\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu}{g^{cd} \partial_c X_\nu \partial_d X^\nu}. \quad (2.1.40)$$

Подставляя это значение метрического тензора обратно в действие, мы снова выводим исходное действие Намбу–Гото. Итак, на классическом уровне эти два действия совпадают.

В итоге, как и для случая точечных частиц, у нас теперь есть три разных способа записи действия; все они на классическом уровне эквивалентны. У каждого из них есть свои достоинства и недостатки при переходе к квантовой системе. Уравнения теории струн, выводимые из них, являются прямыми обобщениями трех лагранжианов для точечных частиц, приведенных в (1.4.16). Как и в рассмотренном выше случае, мы имеем, во-первых, формализм второго порядка, выражаемый через струнную переменную X_μ и через метрический тензор g_{ab} ; во-вторых, нелинейный формализм, выраженный полностью через X_μ ; и, в-третьих, гамильтонов формализм, в котором фигурируют X_μ и канонически сопряженная ей переменная P_μ (или пара $\partial_a X_\mu$ и $P^{a\mu}$):

Форма 1-го порядка (гамильтонова):

$$L = P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha'\lambda \left[P_\mu^2 + \frac{X_\mu'^2}{(2\pi\alpha')^2} \right] + \rho P_\mu X'^\mu \\ \sim \sqrt{g} P_\mu^a g_{ab} P^{b\mu} + P^{a\mu} \partial_a X_\mu \sqrt{g/\pi\alpha'}. \quad (2.1.41)$$

Форма 2-го порядка: $L = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu.$

Нелинейная форма: $L = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{X}_\mu^2 X_\nu'^2 - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2)^{1/2}.$

На первый взгляд можно предположить, что все три формы действия вполне эквивалентны, так что можно выбрать одну из них и отбросить остальные. В действительности это не так по двум довольно тонким причинам. Приведем их.

- (1) Поскольку мы имеем дело с первично квантованной теорией, мы обязаны взять сумму по всем топологиям взаимодействия, замечаемым струной. Для струны Намбу–Гото точная природа этих топологий неясна и должна быть задана вручную. Однако для предложенной Поляковым формы действия, содержащей независимый метрический тензор, можно устранить большую часть этой неопределенности, условившись, что суммирование проводится по всем *конформно и модулярно неэквивалентным конфигурациям*. (Эти термины будут определены ниже.) Это условие превратится в мощное ограничение, как только мы начнем выводить петли и единственным образом определим функциональную меру. Эта мера и топологии для действия Намбу–Гото, однако, определены некорректно. (Необходимо тем не менее отметить, что это правило интегрирования по неэквивалентным поверхностям не обеспечивает унитарности автоматически. Ее по-прежнему нужно проверять вручную.)
- (2) Хотя в классическом случае фиксация калибровки с помощью вейлевской инвариантности получается тривиально, здесь возникнут трудности, как только мы перейдем к квантовой механике. При

попытке тщательно провести процедуру квантования сразу возникнет аномалия. Фактически эта конформная аномалия исчезает лишь в 26-мерном случае!

Обсудим теперь квантование действия для струны. Стратегия, которой мы будем следовать при квантовании свободной теории с целью получения физического гильбертова пространства, такова. Сначала мы выделим симметрию действия, затем найдем токи, а затем алгебру, образованную генераторами этой симметрии. (Для струны этой симметрией будет репараметризационная инвариантность, а этой алгеброй – алгебра Вирасоро.) Затем мы должны наложить связи на гильбертово пространство; устраняющие духи и создающие унитарную теорию. Важно иметь в виду эту стратегию, когда мы приступим к квантованию струны:

Действие → Симметрия → Ток → Алгебра → Связи → Унитарность .

Как и в случае точечных частиц, мы можем начать программу квантования несколькими способами. Есть три формализма для фиксации калибровки этой теории: (1) Гупты–Блейлера (конформная калибровка), (2) калибровка светового конуса и (3) BRST-формализм. Преимущества и недостатки каждого из них следующие:

- (1) Формализм Гупты–Блейлера, вероятно, простейший из этих трех. Мы допускаем появление в действии духов, что позволило сохранить явную лоренц-инвариантность. За это пришлось заплатить необходимостью наложить устраняющие духи связи на гильбертово пространство. Операторы проектирования должны быть вставлены во все пропагаторы. Для деревьев это тривиально. Для петель высшего порядка это, однако, становится все труднее.
- (2) Преимущество формализма светового конуса состоит в том, что его действие явно свободно от духов, как и гильбертово пространство. Переход к петлям не вызывает осложнений. Однако формализм очень неудобен, и лоренц-инвариантность приходится проверять вручную на каждом шаге процедуры.
- (3) Формализм BRST сочетает лучшие черты двух предыдущих. Он является явно ковариантным, как формализм Гупты–Блейлера, и унитарным, как формализм светового конуса, поскольку духи с отрицательной метрикой и духи Фадеева–Попова взаимно уничтожаются.

Теперь обсудим по-отдельности каждую из этих схем квантования.

§ 2.2. КВАНТОВАНИЕ ГУПТЫ–БЛЕЙЛЕРА

Формализм Гупты–Блейлера обеспечит лоренц-инвариантность наложением связей Вирасоро на векторы состояний:

$$\langle \phi | L_f | \psi \rangle = 0. \quad (2.2.1)$$

Здесь ϕ и ψ представляют состояния теории. Эта связь устранил духовые векторы состояний, что позволит нам сохранить нефизические духи с отрицательной метрикой в действии.

Классический метрический тензор имеет три степени свободы, которые можно устранить калибровочным преобразованием. Две из них связаны с репараметризационной инвариантностью, а одна с вейлевской инвариантностью. Поэтому можно найти калибровку, устраняющую все три:

$$g_{ab} = \delta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Назовем эту калибровку *конформной*. (Как мы уже упоминали, переход к конформной калибровке для квантовой теории и высших петель вызывает трудности.) Действие примет следующий вид:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \int d\tau (\dot{X}_\mu^2 - X_\mu'^2). \quad (2.2.3)$$

Это выражение замечательно просто, поскольку действие теперь соответствует невзаимодействующей свободной струне. Это действие дает уравнения движения свободной струны

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X_\mu(\sigma, \tau) = 0 \quad (2.2.4)$$

с граничными условиями

$$X'_\mu(0, \tau) = X'_\mu(\pi, \tau) = 0, \quad (2.2.5)$$

которые мы должны наложить для интегрирования по частям и устранения поверхностного члена. Решениями уравнений движения служат произвольные функции переменных $\sigma + \tau$ и $\sigma - \tau$:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_1^\mu(\sigma + \tau) + X_2^\mu(\sigma - \tau). \quad (2.2.6)$$

Канонические коммутационные соотношения теперь суть

$$[P_\mu(\sigma), X_\nu(\sigma')] = -i\eta_{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.2.7)$$

где

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\sigma \cos n\sigma' \right). \quad (2.2.8)$$

Конечно, существует бесконечно много возможных представлений континуального интеграла. Однако, как и в случае точечной частицы, мы всегда можем выбрать простейшее из них – в базисе гармонических осцилляторов [8], в котором гамильтониан становится диагональным. В отличие от случая точечной частицы, однако, у нас теперь имеется бесконечное число осцилляторов, по одному набору для каждой нор-

мальной моды:

$$X_n^\mu = \frac{1}{2} i \sqrt{2\alpha'} (a_n^\mu - a_{-n}^\mu),$$

$$P_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (a_n^\mu + a_{-n}^\mu).$$
(2.2.9)

Каноническим коммутационным соотношениям можно удовлетворить, если положить

$$[a_{n\mu}, a_{m\nu}^\dagger] = \delta_{nm} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2.10)$$

Обычно также вводят эквивалентный набор осцилляторов:

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m} a_m^\mu; \quad m > 0,$$

$$\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m} a_m^{\dagger\mu}; \quad m > 0,$$

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.2.11)$$

Записанный в этом базисе, гамильтониан принимает особенно простую форму (см. 1.3.37):

$$H = \int_0^\pi d\sigma (P_\mu \dot{X}^\mu - L)$$

$$= \pi\alpha' \int_0^\pi \left(P_\mu^2 + \frac{1}{(2\alpha'\pi)^2} X_\mu'^2 \right) d\sigma$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n\mu}^\dagger a_n^\mu + \alpha' p_\mu^2; \quad \alpha_{0\mu} = \sqrt{2\alpha'} p_\mu. \quad (2.2.12)$$

Здесь мы сделали бесконечный сдвиг энергии нулевого состояния. На этом этапе масса частицы наименьшего порядка не является корректно определенной из-за этого бесконечного сдвига, но мы ниже покажем, что эта частица наименьшего порядка в действительности является тахионом. Мы покажем, что интерсепт модели равен 1.

Заметим, что все осцилляторные моды совершенно независимы друг от друга. В самом деле, гамильтониан диагонален в фоковском пространстве возбуждений гармонических осцилляторов. Выбор этого конкретного представления функции струны из бесконечного множества возможностей дает огромные преимущества, поскольку разрешенными собственными состояниями такого гамильтониана служат просто произведения фоковских пространств всех возможных гармонических осцилляторов:

$$\text{Собственные состояния суть } \prod_{n,\mu} \{a_{n,\mu}^\dagger\} |0\rangle. \quad (2.2.13)$$

Вакуум определен соотношением

$$a_{n\mu}|0\rangle = 0; \quad n \geq 0. \quad (2.2.14)$$

Спектр низших возбужденных состояний можно классифицировать следующим образом (см. рис. 2.3):

$$\begin{aligned} \text{Тахион} &\rightarrow |0\rangle, \\ \text{Безмассовой вектор} &\rightarrow a_1^\mu |0\rangle, \\ \text{Безмассовый скаляр} &\rightarrow k_\mu a_1^\mu |0\rangle, \\ \text{Массивная частица со спином 2} &\rightarrow a_1^\mu a_1^\nu |0\rangle, \\ \text{Массивный вектор} &\rightarrow a_2^\mu |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Как и ожидалось, мы получаем ведущую реджевскую траекторию, которую мы раньше получали из классического рассмотрения, а также бесконечное семейство дочерних траекторий со все более отрицательными интерсептами с осью y . В этой калибровке пропагатор, или функция Грина, принимает простой вид

$$\begin{aligned} K(a, b) &= \langle X_a | e^{-H\delta\tau} | X_b \rangle \\ &= \int_{X_a}^{X_b} DX \exp - \int d\sigma d\tau \left\{ \frac{1}{4\pi\alpha'} (\dot{X}_\mu^2 - X_\mu'^2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

где

$$DX = \prod_\mu \prod_\sigma dX^\mu(\sigma) = \prod_{\mu, n} dX_n^\mu. \quad (2.2.17)$$

Необходимо помнить, что функциональный интеграл по DX есть

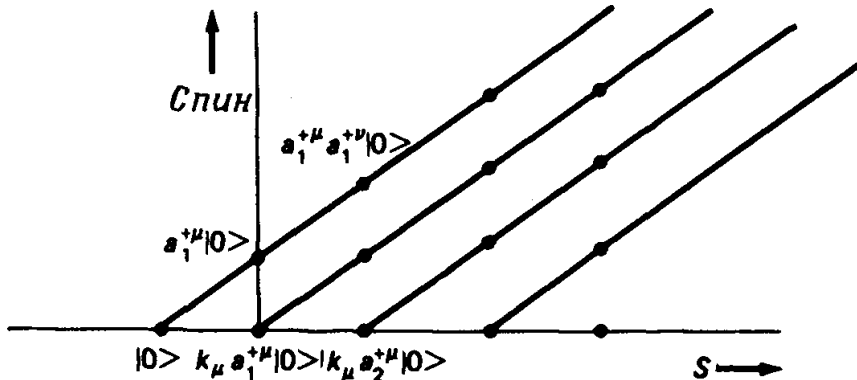


Рис. 2.3. Реджевские траектории для открытой струны. По оси абсцисс отложены квадраты энергии, по оси ординат — спины. Самая левая частица — это тахион, соответствующий вакууму фоковского пространства. Безмассовая частица со спином 1 — это поле Максвелла или Янга-Миллса, которое соответствует одиночному оператору создания, действующему на вакуум. Существует бесконечно много реджевских траекторий, соответствующих бесконечному числу возбуждений релятивистской струны или бесконечному числу состояний фоковского пространства.

бесконечное произведение интегралов по каждой точке вдоль струны или по всем фурье-модам струны.

К счастью, это интегрирование можно провести явным образом. Пусть частица движется из $\tau = 0$ к $\tau = \infty$. Так как гамильтониан диагонален в пространстве гармонических осцилляторов, интегрирование по τ можно выполнить точно. Находим

$$\langle X_a | \int_0^\infty d\tau e^{-H\tau} | X_b \rangle = \langle X_a | \frac{1}{L_0 - 1} | X_b \rangle, \quad (2.2.18)$$

где L_0 - нулевая фурье-составляющая генераторов Вирасоро (2.1.28). Другими словами, пропагатор свободной теории есть

$$D \equiv \frac{1}{L_0 - 1}; \quad (2.2.19)$$

его обкладками слева и справа служат состояния струны. Однако из-за наличия тождества

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1 \quad (2.2.20)$$

можно явным образом устранить континуальные интегралы в каждой промежуточной точке между начальным и конечным состояниями. В самом деле, из-за простоты N -точечной функции можно явным образом устранить все функциональные интегралы по состояниям струны, и у нас останутся лишь гармонические осцилляторы. Важно еще раз подчеркнуть, что гармонические осцилляторы служат лишь одним из способов представления континуального интеграла. Его простота является следствием диагональности гамильтониана в фоковском пространстве состояний гармонических осцилляторов.

Весьма сходным образом замкнутую струну тоже можно описать с помощью гармонических осцилляторов. Для замкнутой струны граничное условие $X' = 0$ неприменимо, и мы можем воспользоваться для разложения по нормальным модам как синусами, так и косинусами. Поэтому для замкнутой струны мы ожидаем удвоенного числа осцилляторов. Разложение по этим модам имеет вид

$$\begin{aligned} X_\mu(\sigma) &= x_\mu + \left(\frac{1}{2}\alpha'\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n e^{-in\sigma} + \tilde{a}_n e^{in\sigma} + a_n^\dagger e^{in\sigma} + \tilde{a}_n^\dagger e^{-in\sigma})_\mu, \\ P_\mu(\sigma) &= \frac{p_\mu}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (-ia_n e^{-in\sigma} - i\tilde{a}_n e^{in\sigma} + ia_n^\dagger e^{in\sigma} + \\ &\quad + i\tilde{a}_n^\dagger e^{-in\sigma})_\mu. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Гамильтониан для замкнутой струны есть

$$H = \pi \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\alpha' P_\mu^2 + \frac{X_\mu'^2}{4\pi^2 \alpha'} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (na_n^\dagger a_n + n\tilde{a}_n^\dagger \tilde{a}_n) + \alpha' p_\mu^2. \quad (2.2.22)$$

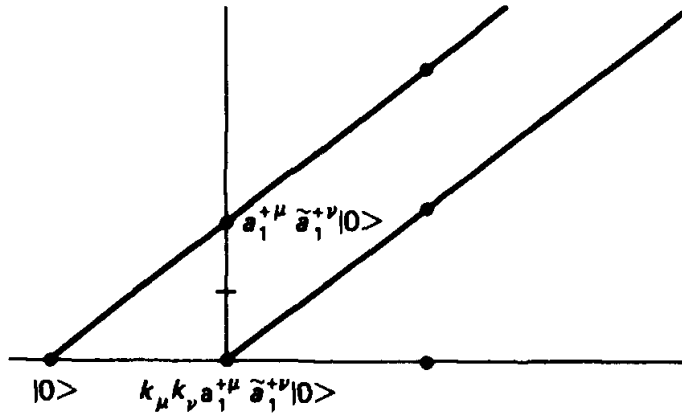


Рис. 2.4. Реджевские траектории для замкнутой струны. Фоковское пространство строится из двух коммутирующих наборов гармонических осцилляторов. Безмассовая частица со спином 2 — это гравитон, соответствующий произведению операторов обоих типов, действующих на вакуум.

Снова фоковское пространство состоит из всех элементов, созданных гармоническими осцилляторами, но на этот раз существует дополнительная связь, которой не было для открытой струны:

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\varphi\rangle = 0. \quad (2.2.23)$$

(Эта связь интерпретируется следующим образом: замкнутая струна не должна зависеть от выбора начала координаты σ . Например, оператор $\int d\sigma e^{i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)}$ можно интерпретировать двояко. Во-первых, он порождает повороты в пространстве σ , так что мы усредняем по поворотам на 2π в этом пространстве. Во-вторых, если вычислить этот интеграл, то получится $\delta(L_0 - \tilde{L}_0)$, что совпадает со связью (2.2.23) в применении к гильбертову пространству. Мы вернемся ниже к этой связи.)

Фоковское пространство состоит из следующих элементов (см. рис. 2.4):

$$\text{Тахион} \rightarrow |0\rangle,$$

$$\text{Безмассовая частица со спином 2} \rightarrow a_1^{\dagger\mu} \tilde{a}_1^{\dagger\nu} |0\rangle, \quad (2.2.24)$$

$$\text{Безмассовый скаляр} \rightarrow k_\mu k_\nu a_1^{\dagger\mu} \tilde{a}_1^{\dagger\nu} |0\rangle.$$

Заметим, что в спектре замкнутой струны есть безмассовая частица со спином 2. Когда струнную модель вначале интерпретировали как модель адронов, присутствие этой напоминающей гравитон частицы со спином 2 вызвало большое недоумение. Были предприняты попытки связать эту частицу с траекторией Померона, обнаруживаемой в теории S -матрицы. Можно показать, что при обобщении на деревья и петли эта безмассовая частица со спином два обладает калибровочной инвариантностью, эквивалентной гравитону теории Эйнштейна. Отказавшись от предшествующей интерпретации теории струн как модели адронов, мы

находим естественное место для этой гравитоноподобной частицы, отождествив ее с гравитоном как таковым.

В итоге можно сделать вывод, что формализм Гупты–Блейлера в конформной калибровке выглядит простым и изящным в основном потому, что мы позволили духам появиться в теории через действие. Теория сводится к простейшей из всех возможных теорий струн, т. е. к свободной распространяющейся струне.

Цена, которую приходится платить за эту простоту, — наложение ограничений на фоковское пространство. Генераторы Вирасоро можно записать так [6]:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma} \left[P_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m, \mu} \alpha_m^\mu, \\ L_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n, \mu} \alpha_n^\mu + \frac{1}{2} \alpha_0^2. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Поэтому *физические состояния* теории должны удовлетворять условиям

$$L_n |\phi\rangle = 0; \quad n > 0, \quad (2.2.26)$$

$$(L_0 - 1) |\phi\rangle = 0.$$

Алгебра, порождаемая этими операторами, задается соотношениями

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{D}{12} (n^3 - n) \delta_{n, -m}, \quad (2.2.27)$$

где D — размерность пространства-времени. Тот факт, что в этом уравнении присутствует центральный c -числовой член, на первый взгляд звучит необычно, но это можно проверить явным вычислением, взяв вакуумное среднее простого коммутатора:

$$\langle 0 | [L_2, L_{-2}] | 0 \rangle = \frac{D}{2}. \quad (2.2.28)$$

Этот центральный член возник из-за того, что мы *нормально упорядочили* генератор L_0 , чтобы получить конечные матричные элементы. Такое нормальное упорядочение обнаружилось даже для случая точечных частиц в (1.8.7); отличие лишь в том, что сдвиг энергии теперь бесконечен. *Цена, которую мы платим за конечность матричных элементов, — потеря локальности по σ .* Нормальное упорядочение уничтожает то положение, которое имело место до него, когда генераторы L_f были локальными функциями переменной σ . Процесс квантования с необходимостью разрушает локальность генераторов Вирасоро по переменной σ , и отсюда возникает c -числовой центральный член. Итак, схема квантования и схема регуляризации, примененные для извлечения

из модели конечной информации, в действительности несовместимы с конформной симметрией. К счастью, это противоречие можно устранить, если размерность пространства-времени положить равной 26.

То, что теория содержит духи, демонстрирует тот факт, что нулевая составляющая гармонического осциллятора имеет отрицательную метрику:

$$\text{Дух} = \{a_{n,0}^\dagger\} |0\rangle. \quad (2.2.29)$$

Поэтому коэффициент функции Грина входит со знаком минус. Кроме того, есть состояния с нулевой нормой и с отрицательной нормой, которые нужно учитывать.

Для изучения спектра определим *шпурионное состояние* $|S\rangle$ как состояние, ортогональное всем физическим вещественным состояниям $|R\rangle$. Шпурионные состояния можно записать в виде

$$\begin{aligned} |S\rangle &= L_{-n} |\chi\rangle; \quad n > 0, \\ \langle R|S\rangle &= 0 \end{aligned}$$

для некоторого целого n и некоторого состояния $|\chi\rangle$. (Если взять матричный элемент, отвечающий этому состоянию и какому-нибудь физическому состоянию, то скалярное произведение всегда будет равно нулю, поскольку L_n разрушает физические состояния.) Теперь построим шпурионное состояние:

$$|\psi\rangle = [L_{-2} + aL_{-1}^2] |\phi\rangle. \quad (2.2.30)$$

Мы не хотим, чтобы это состояние принадлежало физическому гильбертову пространству. Рассмотрим, однако, условия, при которых оно могло бы принадлежать физическому спектру. Положим

$$L_1 |\psi\rangle = L_2 |\psi\rangle = 0. \quad (2.2.31)$$

Отсюда следует, что

$$3 - 2a = 0; \quad \frac{1}{2}D - 4 - 6a = 0, \quad (2.2.32)$$

что в свою очередь фиксирует условия

$$D = 26; \quad a = \frac{3}{2}. \quad (2.2.33)$$

Итак, это шпурионное состояние удовлетворяет условиям (2.2.26) и поэтому является частью физического фоковского пространства. На первый взгляд это кажется неудачей. Мы желаем, чтобы наше физическое гильбертово пространство не содержало духов. Заметим, однако, что в 26-мерном пространстве это состояние имеет нулевую норму (а не отрицательную). Поскольку $|\phi\rangle$ было произвольным, мы построили бесконечный класс состояний $|\psi\rangle$, которые являются одновременно шпурионными и физическими. Если мы возьмем норму этого состояния

высшего порядка, то обнаружим, что в размерности 26 она также обращается в нуль, что делает его нулевым шпурионным состоянием. Это состояние также приемлемо, поскольку его норма неотрицательна. Итак, в 26-мерном пространстве мы получаем приемлемый спектр для этого набора состояний.

Подобный анализ векторов состояний теории показывает, что можно построить физическое состояние $|\theta\rangle$, которое на самом деле имеет отрицательную норму, если D больше чем 26:

$$|\theta\rangle = (aa^2_{-1} + bk \cdot a_{-2} + c(k \cdot a_{-1})^2)|0\rangle.$$

Налагая условие $L_1|\theta\rangle = L_2|\theta\rangle = 0$, находим, что $b = a(D-1)/5$ и $c = a(D+4)/10$. Мы получаем, что норма этого состояния равна

$$\langle\theta|\theta\rangle = \frac{2}{25}a^2(D-1)(26-D).$$

Итак, размерность пространства-времени не может превышать 26; в противном случае существуют состояния с отрицательной нормой, принадлежащие к физическим состояниям. В целом мы нашли, что спектр свободен от духов, если размерность пространства-времени меньше или равна 26:

$$\text{Отсутствие духов: } \begin{cases} a = 1, & D = 26 \\ a \leq 1, & D \leq 25 \end{cases}. \quad (2.2.34)$$

Это упражнение было проделано лишь для части фоковского пространства. Но можно ли устранить духи во всех порядках струнной модели? Мы вернемся к трудной проблеме устранения духов в формализме Гупты-Блейлера в конце настоящей главы, когда мы действительно построим физическое гильбертово пространство и покажем, что в нем нет состояний с отрицательной нормой, если размерность пространства-времени равна 26.

§ 2.3. КВАНТОВАНИЕ В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

Выбор калибровки светового конуса, в которой все нефизические степени свободы явным образом устранены с самого начала, возможен потому, что у нас есть две калибровочных степени свободы, и, следовательно, два фиксирующих калибровку условия можно включить в наш континуальный интеграл. Одна из этих фиксирующих калибровку связей — устранение нефизических мод из гильбертова пространства, как в кулоновской калибровке. Так, устранение духовых состояний, весьма сложное для формализма Гупты-Блейлера (как мы увидим в конце этой главы), становится тривиальным в калибровке светового конуса.

Выберем обозначения

$$X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[X^0 + X^{D-1}], \quad X^- = \frac{1}{\sqrt{2}}[X^0 - X^{D-1}]. \quad (2.3.1)$$

Тогда

$$A_\mu B^\mu = A_i B_i - A^+ B^- - A^- B^+. \quad (2.3.2)$$

В зависимости от того, какой вид действия в (2.1.41) мы выберем, мы получим разные калибровочные ограничения. Если начать с исходной формы действия Намбу–Гото, например, то калибровочные условия в континуальном интеграле суть

$$Z = \int DXM\Delta_{\text{FP}} \prod_{\sigma} \delta(X^+(\sigma) - p^+ \tau) \delta(\dot{X}_\mu^2 + X_\mu'^2 - 2\dot{X}_\mu X'^\mu) e^{-S}, \quad (2.3.3)$$

где M – фактор меры, который должен быть добавлен, чтобы теория была унитарной, а две дельта-функции представляют фиксирующие калибровку связи. Замечательная особенность второго ограничения – то, что действие Намбу–Гото, выраженное высоконелинейным квадратным корнем, полностью линеаризуется [12]:

$$\sqrt{\dot{X}_\mu^2 X_\nu'^2 - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2} \sim \frac{1}{2}(\dot{X}_\mu^2 - X_\mu'^2). \quad (2.3.4)$$

(Поскольку в формализме светового конуса действие не содержит уже квадратного корня, у нас есть действие с хорошим поведением, которое можно квантовать каноническим способом.)

Связь $X^+ = p^+ \tau$ означает, что зависимость от σ в X^+ полностью исчезла и что «время» τ теперь идет синхронно с X^+ . Мы можем в свою очередь использовать вторую связь для устранения мод X^- , и таким образом все продольные моды полностью исчезнут. Действие можно теперь целиком выразить через поперечные моды.

Теперь найдем связь для первой формы действия в (2.1.41). Проинтегрируем по множителям Лагранжа ρ и λ в гамильтоновой форме действия, а затем наложим связи, фиксирующие калибровку:

$$Z = \int DXDP \prod_{\sigma} \delta(X^+(\sigma) - p^+ \tau) \delta\left(P^+(\sigma) - \frac{p^+}{\pi}\right) \delta\left(P_\mu^2 + \frac{X_\mu^2}{\pi^2}\right) \delta(P_\mu X'^\mu) e^{-S}. \quad (2.3.5)$$

Поскольку ковариантный гамильтониан (2.1.13) равен нулю, то в лагранжиане останется только член $P_\mu \dot{X}^\mu$ (член X^- выпадает):

$$L = \int_0^\pi d\sigma P_\mu \dot{X}^\mu = \int_0^\pi d\sigma (P_i \dot{X}^i - p^+ P^-(\sigma)). \quad (2.3.6)$$

Этот формализм обладает несколькими замечательными чертами. Во-первых, мы можем наложить четыре, а не две связи на гильбертово пространство: две фиксирующих калибровку и еще две, проинтегрировав по λ и ρ . Во-вторых, поскольку ковариантный гамильтониан равен нулю, действие содержит только $P_\mu \dot{X}^\mu$, но из разложения выражения (2.3.6) возникает гамильтониан, записанный в координатах светового конуса:

$$H = p^+ \int_0^\pi d\sigma P^-(\sigma). \quad (2.3.7)$$

С другой стороны, мы можем решить уравнение связи относительно переменной P^- :

$$P^-(\sigma) = \frac{\pi}{2p^+} \left(P_i^2 + \frac{X_i^2}{\pi^2} \right). \quad (2.3.8)$$

Подставляя значение P^- в уравнение (2.3.7), определяющее конусный гамильтониан, получаем

$$H = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left(P_i^2 + \frac{X_i^2}{\pi^2} \right) d\sigma, \quad (2.3.9)$$

что в точности совпадает с гамильтонианом (2.2.12), определенным для физических поперечных мод.

Аналогично мы можем устранить моды X^- , решая другое уравнение связи

$$P_\mu X'^\mu = 0 \quad (2.3.10)$$

относительно переменной X^- , что дает

$$X^-(\sigma) = \int_0^\sigma d\sigma' \frac{\pi}{p^+} [P_i X_i']. \quad (2.3.11)$$

Соберем все вместе. Наш функционал теперь примет вид

$$Z = \int DX_i DP_i e^{i \int d\sigma (P_i \dot{X}_i - H)}, \quad (2.3.12)$$

где H — плотность гамильтониана в конусных переменных. Большое преимущество конусной калибровки состоит в том, что связи Вирасоро разрешены в явном виде, так что нет необходимости налагать их на состояния. Все «плюсовые» моды устраняются этой калибровкой с самого начала, а «минусовые» выражаются через поперечные состояния, поскольку условия Вирасоро разрешаются в явном виде посредством (2.3.8) и (2.3.11). Вместо наложения условий Вирасоро на гильбертово пространство, мы просто решаем их явным образом и устраняем минусовые моды.

Однако большой недостаток этого формализма — то, что нам придется выполнять утомительную проверку лоренц-инвариантности на каждом шаге вычислений. Обычно генераторы группы Лоренца даются формулой

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma [X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu] = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu]. \quad (2.3.13)$$

С помощью (2.2.7) легко проверить, что эти выражения удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям для группы Лоренца:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = i\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta} + \dots \quad (2.3.14)$$

Однако лоренц-инвариантность придется проверять заново, так как мы явным образом устранили все духовые моды. Большая часть коммутаторов проверяется тривиально, поскольку они линейны. Трудности связаны с членом, содержащимся в X^- ; эта переменная сильно нелинейна и записывается в виде

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma} \cos n\sigma, \quad (2.3.15)$$

где

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [:\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i: - 2a\delta_{n,0}] \quad (2.3.16)$$

и a есть интерсепт. Все коммутаторы легко вычисляются, кроме одного, содержащего X^- . Это длинное и требующее аккуратности вычисление приводит к следующему окончательному результату:

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i] \Delta_n. \quad (2.3.17)$$

Здесь

$$\Delta_n = \frac{n}{12}(26 - D) + \frac{1}{n} \left[\frac{D-26}{12} + 2 - 2a \right]. \quad (2.3.18)$$

Чтобы этот коммутатор обратился в нуль, должно иметь место

$$D = 26; \quad a = 1. \quad (2.3.19)$$

Эти равенства фиксируют и размерность пространства-времени D , и интерсепт a данной модели.

§ 2.4. BRST-КВАНТОВАНИЕ

Как и в случае точечной частицы, метод квантования BRST начинается с процедуры квантования Фаддеева–Попова и затем выделяется новый нильпотентный оператор симметрии. Действие инвариантно относительно репараметризации (2.1.36):

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= g_{ac} \partial_b \delta v^c + \partial_a \delta v^c g_{cb} - g_{ab} \partial_c \delta v^c \\ &= \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

(вторая строка записана в ковариантном виде и содержит двумерные символы Кристоффеля; см. Приложение). Это позволяет наложить калибровочное ограничение

$$g_{ab} = \delta_{ab}. \quad (2.4.2)$$

Это в свою очередь порождает детерминант Фаддеева–Попова

$$\Delta_{\text{FP}} = \det(\nabla_a) = \det(\nabla_z) \det(\nabla_{\bar{z}}). \quad (2.4.3)$$

Этот детерминант можно вычислить, выразив его через действие, фигурирующее в интегральной формуле в показателе экспоненты. Чтобы это сделать, нужно ввести антикоммутирующие духовые поля b и c (см. (1.6.22)). Как и прежде, это позволяет поместить определитель производной в показатель экспоненты. Определим $z = \tau + i\sigma$; тогда

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu + b \partial_{\bar{z}} c + \bar{b} \partial_z \bar{c} \right). \quad (2.4.4)$$

Заметим, что это действие инвариантно относительно следующих вариаций переменных:

$$\begin{aligned} \delta X_\mu &= \varepsilon [c \partial_z X_\mu + \bar{c} \partial_{\bar{z}} X_\mu], \\ \delta c &= \varepsilon [c \partial_z c], \\ \delta \bar{c} &= \varepsilon [\bar{c} \partial_{\bar{z}} \bar{c}], \\ \delta b &= \varepsilon \left[c \partial_z b + 2 \partial_z c b - \frac{1}{2} \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu \right], \\ \delta \bar{b} &= \varepsilon \left[\bar{c} \partial_{\bar{z}} \bar{b} + 2 \partial_{\bar{z}} \bar{c} \bar{b} - \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} X_\mu \partial_z X^\mu \right]. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Из этой вариации и (1.9.8) можно извлечь нильпотентный оператор BRST-метода Q . Однако важно также отметить, что, вообще говоря, для любой алгебры Ли с коммутационными соотношениями $[\lambda_m, \lambda_n] = f_{mn}^p \lambda_p$ можно построить нильпотентный оператор Q [10] из антикоммутирующих операторов c_n и b_m :

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \left[\lambda_n - \frac{1}{2} f_{nm}^p c_{-m} b_p \right], \quad (2.4.6)$$

где

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n, -m}. \quad (2.4.7)$$

Поэтому наш нильпотентный оператор BRST можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n} \left(L_n^X + \frac{1}{2} L_n^{\text{gh}} - a \delta_{n,0} \right) : \\ &= c_0 (L_0 - a) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-n} L_n + L_{-n} c_n] - \frac{1}{2} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} : c_{-m} c_{-n} b_{n+m} : (m-n). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Здесь член L_n^X равен зависящему от X генератору алгебры Вирасоро, а L_n^{gh} – духовый вклад в этот генератор. На этом этапе выписанное выше выражение содержит два неизвестных параметра: величину интерсепта

a и размерность пространства-времени. Вычислим квадрат оператора Q , который должен быть равен нулю:

$$Q^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am \right) c_m c_{-m}. \quad (2.4.9)$$

Чтобы это выражение обратилось в нуль, необходимо положить размерность пространства-времени равной 26, а интерсепт взять равным единице.

Как и в случае точечной частицы, мы находим, что физические состояния системы в рамках этой теории даются условием

$$Q|\text{физ}\rangle = 0. \quad (2.4.10)$$

Выделив мод, получаем, что низшее состояние удовлетворяет условию

$$(L_0 - 1)|\varphi\rangle = 0, \quad (2.4.11)$$

$$L_n|\varphi\rangle = 0,$$

как и прежде.

§ 2.5. ДЕРЕВЬЯ

До сих пор мы квантовали только свободные струны. Взаимодействия струн можно определить либо через функционалы, либо с помощью гармонических осцилляторов. Из этих двух способов функциональные методы намного мощнее. Фактически мы можем рассматривать метод гармонических осцилляторов как одно специфическое представление метода функционалов. Для деревьев и даже для первой петли гармонические осцилляторы обеспечивают быстрый и удобный способ вычисления амплитуд, но для высших петель этот способ быстро становится непрактичным. Функциональный метод из-за его огромной гибкости всегда можно использовать и для вывода осцилляторного метода, применимого к деревьям и первой петле, и для вывода всех петель.

Исторически дуальная модель была впервые открыта случайно как квантовая амплитуда рассеяния тахионов. Эти амплитуды обладали замечательным свойством *дуальности*; это означает, что их можно разлагать или по s -канальным полюсам, или по t -канальным полюсам. Обычно в теории точечных частиц суммирование фейнмановских диаграмм проводится раздельно для s - и t -канальных полюсов (см. рис. 2.5), но дуальные амплитуды обладают полюсами в обоих каналах одновременно. Поэтому включение дуальных амплитуд в s - и t -канальные полюса по отдельности привело бы к повторному счету. Для более сложных диаграмм мы видим, что одна и та же N -точечная амплитуда может быть разложена произвольным числом способов. Поскольку подсчет таких диаграмм — это не то же самое, что обычный подсчет фейнмановских диаграмм, то много лет ошибочно полагали, что интер-

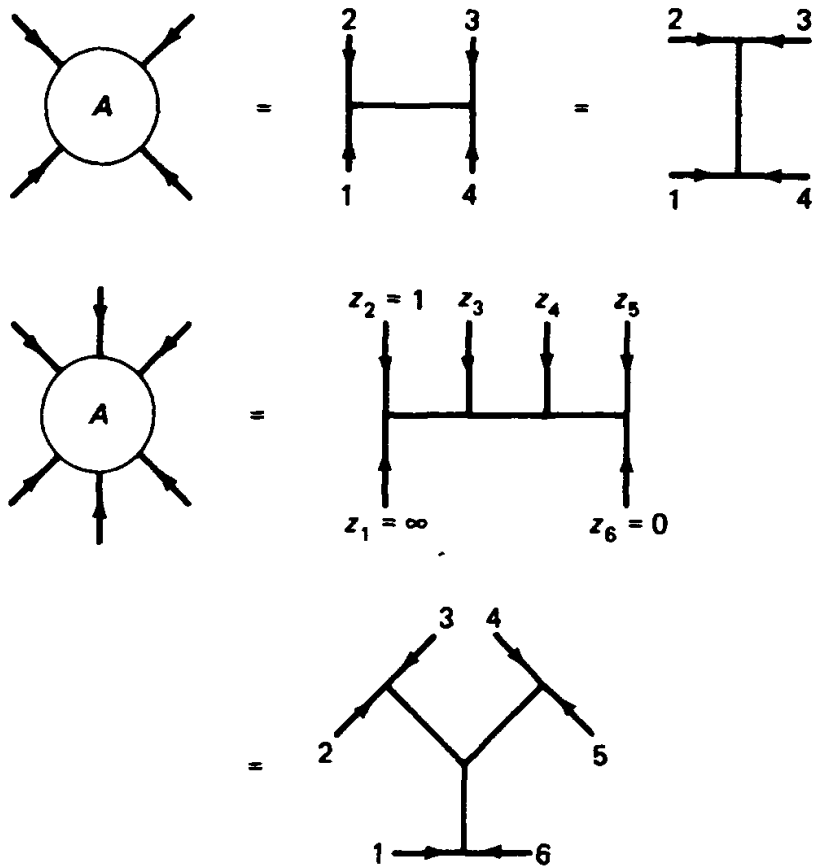


Рис. 2.5. Дуальность модели Венециано. Четырехточечную амплитуду можно разлагать как по s -, так и по t -канальным полюсам. Этим модель Венециано отличается от обычной теории поля для точечных частиц, в которой суммирование проводится сразу и по s -, и по t -канальным полюсам. Свойство дуальности применимо и к N -точечной функции. По этой причине раньше считалось, что полевая теория струн невозможна. Такая теория, как полагали, была бы подорвана повторным счетом, особенно в высших порядках.

претация дуальных моделей в рамках настоящей теории поля невозможна.

По аналогии со случаем точечных частиц начнем с определения N -точечной амплитуды рассеяния для рассеяния тахионов [11–13]:

$$\begin{aligned}
 A_N(k_1, k_2, \dots, k_N) &= \sum_{\text{топология}} \int d\mu_N \int Dg_{ab} \int DX \\
 &\quad \times \Delta_{\text{FP}} \exp i \int L d\sigma d\tau \left\{ \prod_{i=1}^N \sqrt{g} \exp ik_{i,\mu} X^{\mu} \right\} \\
 &= \sum_{\text{топология}} \int Dg_{ab} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^N \sqrt{g} \exp ik_{i,\mu} X^{\mu} \right\rangle. \quad (2.5.1)
 \end{aligned}$$

Это выражение и будет основным континуальным интегралом, из которого мы выведем теорию взаимодействующих струн. Оно будет единственной самой важной формулой в теории первичного квантования.

В этом выражении импульс k_i от тахиона i втекает через границу поверхности в точке z_i . Струнная переменная X^μ определена в этой точке z_i на границе, где импульс k_i втекает в диаграмму. Мера интегрирования $d\mu$ является интегралом по различным z_i , который мы вскоре определим.

Это выражение существенно упростится выбором конформной калибровки. В частности, мы получим

$$\begin{aligned} A_N &= \int d\mu \int DX \exp \left\{ \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int (\partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu) d^2z + i \sum_{i=1}^N k_{i\mu} X^\mu \right\} \\ &= \sum_{\text{топология}} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i \cdot X} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

На рис. 2.6 мы показываем, как упростить диаграмму взаимодействия струн. Позволив длине взаимодействия струн обратиться в нуль для внешних тахионов, мы видим, что поверхность взаимодействия струн может быть редуцирована к бесконечной горизонтальной полоске в комплексной плоскости, простирающейся от $\sigma = 0$ до $\sigma = \pi$ при τ , меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что действие, хотя уже не является репараметризационно инвариантным, поскольку мы фиксировали калибровку $g_{ab} = \delta_{ab}$, все еще сохраняет конформную инвариантность. Поэтому, чтобы избежать повторного счета конформно эквивалентных поверхностей, мы возьмем в качестве множества топологий, по которым нужно суммировать, множество всех конформно неэквивалентных двумерных комплексных поверхностей.

Пусть мировая поверхность N -точечного дерева представляет собой горизонтальную полосу шириной π в комплексной плоскости. Ось x соответствует τ , а ось y — переменной σ . Произведем замену переменных, перейдя к комплексной переменной z по формуле

$$z = e^{\tau + i\sigma}. \quad (2.5.3)$$

Это отображение переводит бесконечную полосу, представляющую мировую поверхность взаимодействующей струны (с тахионами нулевой ширины), в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости.

К счастью, функциональный интеграл является гауссовым, и его можно вычислить с помощью тождеств, приведенных в предыдущей главе. Определим $X_{\mu,cl}$ как решение классических уравнений движения:

$$\nabla^2 X_{\mu,cl} = -2i\pi\alpha' J_\mu, \quad (2.5.4)$$

где

$$J_\mu(z) = \sum_{i=1}^N k_{i\mu} \delta(z - z_i). \quad (2.5.5)$$

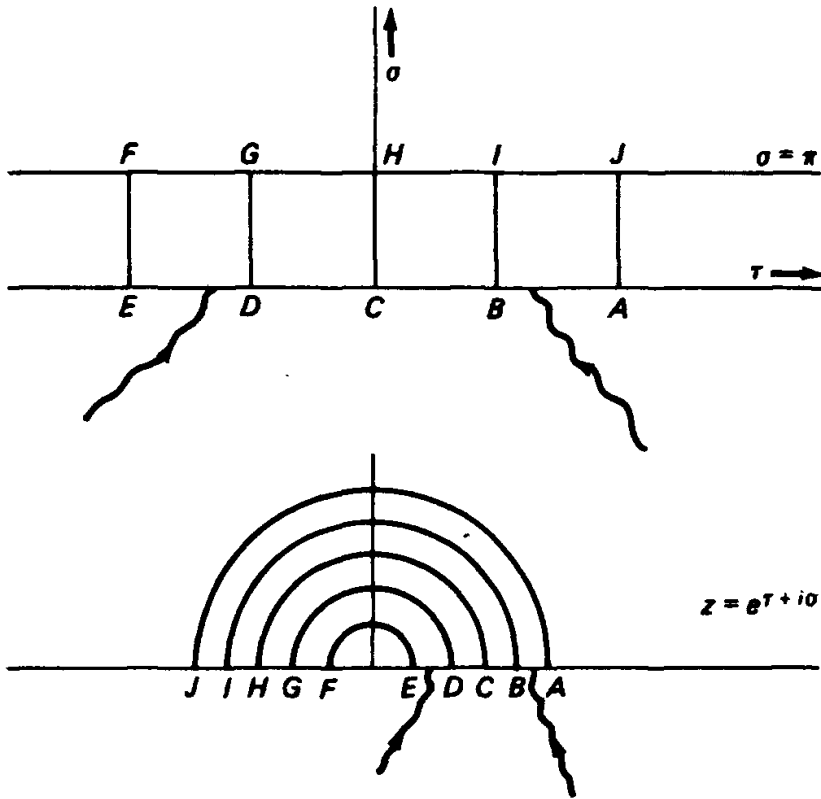


Рис. 2.6. Конформные поверхности для распространения открытых струн. В плоскости ρ струна распространяется по горизонтальной полосе шириной π . Волнистые линии у нижней границы — это струны «нулевой ширины», т.е. внешние тахионы. В плоскости z поверхность, по которой распространяются струны, превращается в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости. Отображение одной поверхности на другую дается экспоненциальной функцией.

Здесь z_i — точки вещественной оси на комплексной плоскости, соответствующие внешним тахионам нулевой ширины, взаимодействующим со струной. После виковского поворота по переменной τ это выражение превращается в уравнение Пуассона, известное в электростатике. Для его решения нужна функция Грина

$$\nabla^2 G(z, z') = 2\pi\delta(z - z'). \quad (2.5.6)$$

Нам нужно вычислить функцию Грина с граничными условиями Неймана для верхней полуплоскости. Простейший способ сделать это — воспользоваться приемом, заимствованным из электростатики, а именно методом изображений. Поместим точечный заряд в точку z' в верхней полуплоскости. Рассмотрим другой точечный заряд в точке \bar{z}' , являющийся зеркальным отражением точки z' относительно вещественной оси; \bar{z}' лежит в нижней полуплоскости. Если мы находимся на точечном заряде в точке z верхней полуплоскости, то потенциал в этой точке

пропорционален

$$G(z, z') = \ln|z - z'| + \ln|z - \bar{z}'|. \quad (2.5.7)$$

Заметим, что если мы находимся на оси x , так что z – вещественное число, то производная функции Грина, нормальная вещественной оси, равна нулю. Поэтому граничные условия в точности совпадают с теми, которые нам нужны, и, стало быть, в силу теоремы единственности это и есть искомая функция Грина для верхней полуплоскости.

Теперь мы можем подставить эту функцию Грина в наш интеграл. Классическое значение X , служащее решением уравнения (2.5.4), это

$$X_{cl} = i\alpha' \int G(z, z') J(z') dz'. \quad (2.5.8)$$

Сделаем теперь сдвиг переменной интегрирования:

$$X_\mu \rightarrow X_{\mu, cl} + X_\mu. \quad (2.5.9)$$

Итак, мы находим, что функциональные интегралы могут быть вычислены с помощью (1.7.10):

$$\begin{aligned} & \int DX \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu d^2z + i \int J_\mu X^\mu d^2z \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\alpha'}{2} \int J_\mu(z) G(z, z') J^\mu(z') dz dz' \right\} \\ &= \prod_{i \neq j} \exp \{ \alpha' k_i \cdot k_j \ln |z_i - z_j| \} \\ &= \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Здесь

$$J^\mu(z) = \sum_j \delta(z - z_j) k_j^\mu.$$

Собирая вместе все в выражении (2.5.2), находим

$$A_N = \int d\mu \prod_{1 \leq i < j \leq N} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \quad (2.5.11)$$

(Заметим, что мы явным образом удалили «самодействие» – член, в котором $i = j$; он был бы расходящимся. Можно обрезать интеграл и все же сохранить конформные свойства теории. Мы обнаружим, что это обрезание нужно проводить методом гармонических осцилляторов.)

Теперь нужно завершить последний шаг, а именно зафиксировать меру $d\mu$.

Первое предложение состоит в том, что если амплитуда выражена через z_i , то меру можно взять просто равной единице. Это правильный выбор, совместимый с конформной инвариантностью. Чтобы это доказать, вспомним, что выше мы утверждали необходимость суммировать

по всем конформно неэквивалентным поверхностям. Рассмотрим множество конформных преобразований, отображающих верхнюю полуплоскость на себя и таких, что вещественная ось также отображается на себя. Вообще говоря, точки вещественной оси, отображающиеся друг в друга, связаны некоторым подмножеством конформных преобразований, которые называются проективными преобразованиями, или преобразованиями Мебиуса:

$$y' = \frac{ay + b}{cy + d}. \quad (2.5.12)$$

Здесь a , b , c и d — вещественные числа, удовлетворяющие соотношению $ad - bc = 1$. Этот набор четырех параметров образует вещественную матрицу с единичным определителем:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

В общем случае группа, определяемая множеством всех вещественных матриц размера 2×2 с единичным определителем, есть группа $SL(2, R)$ (см. приложение). Заметим, что эта группа преобразований может быть порождена следующими последовательными преобразованиями:

$$\begin{cases} y \rightarrow y + b, \\ y \rightarrow ay, \\ y \rightarrow \frac{1}{y}. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Итак, мы хотим, чтобы амплитуда, включая вклад меры, была проективно инвариантной.

Сделаем проективное преобразование подынтегрального выражения, чтобы увидеть, как оно преобразуется:

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} = \prod_{i < j} (z'_i - z'_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \prod_k (a - cz'_k)^2. \quad (2.5.15)$$

Нам нужно, чтобы наша мера компенсировала неинвариантный член приведенного выше выражения. Возьмем в качестве меры число 1 и ограничим область интегрирования условием $z_i \geq z_{i+1}$. Осталась одна последняя трудность. Нам по-прежнему необходимо «фиксировать калибровку» для проективных преобразований, чтобы избежать повторного счета диаграмм. Мы должны интегрировать один и только один раз по каждой проективно отличной от других конфигураций переменных z_j . Если внешний импульс втекает в верхнюю полуплоскость в точках, задаваемых переменными z_i , то мы можем фиксировать три из этих точек произвольным образом. Это соответствует «фиксации калибровки» для проективной инвариантности, отбирающей только проективно неэквивалентные параметризации. Конечный результат дается фор-

мулой

$$d\mu = \frac{\theta(z_i - z_{i+1})}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N dz_i, \quad (2.5.16)$$

где мы явным образом устранили вклад от трех фиксированных точек $z_{a,b,c}$:

$$dV_{abc} = dz_a dz_b dz_c (z_a - z_b)^{-1} (z_b - z_c)^{-1} (z_c - z_a)^{-1}. \quad (2.5.17)$$

Здесь $z_{a,b,c}$ — три точки, произвольным образом выбранные на вещественной оси. Отметим, что мы фиксировали значения трех переменных, так что мы интегрируем только по проективно неэквивалентным конфигурациям. (Если бы мы интегрировали по этим трем переменным, то получился бы повторный счет по области интегрирования. Мы интегрировали бы по бесконечному числу копий одного и того же объекта.)

Простейший выбор этих трех фиксированных точек таков:

$$\begin{aligned} z_1 &= \infty, \\ z_2 &= 1, \\ z_N &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

При такой конфигурации наш окончательный результат для N -точечной амплитуды принимает вид [14–19]:

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \prod_{2 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j}, \quad (2.5.19)$$

где область интегрирования есть

$$\infty = z_1 \geq z_2 = 1 \geq z_3 \dots z_{N-1} \geq z_N = 0. \quad (2.5.20)$$

Это окончательный результат для N -точечной амплитуды, который мы получили, используя только функциональные методы.

Подытожим сделанное.

- (1) Мы взяли длины струн равными нулю для внешних тахионов, так что мировая поверхность N -точечной амплитуды превратилась в горизонтальную полосу на комплексной плоскости; ширина этой полосы равна π . Импульсы, вносимые внешними тахионами, втекают в эту полосу в заданных точках z_i , расположенных на вещественной оси (см. рис. 2.6).
- (2) Отобразив с помощью конформного преобразования эту полосу на верхнюю полуплоскость, мы в явном виде вычислили функцию Неймана, используя известный в электростатике прием–метод изображений.
- (3) Проектная инвариантность фиксирует интегральную меру равной числу 1. Мы упорядочили внешние точки условием $z_i \geq z_{i+1}$.
- (4) Мы «фиксировали калибровку», ограничив степени свободы, оставшиеся в рамках проективных преобразований, т. е. фиксировали три из N точек подынтегрального выражения.

Последнее выражение для N -точечной амплитуды (2.5.19) охватывает только случай, в котором внешние тахионы входят в мировую поверхность в выбранных точках на границе. В принципе на границе могут находиться частицы с произвольным спином. Для высоких спинов мы получим тот же самый множитель $e^{ik \cdot X}$, представляющий часть преобразования Фурье, умноженный на тензор поляризации высших спинов. Поэтому вертексная функция для тахиона на самом деле — не $e^{ik \cdot X}$, которая универсальна для всех спинов, поскольку является частью преобразования Фурье. Подлинная вертексная функция для тахиона — это просто число один.

Вертексы для спина 2 можно представить в виде

$$V = \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik \cdot X}, \quad (2.5.21)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — тензор поляризации. В общем случае

$$V = \sqrt{g} g^{a_1 a_2} \dots g^{a_{2m-1} a_{2m}} \partial_{a_1} X^{\mu_1}, \dots, \partial_{a_{2m}} X^{\mu_{2m}} \varepsilon_{\mu_1, \dots, \mu_{2m}} e^{ik \cdot X}. \quad (2.5.22)$$

§ 2.6. ОТ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА К ОПЕРАТОРАМ

Мы использовали для вычисления N -точечной амплитуды функциональные методы. Единственной нетривиальной частью вычисления было интегрирование по конформно неэквивалентным двумерным комплексным поверхностям, которое определяет меру интегрирования амплитуды.

То же самое вычисление можно выполнить с помощью формализма гармонических осцилляторов, который, как мы подчеркивали, является лишь специфическим представлением континуального интеграла, для которого гамильтониан диагонален. Для деревьев и первой петли метод гармонических осцилляторов весьма прост, поскольку гамильтониан диагонален на фокковском пространстве гармонических осцилляторов. Однако для высших петель это уже не так: метод гармонических осцилляторов становится все более трудоемким и непрактичным. Континуальный интеграл поэтому обеспечивает единственный систематический способ изучения амплитуд высших петель с относительной простотой. (Вычисление аномалий, однако, легче провести в формализме гармонических осцилляторов, где целочисленный индекс n служит параметром обрезания теории. В формализме континуального интеграла приходится использовать метод расщепления точки и другие способы регуляризации, как мы увидим в гл. 5.)

Мы знаем, что в функциональном формализме пропагатор для свободных струн дается формулой

$$\langle X_a \left| \int_0^\infty dt e^{-\tau H} \right| X_b \rangle = \langle X_a \left| \frac{1}{L_0 - 1} \right| X_b \rangle. \quad (2.6.1)$$

Подобным образом нам известно, что в результате вставки в конти-

нуальный интеграл полного набора промежуточных состояний вертексная функция i -го тахиона принимает вид

$$\langle X_a | e^{ik_\mu X^\mu} | X_b \rangle, \quad (2.6.2)$$

где

$$X_\mu^i = X_\mu(\sigma = 0, \tau = \tau_i). \quad (2.6.3)$$

Вследствие тождества

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1$$

мы можем исключить все континуальные интегралы из N -точечной функции и совершить переход от формализма континуального интеграла к формализму гармонических осцилляторов. Для примера начнем с выражения для N -точечной тахионной амплитуды в формализме континуального интеграла и подставим в него соответствующие формулы в терминах гармонических осцилляторов:

$$\begin{aligned} A_N &= \int DX d\mu e^{-S} \prod_{i=1}^N e^{ik_i X(\tau_i)} \\ &= \int d\mu e^{-S} \{ \dots e^{ik_j X(\tau_j)} | X_j \rangle \int DX_j \langle X_j | e^{ik_{j+1} X(\tau_{j+1})} \} \\ &= \int d\mu \{ \dots e^{ik_j X(0)} | X_j \rangle \int DX_j \langle X_j | e^{-(\tau_{j+1} - \tau_j)H} e^{ik_{j+1} X(0)} \} \\ &= \int \prod_i d\tau_i \langle 0, k_1 | e^{ik_2 X(0)} e^{-\tau_1 H} e^{ik_3 X(0)} \dots | 0, k_N \rangle \\ &= \langle 0, k_1 | V(k_2) DV(k_3) \dots V(k_{N-1}) | 0, k_N \rangle. \end{aligned}$$

Некоторые моменты в этом выводе требуют пояснения. Во-первых, в формализме континуального интеграла мы обнаруживаем необходимость исключить вклад члена с $i = j$ в подынтегральное выражение (2.5.10). Подобным образом нам также придется проделать обрезание в формализме гармонических осцилляторов. Выражение для вертексной функции (2.6.2) формально становится бесконечным при переходе к гармоническим осцилляторам. Например, если мы бесхитростно возьмем вакуумное среднее от экспоненты, то мы получим расходящуюся сумму. Нормально упорядоченное выражение – вот то, что нам нужно; его матричные элементы конечны. Возьмем экспоненциальную функцию от (2.2.11):

$$: \exp ik_\mu X^\mu(\sigma = 0, \tau_i) : = \exp \left\{ k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{n} e^{in\tau_i} \right\} e^{ik \cdot x(\tau_i)} \exp \left\{ -k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau_i} \right\}. \quad (2.6.4)$$

(Нормальное упорядочение состоит в переносе всех операторов рождения (уничтожения) налево (направо), чтобы матричные элементы получившегося оператора были конечными.)

Во-вторых, при переходе от континуальных интегралов к операторам мы использовали тот факт, что гамильтониан является генератором

сдвигов по τ . Выражение $L_0 - 1$ действует как эффективный гамильтониан для горизонтальных смещений в комплексной плоскости. Оказывается полезной следующая формула:

$$y^{L_0} f(\alpha_n) y^{-L_0} = f(\alpha_n y^{-n}) \quad (2.6.5)$$

для любой функции f . Так, мы можем определить

$$y^{L_0} V_0(k_i) y^{-L_0} = V(k_i, y_i = e^{-\tau_i}). \quad (2.6.6)$$

Мы использовали это выражение при переходе от континуальных интегралов к гармоническим осцилляторам, когда мы преобразовали вертексные функции в τ_i в вертексные функции в начале координат.

В-третьих, в приведенном выше выводе формализма гармонических осцилляторов мы ввели вакуумное состояние $|0, k\rangle$. Заметим, что функциональный формализм начинался с представления мировой поверхности взаимодействующих струн в виде бесконечной полосы шириной π , горизонтально расположенной на комплексной плоскости. Внешние линии располагались вдоль вещественной оси. Поэтому результат воздействия струны, приходящей из отрицательной (положительной) бесконечности, соответствует функциональному интегралу по полубесконечной полосе. Так, вакуумное состояние $|0\rangle$ есть функциональный интеграл теории струн по полубесконечной полосе. Мы можем представить тахионный вакуум с импульсом k следующим образом:

$$|0; k\rangle = e^{ik \cdot x} |0; 0\rangle, \quad (2.6.7)$$

где

$$\alpha_n |0; 0\rangle = 0; \quad n \geq 0. \quad (2.6.8)$$

Собирая все вместе, мы можем теперь преобразовать континуальный интеграл к виду, отвечающему формализму гармонических осцилляторов:

$$\begin{aligned} A_N &= \int d\mu \int DX e^{-S} \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \exp ik_i X^{\mu i} (\sigma = 0; \tau_i) \\ &= \langle 0; k_1 | V_0(k_2) DV_0(k_3) D \dots DV_0(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Важно понять, что выражение амплитуды через гармонические осцилляторы прямо следует из функционального формализма.

К счастью, эта амплитуда вычисляется несложно. В качестве упражнения сначала вычислим в явном виде четырехточечную функцию:

$$\begin{aligned} A_4 &= \langle 0; k_1 | V(k_2) DV(k_3) | 0; k_4 \rangle \\ &= \int_0^1 dx x^{k_3 \cdot k_4 - 1} \langle 0 | \exp \left\{ -k_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \right\} x^R \exp \left\{ k_3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right\} | 0 \rangle \\ &= \int_0^1 dx x^{-(1/2)s-2} (1-x)^{-(1/2)t-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \\
 &= B(-\alpha(s), -\alpha(t)).
 \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \alpha(s) &= 1 + \frac{1}{2}s, \\
 s &= -(k_1 + k_2)^2, \\
 t &= -(k_2 + k_3)^2, \\
 u &= -(k_1 + k_3)^2
 \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

суть переменные Манделстама, а R -оператор чисел заполнения: $R = \sum_{n=1}^{\infty} na_n^\dagger a_n$. Итак, четырехточечная амплитуда рассеяния имеет изящный вид; действительно, ее можно представить бета-функцией Эйлера. Данная функция обладает привлекательными физическими свойствами, впервые поразившими воображение специалистов по теоретическим проблемам высоких энергий в конце шестидесятых годов. Она была совершенно случайно обнаружена Венециано и Судзуки при поиске способа удовлетворить правилам конечности энергетических сумм для адронной S -матрицы. В то время теоретики стремились построить амплитуду рассеяния для адронов, отвечающую следующим критериям для S -матрицы, которые предложил Дж. Чу:

- (1) Унитарность.
- (2) Лоренц-инвариантность.
- (3) СРТ-инвариантность.
- (4) Аналитичность.
- (5) Кроссинг-симметрия.

К этому списку некоторые теоретики добавляли следующие критерии:

- (6) Реджевское поведение, т. е.

$$A(s, t) \sim s^{\alpha(t)} \tag{2.6.12}$$

для больших s при фиксированном t , а также

- (7) Дуальность, т. е.

$$A(s, t) = \sum_J \frac{c_J(t)}{s - M_J^2} = \sum_J \frac{c_J(s)}{t - M_J^2}. \tag{2.6.13}$$

Этот список «аксиом» для адронной S -матрицы оказался столь длинным, что физики не верили, что когда-либо удастся удовлетворить всем перечисленным выше критериям. Поэтому, когда бета-функция Эйлера была случайно обнаружена при перелистывании математического справочника, эти два молодых физика были удивлены тем, что эта аналити-

ческая функция удовлетворяла всем вышеприведенным аксиомам, кроме одной! Например, реджевское поведение можно показать с помощью формулы Стирлинга, аппроксимирующей Γ -функцию:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} \frac{x^x}{\sqrt{x}} e^{-x}. \quad (2.6.14)$$

Дуальность можно продемонстрировать также и другим способом, вычислив асимптотику полюсов подынтегрального выражения вблизи пределов интегрирования $x = 0$ и $x = 1$:

$$A(s, t) \sim \frac{1}{n!} \frac{(\alpha(t) + 1)(\alpha(t) + 2) \dots (\alpha(t) + n)}{\alpha(s) - n}. \quad (2.6.15)$$

Похожее выражение можно записать и для полюсов в t -каналах. Фактически можно удовлетворить всем постулатам, кроме первого (унитарности). (Унитарность нарушается по той простой причине, что амплитуда имеет ряд полюсов в плоскостях s и t . У настоящей унитарной амплитуды должны быть мнимые части вместо полюсов и разрезы вдоль вещественной оси, как будет показано в гл. 5.)

Теперь с помощью операторных методов можно вычислить N -точечную функцию. N -точечная амплитуда записывается в следующем виде (см. рис. 2.7):

$$\begin{aligned} A_N &= \langle 0; k_1 | V(k_2) D \dots V(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle \\ &= \int \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dx_i}{x_i} \langle 0; k_1 | V(k_2, 1) V(k_3, y_3) V(k_4, y_4) \dots V(k_{N-1}, y_{N-1}) | 0; k_N \rangle, \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

где

$$\begin{aligned} \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dx_i}{x_i} &= \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dy_i}{y_i}, \\ y_i &= x_3 x_4 \dots x_i. \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

(Заметим, что мы переносили множители при x^R направо, пока они не подвергнутся аннигиляции с вакуумом.) Проще всего упростить это выражение с помощью формализма когерентных состояний. Пусть произвольное состояние фоковского пространства представлено в виде

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle = e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle. \quad (2.6.18)$$

Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \langle \mu | \lambda \rangle &= e^{\mu^* \lambda}, \\ x^{a^\dagger a} | \lambda \rangle &= | x \lambda \rangle, \\ e^{\mu a^\dagger} | \lambda \rangle &= | \lambda + \mu \rangle. \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

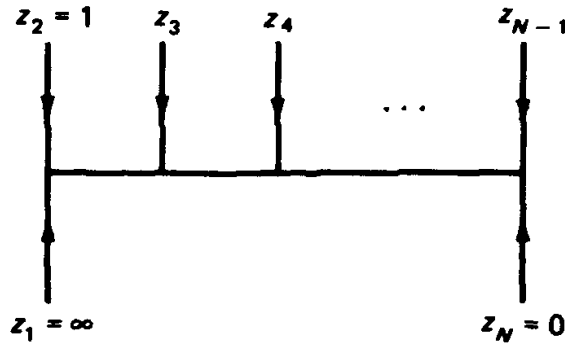


Рис. 2.7. N -точечная функция. Проективная инвариантность позволяет произвольным образом зафиксировать три из N переменных. Наиболее удобная параметризация — взять первую переменную равной бесконечности, вторую — единице, последнюю равной нулю, а все остальные упорядочить между 1 и 0.

Последовательно используя эти тождества, находим

$$\langle 0; k_1 \left| \prod_{i=2}^{N-1} \frac{V(k_i, y_i)}{y_i} \right| 0; k_N \rangle = \prod_{i < j} (y_i - y_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \quad (2.6.20)$$

Итак, мы получили то же самое выражение для N -точечной функции (2.5.19), которое было выведено ранее функциональными методами:

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dy_i \prod_{2 \leq i < j \leq N} (y_i - y_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \quad (2.6.21)$$

Здесь y_i упорядочены вдоль вещественной оси так же, как ранее. Заметим, что мы уже зафиксировали значения трех точек вдоль вещественной оси равными 0, 1 и ∞ , как и ожидалось.

Используя формализм гармонических осцилляторов, можно показать циклическую симметрию N -точечной функции, которая не очевидна, когда амплитуда записана как последовательность $V D V D V D V D V$. Мы применим следующее тождество, описывающее, что произойдет, если два вертекса пронести друг над другом (поменять местами):

$$V(k_1, y_1) V(k_2, y_2) = V(k_2, y_2) V(k_1, y_1) \exp[2\alpha' \pi i k_1 \cdot k_2 \varepsilon(y_1 - y_2)]. \quad (2.6.22)$$

Здесь $\varepsilon(x) = 1$, если $x > 0$, и $\varepsilon(x) = -1$, если $x < 0$.

Необходимо также переписать представление вакуума $|0; k_N\rangle$ в форме, в которой оно напоминает другие вертексы, чтобы можно было вычислить свойства амплитуды в отношении циклического переупорядочения вертексов. Мы получим следующие тождества:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{V(k, y)}{y} |0; 0\rangle = |0; k\rangle, \quad (2.6.23)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y V(k, y) = \langle k; 0 |.$$

При такой записи тахионные состояния в крайних левом и правом положениях больше не рассматриваются отличным от других способом. Крайний вертекс справа теперь определен в точке 0, крайний слева – на бесконечности, а все другие вертексы располагаются внутри этого интервала.

Итак, когда мы протолкнем вертекс N через все выражение для амплитуды, то получим

$$\langle V(k_1, y_1) \dots V(k_N, y_N) \rangle = \langle V(k_N, y_N) V(k_1, y_1) \dots V(k_{N-1}, y_{N-1}) \rangle \exp \left[2\alpha' i \pi k_N \cdot \sum_{i=1}^{N-1} k_i \varepsilon \right]. \quad (2.6.24)$$

Заметим, что последний множитель в этой формуле обратится в нуль, если импульс сохраняется, т. е.

$$\sum_{i=1}^N k_i = 0; \quad (2.6.25)$$

здесь мы использовали также условие массовой поверхности $\alpha' k_N^2 = 1$. Мы видим, что лишь на массовой поверхности амплитуда действительно является циклически симметричной. (Исторически это послужило еще одной причиной, по которой физики считали, что построение полевой теории струн, скорее всего, невозможно. По определению полевая теория формулируется вне массовой поверхности, тогда как чудесные свойства модели Венециано проявляются только на массовой поверхности.)

§ 2.7. ПРОЕКТИВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ТВИСТЫ

В дополнение к циклической симметрии мы утверждаем, что подынтегральное выражение N -точечной функции является инвариантным относительно преобразований Мёбиуса, т. е. функция останется той же самой, если сделать следующую замену переменных:

$$y' = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad (2.7.1)$$

где

$$ad - bc = 1. \quad (2.7.2)$$

Мы продемонстрировали эту инвариантность в функциональном формализме. Теперь непосредственно сделаем это преобразование Мёбиуса для матричных элементов гармонических осцилляторов:

$$\begin{aligned} & \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} | 0; 0 \rangle \\ & = \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y'_1)}{y'_1} \dots \frac{V(k_N, y'_N)}{y'_N} | 0; 0 \rangle \prod_{i=1}^N (a - cy'_i)^2. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Как мы видели выше, этот множитель можно сделать равным единице изменением меры:

$$d\mu \rightarrow d\mu \prod_i (a - cy'_i)^{-2}. \quad (2.7.4)$$

Оказывается, что можно действительно вычислить генератор таких инфинитезимальных преобразований вертексной функции. Нас не должно удивлять, что генератором этих преобразований Мёбиуса оказывается совокупность генераторов Вирасоро. Определим

$$\begin{aligned} T &= 1 - \varepsilon \sum_n \alpha_n L_n, \\ z &= z' + \varepsilon \sum_n \alpha_n z'^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} TV(k_i, z_i) T^{-1} &= (1 - \varepsilon \alpha' k_i^2 \sum_n n \alpha_n z'^n) V(k_i, z_i), \\ [L_n, V(k_i, z_i)] &= z'^n \left[z' \frac{d}{dz'} + n \alpha' k_i^2 \right] V(k_i, z_i). \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Мы будем говорить, что *конформный вес* вертекса V равен $\alpha' k_i^2$. (Конформный вес будет играть важную роль в доказательстве того факта, что струнная модель свободна от духов. В гл. 4 мы объясним происхождение конформного веса, который помечает неприводимые представления конформной группы, порождаемой элементами L_n алгебры Вирасоро. Чтобы вертексная функция была правильно определена, она должна иметь вес 1 на массовой поверхности, что справедливо для тахиона.)

Ясно, что L_n порождают конформные преобразования, действуя на вертексные функции. В самом деле, можно показать, что конкретное представление алгебры Вирасоро на конформных полях дается выражением

$$L_n = -z'^{n+1} \partial_{z'}.$$

Это представление удовлетворяет определению конформной алгебры (2.2.27) (за вычетом центрального члена) и порождает конформные преобразования функций комплексной переменной z .

Нас интересует подгруппа конформных преобразований, отображающих верхнюю полуплоскость на себя и вещественную ось на себя, т. е. проективная подгруппа. Эта подгруппа порождается только тремя элементами L_1, L_{-1}, L_0 , которые образуют $SL(2, R)$:

$$SL(2, R): \begin{cases} [L_1, L_0] = L_1, \\ [L_{-1}, L_0] = -L_{-1}, \\ [L_1, L_{-1}] = 2L_0. \end{cases} \quad (2.7.7)$$

Легко вычислить преобразование вертексной функции, индуцированное этими генераторами:

$$\begin{aligned} e^{aL_1} V(y) e^{-aL_1} &= V[y(1 - ay)^{-1}], \\ e^{bL_0} V(y) e^{-bL_0} &= V[e^b y], \\ e^{cL_{-1}} V(y) e^{-cL_{-1}} &= V(y + c). \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Если U служит элементом группы $SL(2, R)$, то мы также имеем

$$U|0; 0\rangle = |0; 0\rangle. \quad (2.7.9)$$

(На первый взгляд это может показаться удивительным, потому что нам известно, что реальные состояния уничтожаются элементом L_n при положительных, а не при отрицательных значениях n . Однако $|0; 0\rangle$ не является реальным состоянием. Оно уничтожается элементом L_{-1} , потому что

$$L_{-1}|0; 0\rangle \sim \alpha_0 \cdot \alpha_{-1}|0; 0\rangle = 0 \quad (2.7.10)$$

вследствие равенства $\alpha_0|0; 0\rangle$. Итак, $|0; 0\rangle$ соответствует истинному вакууму группы $SL(2, R)$, который не является реальным состоянием теории. Когда мы умножим $|0; 0\rangle$ на e^{ikx} , то оно станет реальным состоянием (поскольку x подчиняется коммутационным соотношениям с α_0) и будет уничтожаться элементом L_n для положительных n .)

Собрав все вместе, получим

$$\begin{aligned} \langle 0; 0| U^{-1} U \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} U^{-1} U |0; 0\rangle \\ = \langle 0; 0| \frac{V(k_1, y'_1)}{y'_1} \dots \frac{V(k_N, y'_N)}{y'_N} |0; 0\rangle \prod_{i=1}^N (a - cy'_i)^2, \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

что воспроизводит (2.7.3).

Кроме калибровочной группы Вирасоро, есть еще одна особенность теории струн, полностью отсутствующая в случае точечных частиц. Эта особенность – оператор твиста. Вспомним, что струна замечает двумерную мировую поверхность, а не просто одну линию. Поэтому если бы нам нужно было «перекрутить» мировую поверхность, то струна стала бы замечать топологически неэквивалентную мировую поверхность. На однопетлевом уровне, например, это решающее топологическое отличие диска с дыркой от листа Мёбиуса.

Простое выражение для оператора твиста Ω [20] можно вывести из следующего наблюдения: вертексная функция, расположенная на вещественной оси, должна превратиться в вертексную функцию, расположенную на верхней границе полосы. Это дает

$$\Omega V(\sigma = \pi) \Omega^{-1} = V(\sigma = 0). \quad (2.7.12)$$

Заметим, что единственное изменение вертексной функции при этом

преобразовании – то, что каждый осциллятор, находящийся на уровне n , умножается на $(-1)^n$. Поэтому оператор твиста должен иметь вид

$$\Omega = (-1)^{N+1}, \quad (2.7.13)$$

где

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n\mu} \alpha_n^{\mu}. \quad (2.7.14)$$

Заметим, что он удовлетворяет тому соотношению, которому он должен по смыслу удовлетворять:

$$\Omega^2 = 1. \quad (2.7.15)$$

Это определяет оператор твиста с точностью до знака. Однако поскольку N четных состояний четны относительно зарядового сопряжения, а N нечетных состояний нечетны относительно C , то это фиксирует значение Ω , выбранное в этом выражении.

Существует эквивалентный метод вывода формы оператора твиста. Заметим, что действие оператора твиста на дерево будет состоять в обращении ориентации внешних линий (см. рис. 2.8):

$$\Omega V_0(k_1) DV_0(k_2) \dots V_0(k_{N-1}) |0; k_N\rangle \approx V_0(k_N) DV_0(k_{N-1}) \dots V_0(k_2) |0; k_1\rangle. \quad (2.7.16)$$

Видим, что циклическое упорядочение дерева оказалось обращено применением оператора твиста. Чтобы извлечь оператор, выполняющий это обращение, сначала запишем данное выражение через переменные y :

$$\Omega \int \prod_{i=2}^{N-1} dy_i V_0(k_1, y_1) \dots V_0(k_N, y_N) |0; 0\rangle. \quad (2.7.17)$$

Здесь мы перешли к пределу $y_1 \rightarrow 1$ и $y_N \rightarrow 0$.

В этой записи становится очевидным, что можно обратить циклическое упорядочение амплитуды и поменять местами y_1 и y_N заменой переменных

$$y'_i = 1 - y_i.$$

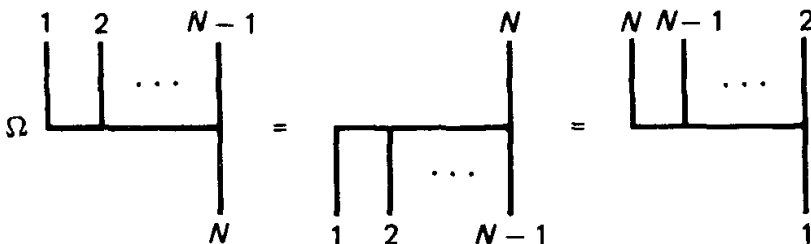


Рис. 2.8. Действие оператора твиста. Оно равносильно перевороту всей диаграммы вверх ногами, но в силу дуальности мы всегда можем переписать диаграмму, вернув ее к исходной конфигурации (с перенумерованными внешними линиями).

Теперь выпишем оператор, осуществляющий такую замену переменных. Выше были приведены генераторы группы $SL(2, R)$, дающей проективное преобразование вертексной функции. Изучив эту замену переменных, мы легко находим, что оператор твиста должен даваться выражением

$$\Omega = (-1)^R e^{-L-1}. \quad (2.7.18)$$

Хотя эти две формы оператора твиста кажутся совершенно различными, они на самом деле совпадают на массовой поверхности. Поскольку амплитуда Венециано определена строго на массовой поверхности, мы можем свободно выбирать любую из этих двух форм оператора твиста.

§ 2.8. ЗАМКНУТЫЕ СТРУНЫ

До сих пор наше обсуждение было применимо лишь для открытых струн, для которых внешние тахионы прикреплялись к конечным точкам конформной полосы, заматаемой струной. Полюсы появляются в модели Венециано, когда две точки z_i и z_j , расположенные на краю полосы, близко подходят друг к другу. Теперь рассмотрим модель Шапиро-Вирасоро, основанную на замкнутых, а не на открытых струнах и соответствующую континуальному интегралу, взятому по трубке (или сфере), заматаемой замкнутой струной. Структура полюсов этой модели намного обширнее исходной функции Венециано, поскольку внешние состояния могут прикрепляться в любом месте поверхности трубки при ее движении в пространстве-времени [21]:

$$A(s, t, u) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha(s)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha(t)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha(u)\right)}{\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(t) + \alpha(u))\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(u) + \alpha(s))\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(s) + \alpha(t))\right]}. \quad (2.8.1)$$

Эта функция, в отличие от описанной выше функции Венециано, имеет полюса одновременно во всех *трех* каналах, а не лишь в двух. Это выражение легко обобщить, чтобы получить N -точечную функцию:

$$A_N = \int d\mu \prod_{2 \leq i < j \leq N} |z_i - z_j|^{(1/2)k_i \cdot k_j}, \quad (2.8.2)$$

где

$$d\mu = |z_a - z_b|^2 |z_b - z_c|^2 |z_c - z_a|^2 \frac{\prod_{i=1}^N d^2 z_i}{d^2 z_a d^2 z_b d^2 z_c}. \quad (2.8.3)$$

Как и в случае функции Венециано, полюсы этой амплитуды появляются при сближении двух переменных z_i и z_j , но теперь полюсы могут

встретиться в любой точке комплексной плоскости, а не только на вещественной оси.

Наша исходная точка при квантовании замкнутой струны — это выражения (2.2.21), дающие разложения струнной переменной и сопряженной ей переменной по нормальным модам. Канонические коммутационные соотношения остаются теми же, что в (2.2.7), что приводит к гамильтониану (2.2.22). Как и в случае открытой струны, мы можем разложить амплитуду на вертексы и пропагаторы в формализме гармонических осцилляторов, но появится несколько важных отличий.

- (1) Теперь у нас будет два набора взаимно коммутирующих гармонических осцилляторов α_n и $\tilde{\alpha}_n$, по которым нужно вести суммирование, а не один набор, как в случае открытой струны.
- (2) Условия Вирасоро теперь состоят из двух наборов конформных генераторов L_n и \tilde{L}_n , действующих на физические состояния:

$$L_n |\varphi\rangle = \tilde{L}_n |\varphi\rangle = 0, \quad (2.8.4)$$

$$(L_0 - 1) |\varphi\rangle = (\tilde{L}_0 - 1) |\varphi\rangle = 0.$$

- (3) Нам придется интегрировать по всем сдвигам переменной σ , так как состояния замкнутой струны должны быть независимы от выбора точки отсчета переменной σ .
- (4) Амплитуда не является просто последовательным произведением вертексов и пропагаторов. Поскольку внешние линии могут возникнуть повсюду в комплексной плоскости, необходимо суммировать по всем различным упорядочениям внешних линий.
- (5) Фиксация веса вертексной функции равным 1 и применение соображений сокращения аномалий показывают, что интерсепт для замкнутой струны должен быть равен 2, а $\alpha'k^2 = 2$; это значит, что теория с необходимостью содержит безмассовый гравитон. Фактически линеаризованная общековариантная калибровочная симметрия общей теории относительности возникает просто как низший порядок калибровочной симметрии Вирасоро (подробнее об этом будет говориться в гл. 7).

Начнем с обсуждения пропагатора:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z| \leq 1} z^{L_0 - 2} \tilde{z}^{\tilde{L}_0 - 2} d^2z \\ &= \frac{\sin \pi (L_0 - \tilde{L}_0)}{\pi (L_0 - \tilde{L}_0)} \frac{1}{L_0 + \tilde{L}_0 - 2}. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

На самом деле это выражение имеет простую физическую интерпретацию. Заметим, что множитель, содержащий разные L в знаменателе, есть просто обычный пропагатор замкнутой струны. Однако функция, содержащая синусы, равна нулю, кроме случая

$$L_0 = \tilde{L}_0. \quad (2.8.6)$$

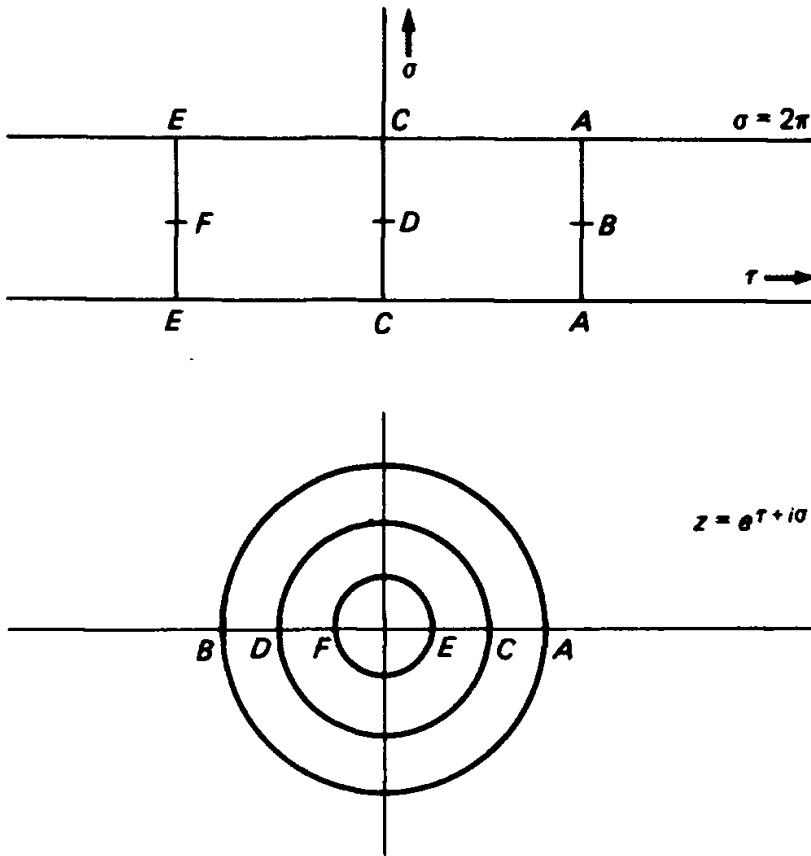


Рис. 2.9. Конформные поверхности для распространения замкнутых струн. В плоскости ρ струна распространяется по горизонтальной полосе шириной 2π с отождествленными верхней и нижней границами, что топологически эквивалентно трубке. В отличие от случая открытой струны, внешние линии прикрепляются не на границе, а во внутренних точках поверхности. В плоскости z эта поверхность переводится экспоненциальным отображением на всю комплексную плоскость.

Это можно представить в виде

$$\int d\sigma \exp i2\pi\sigma (L_0 - \tilde{L}_0). \tag{2.8.7}$$

Оператор (2.8.7) можно интерпретировать двояко. Если явным образом выполнить интегрирование, мы получим оператор $\delta(L_0 - \tilde{L}_0)$. Это оператор проектирования, действующий на полное гильбертово пространство и уничтожающий состояния $|\varphi\rangle$, не удовлетворяющие условию $(L_0 - \tilde{L}_0)|\varphi\rangle = 0$. С другой стороны, заметим, что этот оператор порождает сдвиг переменной σ на один полный цикл, так что такой пропагатор просто выражает тот факт, что при движении замкнутой струны нужно интегрировать по одному полному циклу. Амплитуда замкнутой струны поэтому не зависит от выбора начала отсчета параметра σ . (Это ограничение будет иметь важные последствия при обсуждении компактификации замкнутой и гетеротической струн в последующих главах.)

На рис. 2.9 мы видим, что мировая поверхность первоначально представляет собой горизонтальную полосу в комплексной плоскости шириной 2π , у которой верхняя и нижняя горизонтальные границы отождествлены (она образует длинную горизонтальную трубку). Внешние тахионные линии могут входить в эту трубку изнутри. Мы видим также, что экспоненциальным преобразованием этих координат можно отобразить такую горизонтальную трубку на всю комплексную плоскость.

Как и прежде, вертексная функция снова дается выражением $:e^{ikX}$, где струна X определена в той точке комплексной плоскости, в которой входит внешний импульс. Поскольку два набора гармонических осцилляторов коммутируют, то вертексная функция превращается в произведение двух вертексных функций открытой струны. Окончательное выражение для N -точечной амплитуды рассеяния тахионов дается формулой [22, 23]

$$A_N = \sum_{\text{перестановки}} \langle 0; k_1 | V(k_2) D \dots V(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle. \quad (2.8.8)$$

Суммирование по всем возможным перестановкам порядка внешних линий гарантирует, что переменные z_i могут свободно блуждать по комплексной плоскости.

§ 2.9. УНИЧТОЖЕНИЕ ДУХОВ

Мы разработали формализм гармонических осцилляторов посредством формализма Гупты–Блейлера. В конформной калибровке теория сохраняет явную лоренц-инвариантность и фактически становится теорией, построенной на свободных полях. Это объясняет тот факт, что теория на древесном уровне записывается весьма просто.

Цена, которую приходится платить за эту простоту, состоит, однако, в том, что связи Вирасоро должны быть наложены непосредственно на гильбертово пространство, чтобы уничтожить духи.

В общем случае доказательство того, что духовые состояния не взаимодействуют с древесными диаграммами, весьма просто. (Это доказательство неприменимо к петлевым диаграммам, для которых необходимо проявить предельную осторожность, чтобы духовые состояния были уничтожены надлежащим образом.) Определим реальное физическое состояние как такое, которое удовлетворяет связям Гупты–Блейлера:

$$L_n |R\rangle = 0; \quad n > 0, \quad [L_0 - 1] |R\rangle = 0. \quad (2.9.1)$$

Шпурионное состояние определим как невзаимодействующее с физическими:

$$\langle S | R \rangle = 0. \quad (2.9.2)$$

Такое состояние удобно представить в виде

$$|S\rangle = L_{-n}|\chi\rangle \quad (2.9.3)$$

для некоторого состояния χ . Теперь мы хотим показать, что эти шпурионные состояния не взаимодействуют с деревьями, т. е.

$$\langle S | \text{Дерево} \rangle = 0. \quad (2.9.4)$$

Для этого нам потребуются еще два тождества:

$$[L_n - L_0 - n + 1] V_0 = V_0 [L_n - L_0 + 1], \quad (2.9.5)$$

$$[L_n - L_0 + 1] \frac{1}{L_0 - 1} = \frac{1}{L_0 + n - 1} [L_n - L_0 - n + 1].$$

(Это легко показать на основании равенств (2.7.6), которые в свою очередь решающим образом зависят от того, что вертексная функция имеет конформный вес 1, если внешние тахионы удовлетворяют условию $\alpha'k^2 = 1$. Тем самым ограничение на конформный вес вертексной функции играет центральную роль в уничтожении всех духовых состояний теории.)

Из этих двух тождеств легко выводится

$$[L_n - L_0 - n + 1] V_0 D V_0 D \dots V_0 |0\rangle = 0. \quad (2.9.6)$$

Это и есть нужный нам результат. Он показывает, что операторы L можно проталкивать вправо до тех пор, пока они не будут аннигилированы вакуумом.

В итоге мы показали, что шпурионные состояния не взаимодействуют с деревьями:

$$L_n |\text{Дерево}\rangle = 0 \rightarrow \langle S | \text{Дерево} \rangle = 0. \quad (2.9.7)$$

Это значит, что нам не нужно делать какие-либо специальные изменения в функционале для древесных амплитуд с целью учесть присутствие духов. Духовые состояния, распространяющиеся внутри древесной амплитуды, автоматически взаимно уничтожаются. Однако мы обнаруживаем, что петлевые функции действительно наталкиваются на трудности, вызванные внутренним распространением духов. Причина в том, что

$$\langle S | \text{Дерево} | S \rangle \neq 0. \quad (2.9.8)$$

Если бесхитростно пройти по деревьям, чтобы получить петли, мы неизбежно включим присутствие духов, которое может быть выделено в явном виде:

$$A_{\text{петли}} = \sum_n \langle n | \text{Дерево} | n \rangle. \quad (2.9.9)$$

Сумма по $|n\rangle$ явным образом содержит духовые состояния.

То, что духи не взаимодействуют с деревьями и вносят вклад лишь

в петлевые диаграммы, в точности эквивалентно тому, что наблюдается в случае теории Янга–Миллса. Вклад духов Фаддеева–Попова в теорию Янга–Миллса вносится не в деревья, а в петли. Этот вклад (см. (1.9.30)) таков:

$$\bar{c}\partial_\mu D^\mu(A)c. \quad (2.9.10)$$

Заметим, что это дает следующее взаимодействие калибровочного поля A с духовым полем c :

$$L_I \sim \bar{c}Ac. \quad (2.9.11)$$

Такое взаимодействие означает, что одиночный дух не может взаимодействовать с древесной диаграммой, состоящей из калибровочных полей. Он может вносить вклад только в петли, где поля могут циркулировать по диаграмме. Поэтому особое внимание требуется для того, чтобы гарантировать взаимное погашение духов Фаддеева–Попова и состояний с отрицательной метрикой.

Доказать, что условия Вирасоро полностью уничтожают все возможные духовые состояния, — это, однако, предельно сложная задача. В принципе, способность перейти к калибровке светового конуса обычно достаточна для доказательства того, что теория свободна от духов. Но никогда нельзя быть уверенным, что квантование не внесет аномалий, разрушающих это положение. Поэтому становится важной непосредственная проверка отсутствия духов в фоковском пространстве для формализма Гупты–Блейлера. Существуют два независимых доказательства этой теоремы [24, 25], и оба не слишком просты. Следующее ниже обсуждение читатель может пропустить.

Чтобы не затемнять смысла многочисленными подробностями, сначала вкратце опишем стратегию уничтожения духов. Построим набор физических операторов V_m^i и \bar{V}_m^- , таких, что

(1) они коммутируют с генераторами алгебры Вирасоро:

$$[L_n, V_m^i] = 0, \quad [L_n, \bar{V}_m^-] = 0; \quad (2.9.12)$$

(2) V_n^i и \bar{V}_n^- порождают физическое гильбертово пространство:

$$|\text{физ}\rangle = V_{n_1}^{\mu_1} V_{-n_2}^{\mu_2} \dots V_{-n_N}^{\mu_N} \bar{V}_{-m_1}^- \dots \bar{V}_{-m_P}^- |0; p_0\rangle; \quad (2.9.13)$$

состояния этого пространства имеют или положительную, или нулевую норму, но не могут иметь отрицательной нормы.

Исходное фоковское пространство D -мерных гармонических осцилляторов должно быть эквивалентно множеству состояний, порождаемому этими $(D - 2)$ -мерными поперечными операторами, отрицательными составляющими этих осцилляторов и исходными операторами Вирасоро:

$$\{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-, L_{-n}\}. \quad (2.9.14)$$

Операторы L_{-n} порождают духовые состояния, так что если взять только состояния V_{-n}^+ и V_{-n}^- , мы получим правильные, не содержащие духов состояния. Это и будет нужный нам уничтожающий духи результат, который мы хотим теперь доказать.

Сначала определим

$$A_n^i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^i(nk_0, \tau) d\tau, \quad (2.9.15)$$

где

$$V^i(nk_0, \tau) = \dot{X}^i e^{ink_0 X^i(\tau)}, \quad (2.9.16)$$

а k_0 - нулевой вектор:

$$\begin{cases} k_0^2 = 0, \\ k_0^- = -1, \\ k_0^+ = k_0^i = 0. \end{cases} \quad (2.9.17)$$

Мы можем рассматривать этот вертексный оператор в качестве вертекса для вставки безмассовой векторной частицы. Этот специальный вид вертексной функции был выбран по следующей причине. Заметим, что поскольку k_0 - нулевой вектор, то коммутационные соотношения генераторов алгебры Вирасоро с этим вертексным оператором будут следующими:

$$[L_m, V(\tau)] = -i \frac{d}{d\tau} (e^{im\tau} V(\tau)). \quad (2.9.18)$$

Заметим, что это выражение представляет собой полную производную. Проинтегрировав ее по окружности, немедленно получаем

$$[L_m, A_n^i] = 0. \quad (2.9.19)$$

Итак, мы выбрали такую форму вертексной функции, чтобы удовлетворить первому критерию: все A коммутируют с генераторами алгебры Вирасоро. До сих пор, однако, у нас не было иных ограничений на k_0 , кроме того, что это должен быть нулевой вектор. Нужно наложить дополнительные ограничения, чтобы выполнялось второе условие.

Начнем с вектора импульса p_0 основного состояния, такого, что p_0 и k_0 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha' p_0^2 &= 1, \\ k_0 \cdot p_0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.9.20)$$

Теперь применим вертексный оператор A_n^i к вектору состояния $|0; p_0\rangle$. В результате получим состояние с импульсом $p_0 + nk_0$. Мы хотим, чтобы это состояние удовлетворяло также условию массовой поверхно-

сти. Вследствие этого мы требуем

$$\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}(p_0 + nk_0)^2 = -1 - n. \quad (2.9.21)$$

Итак, мы требуем, чтобы вектор импульса k_0 был нулевым состоянием, чтобы вертексный оператор коммутировал с генераторами алгебры Вирасоро и чтобы $k_0 \cdot p_0 = 1$ (с целью породить дополнительные поперечные состояния на массовой поверхности при действии на основное состояние).

Теперь мы должны полностью реализовать последнее условие, а именно, что эти операторы действительно образуют целое физическое пространство состояний. Здесь имеются некоторые трудности. На первый взгляд можно ожидать, что отрицательные моды могут быть порождены взятием ковариантного аналога значения k_0 . Поскольку конформный спин произведения операторов обычно является просто их суммой, то можно ожидать, что так оно и есть. Но на самом деле мы обнаруживаем, что нормальное упорядочение разрушает эту ситуацию и отрицательные составляющие не коммутируют с генераторами алгебры Вирасоро:

$$[L_n, : \dot{X}^- e^{inX^+} :] = e^{im\tau} \left(-i \frac{d}{d\tau} + m \right) : \dot{X}^- e^{inX^+} : + \frac{1}{2} nm^2 e^{im\tau + inX^+}. \quad (2.9.22)$$

Чтобы преодолеть эту трудность, в определение вертексной функции нужно добавить дополнительное слагаемое. Полное определение теперь имеет вид

$$V^\mu(k, \tau) = : \dot{X}^\mu : e^{ik \cdot X} + \frac{1}{2} ik^\mu \frac{d}{d\tau} (\log k \cdot \dot{X}) e^{ik \cdot X}. \quad (2.9.23)$$

Можно показать, что такая комбинация имеет конформный спин единица и сводится, если взять поперечные составляющие, к предыдущему выражению после его интегрирования.

Теперь найдем коммутатор этих полей:

$$[V_m^\mu, V_n^\nu] = nk_0^\mu V_{m+n}^\nu - mk_0^\nu V_{m+n}^\mu + C_m^{\mu\nu} \delta_{m,-n}, \quad (2.9.24)$$

где

$$C_m^{\mu\nu} = 2m^3 k_0^\mu k_0^\nu + m\eta^{\mu\nu}. \quad (2.9.25)$$

Это позволяет записать

$$\begin{aligned} V_m^+ &= \delta_{m,0}, \\ [V_m^i, V_n^j] &= m\delta_{ij}\delta_{m,-n}, \\ [V_m^-, V_n^i] &= -nV_{m+n}^i, \\ [V_m^-, V_n^-] &= (m-n)V_{m+n}^- + 2m^3\delta_{m,-n}. \end{aligned} \quad (2.9.26)$$

Заметим, что составляющие с индексом «плюс» исследуются тривиально

и что коммутационные соотношения поперечных операторов в точности те же, что у обычных гармонических осцилляторов. Теперь снова переопределим моды с индексом «минус»:

$$\bar{V}_n^- = V_n^- - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} : V_m^i V_{n-m}^i :. \quad (2.9.27)$$

Собирая все вместе, получаем окончательные коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [V_m^i, V_n^j] &= m \delta^{ij} \delta_{m, -n}, \\ [\bar{V}_m^-, V_n^i] &= 0, \\ [\bar{V}_m^-, \bar{V}_n^-] &= (m - n) \bar{V}_{m+n}^- + \frac{26 - D}{12} m^3 \delta_{m, -n}, \\ [L_n, \bar{V}_m^-] &= [L_n, V_m^i] = 0. \end{aligned} \quad (2.9.28)$$

Это окончательный набор коммутационных соотношений. Заметим, что новые операторы \bar{V}_m^- коммутируют с исходными операторами V_m^i и оба этих набора коммутируют с генераторами алгебры Вирасоро. Таким образом, мы теперь построили новое гильбертово пространство линейно независимых операторов, которое можно использовать для замены исходного фоковского пространства:

$$\{a_{-n}^\mu\} \rightarrow \{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-, L_{-n}\}. \quad (2.9.29)$$

Физическое гильбертово пространство, таким образом, порождается операторами $\{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-\}$, которые эквивалентны операторам [26], которые порождают физическое пространство в калибровке светового конуса. Далее, мы знаем, что следующее состояние имеет нулевую норму:

$$\bar{V}_{-n_1}^- \bar{V}_{-n_2}^- \dots \bar{V}_{-n_N}^- |0\rangle. \quad (2.9.30)$$

Это можно проверить, взяв норму этого состояния и используя коммутационные соотношения операторов \bar{V}_n^+ . Тем самым мы получаем окончательное утверждение: множество состояний, порождаемое набором

$$\{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-\}, \quad (2.9.31)$$

характеризуется тем, что эти состояния имеют либо положительную, либо нулевую норму, но не могут иметь отрицательной нормы. Этим завершается доказательство того, что условия Вирасоро полностью устраняют духи из гильбертова пространства.

§ 2.10. РЕЗЮМЕ

Первично квантованная теория струн обладает замечательным сходством с теорией точечных частиц, отличаясь от нее главным образом нетривиальным добавлением калибровочных симметрий, представляю-

ших репараметризационную инвариантность мировой поверхности. Как и в теории точечных частиц (см. (1.4.16)), у нас имеется три эквивалентные формы действия для струны:

Форма 1-го порядка (гамильтонова):

$$L = P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha' \lambda \left[P_\mu^2 + \frac{X'^2}{(2\pi\alpha')^2} \right] + \rho P_\mu X'^\mu \\ \sim \sqrt{g} P_\mu^a g_{ab} P^{b\mu} + P^{a\mu} \partial_a X_\mu \sqrt{g/\pi\alpha'}. \quad (2.10.1)$$

Форма 2-го порядка: $L = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu$.

Нелинейная форма: $L = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{X}_\mu^2 X'^2 - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2)^{1/2}$.

Вкратце перечислим черты сходства случая точечных частиц и теории струн, выраженные на языке континуального интеграла:

$$\begin{aligned} x_\mu(\tau) &\rightarrow X_\mu(\sigma, \tau), \\ \text{Длина} &\rightarrow \text{Площадь}, \\ Dx &= \prod_{\substack{\mu, \tau \\ x_j}} dx_\mu(\tau) \rightarrow DX = \prod_{\substack{\mu, \tau, \sigma \\ X_j}} dX_\mu(\sigma, \tau), \\ \int_{x_i}^{x_j} Dx e^{i\int L(x) dt} &\rightarrow \int_{X_i}^{X_j} DX e^{i\int L(X) d\sigma dt}, \\ \langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i x^i} \rangle &\rightarrow \langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i X^i} \rangle, \\ \text{Граф} &\rightarrow \text{Многообразие}, \\ p^2 + m^2 = 0 &\rightarrow \left(p_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Наша стратегия квантования действия струны такова: выписать симметрии теории, извлечь из них токи, вычислить алгебру, которой эти токи подчиняются, а затем применить их к гильбертову пространству, чтобы уничтожить духи. Стратегия, которой мы следуем всюду в этой книге, это

Действие \rightarrow Симметрия \rightarrow Токи \rightarrow Алгебра \rightarrow Связи \rightarrow Унитарность.

Все три формы действия обладают репараметризационной симметрией, которая порождает алгебру Вирасоро:

$$L_n = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \left[P_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'} \right]^2. \quad (2.10.2)$$

Алгебра, порождаемая этими операторами, есть

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{D}{12} (n^3 - n) \delta_{n, -m}. \quad (2.10.3)$$

Как и в случае точечной частицы, существует три способа квантования теории.

Квантование Гупты–Блейлера

В формализме Гупты–Блейлера мы фиксируем калибровку

$$g_{ab} = \delta_{ab} \quad (2.10.4)$$

и полученное действие нарушает репараметризационную инвариантность, но сохраняет инвариантность относительно подгруппы конформных преобразований:

$$L = \frac{1}{2\pi} (\dot{X}_\mu^2 - X_\mu'^2). \quad (2.10.5)$$

Этот лагранжиан, конечно, допускает распространение духовых состояний с отрицательной метрикой, связанных с времениподобной модой переменной X . Чтобы их уничтожить, в методе квантования Гупты–Блейлера постулируется, что векторы состояний должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} L_n |\varphi\rangle &= 0; \quad n > 0, \\ (L_0 - 1) |\varphi\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

Это значит, что ограничения строятся таким образом, чтобы они обращались в нуль на гильбертовом пространстве.

Хотя действие в этом формализме выглядит весьма изящно, но за это приходится расплачиваться: уничтожение духов на векторах состояния довольно затруднительно, особенно для петлевых диаграмм. Фактически необходим обширный математический аппарат, чтобы доказать возможность полного уничтожения духов в этой калибровке.

Квантование в переменных светового конуса

В рамках этого формализма положим

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau. \quad (2.10.7)$$

Преимущество этого подхода – возможность устранить все избыточные духовые моды с самого начала, рассматривая только поперечные составляющие. Недостаток его в том, что формализм неуклюж и мы должны на каждом шаге заново устанавливать лоренц-инвариантность. Удивительная особенность – то, что лоренцевы генераторы теории с нарушенной симметрией образуют замкнутую систему только в 26 измерениях. Конкретнее, трудность представляет коммутатор

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha'_{-n} \alpha_n^j - \alpha'^j_{-n} \alpha_n^i] \Delta_n, \quad (2.10.8)$$

где

$$\Delta_n = \frac{n}{12}(26 - D) + \frac{1}{n} \left[\frac{D - 26}{12} + 2 - 2a \right]. \quad (2.10.9)$$

Чтобы этот коммутатор обратился в нуль, должно выполняться

$$D = 26; \quad a = 1. \quad (2.10.10)$$

Квантование BRST

Метод BRST сочетает лучшие черты обоих предыдущих. Лоренц-ковариантность действия сохраняется, но состояния с отрицательной метрикой нас больше не беспокоят, так как они взаимно уничтожаются духами, циркулирующими в теории из-за детерминанта Фаддеева-Попова. Беря экспоненту от этого определителя, мы должны ввести два антикоммутирующих духовых поля b и c . Полученное в результате действие с фиксированной калибровкой все еще обладает остаточной симметрией, порождаемой BRST-зарядом

$$Q = C_0(L_0 - a) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-n}L_n + L_{-n}c_n] - \frac{1}{2} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} :c_{-m}c_{-n}b_{n+m}:(m-n). \quad (2.10.11)$$

Фиксация

$$Q^2 = 0 \quad (2.10.12)$$

задает значение интерсепта, равное единице, и размерность пространства-времени, равную 26. Физические состояния теории определяются условием

$$Q|\text{физ}\rangle = 0. \quad (2.10.13)$$

Как и в теории точечных частиц, взаимодействия вводятся суммированием по всем топологически различным конфигурациям в континуальном интеграле. Основополагающее функциональное уравнение для теории со взаимодействиями, из которого выводятся все результаты этой главы, дается формулой

$$\begin{aligned} A_N(k_1, k_2, \dots, k_N) &= \sum_{\text{топология}} \int d\mu_N \int Dg_{ab} \int DX \\ &\quad \times \Delta_{\text{FP}} \exp i \int L d\sigma d\tau \left\{ \prod_{i=1}^N \sqrt{g} \exp ik_{i,\mu} X^{\mu i} \right\} \\ &= \sum_{\text{топология}} \int Dg_{ab} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^N \sqrt{g} \exp ik_{i,\mu} X^{\mu i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

Эту амплитуду можно вычислить в явном виде в конформной ка-

либровке, используя тождество

$$\int DX \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \partial_z X_\mu \partial_z X^\mu d^2z + i \int J_\mu X^\mu d^2z \right\} \\ = \exp \left\{ \frac{\alpha'}{2} \int J_\mu(z) G(z, z') J^\mu(z') dz dz' \right\} = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \quad (2.10.15)$$

В конформной калибровке сумма по топологиям дается суммой по всем *конформно неэквивалентным* конфигурациям. Если мы рассмотрим конформные преобразования, отображающие верхнюю полуплоскость на себя и вещественную ось на себя, то точки вещественной оси отображаются согласно проективной группе преобразований $SL(2, R)$:

$$y' = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad (2.10.16)$$

где коэффициенты вещественны и удовлетворяют условию $ad - bc = 1$. Это фиксирует меру $d\mu$, так что формула для N -точечной функции принимает вид

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \prod_{2 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j}, \quad (2.10.17)$$

где z упорядочены вдоль вещественной оси.

Переход к формализму гармонических осцилляторов нетруден, так как в конформной калибровке гамильтониан диагонален на фоковском пространстве осцилляторных мод. Пропагатор перехода от конфигурации X_a к X_b есть

$$\langle X_a | \int_0^\infty e^{-\tau H} d\tau | X_b \rangle = \langle X_a | \frac{1}{L_0 - 1} | X_b \rangle. \quad (2.10.18)$$

Вертекс равен

$$\langle X_c | e^{ik_\mu X^\mu(0, \tau)} | X_d \rangle. \quad (2.10.19)$$

Мы можем устранить все собственные состояния струны, потому что

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1. \quad (2.10.20)$$

Итак, N -точечная функция равна

$$A_N = \langle 0; k_1 | V_0(k_2) D V_0(k_3) \dots V_0(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle. \quad (2.10.21)$$

В операторном формализме проективная инвариантность может быть установлена с помощью того факта, что операторы $L_{\pm 1}$ и L_0 порождают проективную группу $SL(2, R)$. Действительно, при любом конформном преобразовании вертексы преобразуются как

$$TV(k_i, z_i) T^{-1} = \left(1 - \varepsilon \alpha' k_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n z^n \right) V(k_i z_i) \quad (2.10.22)$$

или

$$[L_n, V(k_i, z_i)] = z^n \left[z \frac{d}{dz} + n\alpha' k_i^2 \right] V(k_i, z_i). \quad (2.10.23)$$

Мы будем говорить, что вертекс V имеет конформный вес, равный $\alpha' k_i^2 = 1$.

Наконец, мы можем явным образом построить операторы, порождающие только физические состояния с нулевой или положительной нормой. Предыдущее тождество показывает, что операторы с конформным спином, равным 1, автоматически коммутируют с генераторами алгебры Вирасоро. Это позволяет нам построить операторы, основанные на вертексе безмассовой частицы со спином единица, которые породят физическое пространство. Можно построить три набора взаимно коммутирующих операторов, которые в совокупности порождают все фоковское пространство гармонических осцилляторов:

$$\{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-, L_{-n}\} |0\rangle. \quad (2.10.24)$$

Беря только состояния, построенные из V_{-n}^i и \bar{V}_{-n}^- , и опуская L_{-n} , мы получим новое фоковское пространство, все состояния которого имеют положительные или нулевые нормы. Итак, множество состояний, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} L_n |\varphi\rangle &= 0, \\ (L_0 - 1) |\varphi\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.10.25)$$

не содержит состояний с отрицательной нормой в 26 измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nambu Y. Lectures at the Copenhagen Summer Symposium (1970).
- [2] Goto T. Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971).
- [3] Более ранние формулировки см. в: Nielsen H. B. 15th International Conference on High Energy Physics (Kiev), 1970.
- [4] Susskind L. Nuovo Cim. **69A**, 457 (1970).
- [5] См. Thorn C. B. in Unified String Theory (edited by M. B. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1985.
- [6] Virasoro M. A. Phys. Rev. **D1**, 2933 (1970).
- [7] Polyakov A. M. Phys. Lett. **103B**, 207, 211 (1981).
- [8] Fubini S., Gordon D., Veneziano G. Phys. Lett. **29B**, 679 (1969).
- [9] Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C. B. Nucl. Phys. **B56**, 109 (1973).
- [10] Kato M., Ogawa K. Nucl. Phys. **B212**, 443 (1983).
- [11] Hsue C. S., Sakita B., Virasori M. A. Phys. Rev **D2**, 2857 (1970).
- [12] Gervais J. L., Sakita B. Nucl. Phys. **B34**, 632 (1971); Phys. Rev. **D4**, 2291 (1971); Phys. Rev. Lett. **30**, 716 (1973).
- [13] Fairlie D. B., Nielsen H. B. Nucl. Phys. **B20**, 637 (1970).
- [14] Bardakci K., Ruegg H. Phys. Rev. **181**, 1884 (1969).

-
- [15] Virasoro M. A. *Phys. Rev. Lett.* **22**, 37 (1969).
 - [16] Goebel C. J., Sakita B. *Phys. Rev. Lett.* **22**, 37 (1969).
 - [17] Chan H. M. *Phys. Lett.* **28B**, 425 (1969).
 - [18] Chan H. M., Tsou S. T. *Phys. Lett.* **28B**, 485 (1969).
 - [19] Koba Z. J., Nielsen H. B. *Nucl. Phys.* **B12**, 517 (1969); **B10**, 633 (1969).
 - [20] Caneschi I., Schwimmer A., Veneziano G. *Phys. Lett.* **30B**, 351 (1969).
 - [21] Virasoro M. A. *Phys. Rev.* **117**, 2309 (1969).
 - [22] Shapiro J. *Phys. Lett.* **33B**, 361 (1970).
 - [23] Yoshimura M. *Phys. Lett.* **34B**, 79 (1971).
 - [24] Goddard P., Thorn C. B. *Phys. Lett.* **40B**, 235 (1972).
 - [25] Brower R. C., Friedman K. A. *Phys. Rev.* **D7**, 535 (1973).
 - [26] Del Giudice E., Di Vecchia P., Fubini S. *Ann. Phys.* **70**, 378 (1972).

Глава 3

СУПЕРСТРУНЫ

§ 3.1. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Суперсимметрия – самая изящная из всех симметрий; она объединяет бозоны и фермионы в один мультиплет:

$$\text{Фермионы} \leftrightarrow \text{Бозоны}$$

Объединив поля с разной статистикой, суперсимметрия и супергруппы к тому же открыли совершенно новую область математических исследований.

Но, как назло, нет ни одного экспериментально установленного факта, который свидетельствовал бы в пользу этой теории. Например, физики попытались найти суперсимметричные мультиплеты для электрона или нейтрино, но обнаружить скалярные аналоги этих частиц так и не удалось. Фактически ни у одной из ныне известных частиц нет суперсимметричного партнера. Некоторые критики назвали суперсимметрию «решением, для которого нужно найти задачу».

Хотя нет абсолютно никаких эмпирических данных, обосновывающих необходимость введения понятия о суперсимметрии, невозможно отрицать, что это понятие дает нам целую сокровищницу чрезвычайно желательных теоретических приемов, сулящих огромные выгоды. Суперсимметрия – это нечто большее, чем просто изящный способ объединения элементарных частиц в радующие глаз мультиплеты; у нее есть определенные практические применения в квантовой теории поля. Вот их список.

- (1) Суперсимметрия порождает тождества супер-Уорда-Такахаши, уничтожающие многие обычно расходящиеся фейнмановские диаграммы. Например, фейнмановские петлевые диаграммы с бозонами и фермионами, циркулирующими внутри петли, отличаются множителем -1 . Вследствие суперсимметрии бозонная петля может сократиться с фермионной и оставшаяся расходимость будет намного мягче. Мы видим, таким образом, что теории Янга-Миллса с суперсимметрией обладают лучшими перенормировочными свойствами, чем обычные калибровочные теории. Действительно, некоторые «теоремы о неперенормируемости» можно доказать во всех порядках теории возмущений.
- (2) Суперсимметрия может решить «проблему иерархии», которая стала проклятием теорий типа Великого Объединения (ТВО). В этих теориях есть два далеко отстоящих друг от друга масштаба энергий: масштаб энергий обычной физики элементарных частиц порядка миллиарда электрон-вольт и диапазон энергий ТВО порядка 10^{15} или

около этого миллиардов электрон-вольт. Между этими двумя масштабами простирается обширная «энергетическая пустыня», в которой не обнаруживается никаких новых явлений. Однако при вычислении эффектов перенормировки эти две энергетические шкалы неизбежно начинают перемешиваться. Петлевые поправки (например, к массам кварков) могут повысить эти массы вплоть до значений, близких к энергиям ТВО, что неприемлемо. «Точная настройка» постоянных взаимодействия и масс вручную может в принципе решить проблему иерархии, но это потребует больших ухищрений и будет выглядеть слишком искусственно. К счастью, тождества Уорда–Такахаши суперсимметричной теории достаточно сильны, чтобы обеспечить выполнение «теорем о неперенормируемости» во всех порядках теории возмущений. Таким образом, суперсимметрия необходима для стабилизации этих двух масштабов масс в теории возмущений и предотвращения их перемешивания.

- (3) Суперсимметрия может пролить свет на проблему «космологической постоянной». Данные наблюдательной астрономии указывают, что содержащий космологическую постоянную член $\lambda\sqrt{-g}$, служащий поправкой к действию Эйнштейна–Гильберта, чрезвычайно мал на астрономических масштабах расстояний. Проблема состоит в том, как объяснить почти полное исчезновение космологической постоянной без «точной настройки». Суперсимметрия, вероятно, достаточно сильна, чтобы обеспечить обращение в нуль космологической постоянной во всех порядках теории возмущений (поскольку этот член нарушает суперсимметрию). Это, однако, не дает полного решения проблемы космологической постоянной, поскольку нам неизбежно придется нарушить суперсимметрию, чтобы достичь диапазона обычных энергий. (Проблема состоит в том, чтобы объяснить обращение в нуль космологической постоянной после того, как нарушение суперсимметрии уже произошло.)
- (4) Суперсимметрия устраняет многие нежелательные частицы. Тахион, который возникает в модели бозонной струны, устраняется, например, тем, что он нарушает суперсимметрию. Устраняя эти частицы, суперсимметрия также уменьшает расходимость диаграмм с высшими петлями. В гл. 5 мы покажем, что потенциально могущие появиться расходимости теории суперструн связаны с инфракрасным испусканием тахионов и дилатонов. Поэтому, устраняя эти частицы, мы одновременно устраняем возможные источники расходимостей.
- (5) Наконец, когда суперсимметрия развивается в локальную калибровочную теорию, она естественным образом уменьшает расходимости квантовой теории гравитации. Это происходит по той причине, что локальная суперсимметрия может быть определена лишь при наличии гравитонов (см. Приложение). Локальная суперсимметрия тем самым тесно связана с общей теорией относительности. Действительно, локальная суперсимметрия успешно устраняет рас-

ходимости низших петлевых диаграмм супергравитации. Однако самая обширная из теорий супергравитации, $O(8)$ -супергравитация, по-видимому, имеет расходимость на уровне седьмой петли, что, скорее всего, исключает супергравитацию в качестве приемлемой квантовой теории поля. Лишь объединив локальную суперсимметрию с конформной инвариантностью теории струн, мы получаем достаточно обширную калибровочную группу, чтобы устранить, возможно, все расходимости квантовой гравитации.

Суперсимметрия как группа преобразований, относительно которых действие инвариантно, была впервые открыта в теории струн. Жерве и Сакита [1] показали, что обобщение обычного бозонного действия обладает симметрией, превращающей бозоны в фермионы. К сожалению, это открытие многие годы оставалось незамеченным, поскольку в то время суперсимметрия струнной модели была двумерной суперсимметрией на мировой поверхности. Лишь сравнительно недавно было окончательно доказано, что эта модель обладает не только двумерной, но и пространственно-временной десятимерной суперсимметрией.

Начнем наше обсуждение с простейшего действия, учитывающего спин, — точечной частицы со спином. Кроме переменной x_μ , описывающей положение точечной частицы, введем спиноры Дирака θ^A , где A произвольно, и матрицы Дирака Γ^μ в D -мерном пространстве. В общем случае дираковский спинор в D -мерном пространстве имеет $2^{D/2}$ комплексных компонент. Можно записать [2, 3]

$$S = \frac{1}{2} \int e^{-1} (\dot{x}_\mu - i \bar{\theta}^A \Gamma_\mu \theta^A)^2 d\tau. \quad (3.1.1)$$

Действие точечной частицы инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta\theta^A = \varepsilon^A, \\ \delta\bar{\theta}^A = \bar{\varepsilon}^A, \\ \delta x^\mu = i \bar{\varepsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A, \\ \delta e = 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Заметим, что комбинация

$$P^\mu = \dot{x}^\mu - i \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A \quad (3.1.3)$$

сама по себе инвариантна относительно этого преобразования. Поэтому любое выражение, являющееся функцией этой комбинации, будет инвариантно относительно указанного преобразования. Странное свойство этого действия, однако, состоит в том, что половина компонент фермионного поля сама собой выпадает из действия.

Варьируя поля e , x_μ и θ , получим несколько уравнений движения:

$$\Pi^2 = 0, \quad \dot{\Pi}^\mu = 0, \quad \Gamma \cdot \dot{\Pi} \dot{\theta} = 0. \quad (3.1.4)$$

Кроме того, получаем

$$(\Gamma \cdot \Pi)^2 = -\Pi^2 = 0. \quad (3.1.5)$$

Итак, половина собственных значений матрицы $\Gamma \cdot \Pi$ обращается в нуль. Но поскольку θ всегда появляется в комбинации $\bar{\theta}^A \Pi_\mu \Gamma^\mu \theta^A$, то половина компонент спинора Дирака из действия выпадает. Поэтому θ не является независимым спинором, но удовлетворяет ограничению, вдвое уменьшающему число его компонент.

Причина этого явления – то, что действие инвариантно относительно еще одного локального преобразования [2]:

$$\begin{cases} \delta\theta^A = i\Gamma \cdot \Pi \kappa^A, \\ \delta x^\mu = i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A, \\ \delta e = 4e\dot{\theta}^A \kappa^A. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Кроме того, есть еще одна бозонная симметрия действия:

$$\begin{cases} \delta\theta^A = \lambda\dot{\theta}^A, \\ \delta x^\mu = i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A, \\ \delta e = 0. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Если попробовать вычислить коммутатор двух суперсимметричных операций, приведенных в (3.1.6), то обнаружим, что алгебра не замыкается без использования уравнений движения:

$$[\delta_1, \delta_2]\theta^A = (2i\Gamma_\mu \kappa_2^A \dot{\theta}^B \Gamma \cdot \Pi \Gamma^\mu \kappa_1^B + 4i\Gamma \cdot \Pi \kappa_2^A \dot{\theta}^B \kappa_1^B) - (1 \leftrightarrow 2). \quad (3.1.8)$$

(Это на самом деле типично для суперсимметричных действий. Заметим, что число компонент переменных x_μ и θ^A не обязательно совпадает вне массовой поверхности, откуда следует, что в общем случае для замыкания алгебры необходимы вспомогательные поля.)

Наконец, вычисляя канонически сопряженные переменные, находим

$$\pi_\theta^A = \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}^A} = i\Gamma^\mu \Pi_\mu \theta^A. \quad (3.1.9)$$

Это сулит огромные трудности при ковариантном квантовании. Поскольку канонически сопряженная величина содержит явную зависимость от x , то квантовые уравнения становятся нелинейными и решать

их намного сложнее. Что еще хуже, оказывается, член $\Gamma^\mu P_\mu$ становится оператором проектирования в квантовой теории, а значит, невозможно обратить преобразование и решить уравнения относительно переменной θ^A . Другими словами, непосредственно провести ковариантное квантование точечной частицы со спином, по-видимому, вообще невозможно! Это служит нам предостережением о том, что суперсимметричная теория струн не обещает быть столь же простой, как суперсимметрия Янга–Миллса или супергравитация. Поэтому мы сначала обсудим более простую двумерную суперсимметричную модель Невё–Шварца–Рамона, а затем более сложную десятимерную пространственно-временную суперсимметричную модель Грина–Шварца.

§ 3.2. ДВУМЕРНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ

Учитывая трудности, связанные с суперчастицами (такие, как отсутствие ковариантного квантования и алгебры, замыкающейся вне массовой поверхности), временно забудем о пространственно-временной суперсимметрии и обсудим двумерную симметрию на мировой поверхности простейшего из всех возможных действий, включающего свободные струны и свободные фермионы. Это действие мы можем сразу взять в конформной калибровке, но оно выявит все существенные черты двумерной суперсимметрии. В этой формулировке с фиксированной калибровкой мы будем налагать калибровочные связи на фоксовское пространство вручную. Впоследствии мы представим полное действие, и тогда мы сможем вывести эти связи, начиная с локально симметричного действия.

В конформной калибровке выполняется [1]

$$L = -\frac{1}{2\pi} (\partial_a X_\mu \partial^a X^\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu), \quad (3.2.1)$$

где индекс a принимает значения 1 и 2, служа меткой двумерных векторов, а μ – пространственно-временной индекс.

Заметим, что ψ – странный объект: это антикоммутирующий майорановский спинор в двумерном пространстве и вектор в реальном пространстве – времени. Определим

$$\begin{aligned} \psi^\mu &= \begin{pmatrix} \psi_0^\mu \\ \psi_1^\mu \end{pmatrix}; & \bar{\psi}^\mu &= \psi^\mu \rho^0, \\ \rho^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho^1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \{\rho^a, \rho^b\} &= -2\eta^{ab}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

В явном виде выписав лагранжиан через компоненты, получим

$$L = \frac{1}{2\pi} (\dot{X} \cdot \dot{X} - X' \cdot X' + i\Psi_0(\partial_\tau + \partial_\sigma)\Psi_0 + i\Psi_1(\partial_\tau - \partial_\sigma)\Psi_1). \quad (3.2.3)$$

Хотя в этом действии калибровка фиксирована, оно все еще сохраняет инвариантность относительно глобального преобразования

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu &= -i\rho^a \partial_a X^\mu \epsilon. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Итак, временно отказавшись от попытки построить теорию струн с настоящими пространственно-временными спинорами, мы получили двумерную суперсимметричную теорию, которая весьма проста и включает свободные бозонные и антикоммутирующие поля.

Исторически теория Невё–Шварца–Рамона NS–R [4–6] была первой успешной попыткой ввести спин в дуальную модель. Она также стала первым примером линейного суперсимметричного действия [1], и вскоре последовали четырехмерные суперсимметричные действия для точечных частиц [7, 8].

Теперь, после того как мы выписали наше двумерное суперсимметричное действие, проследим шаги, предпринятые нами в предыдущей главе для нахождения решения системы. Следующий шаг – найти токи, связанные с этими симметриями, затем установить, какую алгебру эти токи порождают, и, наконец, наложить эти связи на гильбертово пространство. Последовательность, которой мы будем придерживаться в настоящем разделе, является непосредственным обобщением шагов, предпринятых в предыдущей главе:

$$\begin{aligned} \text{Действие} &\rightarrow \text{Симметрии} \rightarrow \text{Токи} \rightarrow \text{Алгебра} \rightarrow \text{Связи} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Унитарность}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Следуя этой стратегии, вычислим теперь суперсимметричный ток, связанный с этой симметрией. Как мы видели в предыдущей главе, существование конформной симметрии достаточно для того, чтобы породить сохраняющийся ток. В (1.9.8) мы видели, что этот сохраняющийся ток можно записать в виде

$$J_\mu^a = \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} \frac{\delta \phi}{\delta \epsilon^a}. \quad (3.2.6)$$

Подставляя (3.2.4) в (3.2.6), получаем

$$J_a = \frac{1}{2} \rho^b \rho_a \psi^\mu \partial_b X_\mu. \quad (3.2.7)$$

Чтобы проверить сохраняемость этой величины, сначала нужно выписать уравнения движения системы, что особенно легко сделать, поскольку они описывают свободные струны и частицы:

$$\begin{aligned} [\partial_\tau + \partial_\sigma] \psi_0^\mu &= 0, \\ [\partial_\tau - \partial_\sigma] \psi_1^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Теперь легко показать, что

$$\partial_a J^a = 0. \quad (3.2.9)$$

Будучи записано через компоненты, это выражение ($J_{\pm} \equiv (J_0 \pm J_1)/2$) эквивалентно:

$$J_- = \frac{1}{2} \Psi_0^\mu (\partial_\tau - \partial_\sigma) X_\mu, \quad (3.2.10)$$

$$J_+ = \frac{1}{2} \Psi_0^\mu (\partial_\tau + \partial_\sigma) X_\mu.$$

Используя уравнения движения, можно показать, что

$$\begin{aligned} (\partial_\tau + \partial_\sigma) J_- &= 0, \\ (\partial_\tau - \partial_\sigma) J_+ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Кроме суперсимметричного тока, у нас есть также тензор энергии-импульса, который, как мы видели выше в (1.9.17), можно записать в виде

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \partial_{\mu} \phi} \partial_{\nu} \phi - L \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (3.2.12)$$

Это выражение легко приспособить для наших целей. Подставляя (3.2.1) в (3.2.12), находим

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\Psi}^\mu \rho_a \partial_b \Psi_\mu + \frac{i}{4} \bar{\Psi}^\mu \rho_b \partial_a \Psi_\mu - (\text{След}),$$

$$\partial_a T^{ab} = 0, \quad (3.2.13)$$

где T_{ab} - бесследовый тензор, так как мы явным образом вычли след. Выпишем компоненты этого тензора:

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) - \frac{i}{4} \Psi_0^\mu (\partial_\tau - \partial_\sigma) \Psi_{0\mu} - \frac{i}{4} \Psi_1^\mu (\partial_\tau + \partial_\sigma) \Psi_{1\mu}, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_{10} \\ &= \dot{X} \cdot X' + \frac{i}{4} \Psi_0^\mu (\partial_\tau - \partial_\sigma) \Psi_{0\mu} - \frac{i}{4} \Psi_1^\mu (\partial_\tau + \partial_\sigma) \Psi_{1\mu}. \end{aligned}$$

Наша основная стратегия (3.2.5) состоит в том, чтобы использовать эти токи для наложения связей на фоковское пространство с целью устранения всех духов:

$$\langle T_{ab} \rangle = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\langle J_a \rangle = 0.$$

(Мы должны, однако, снова подчеркнуть, что мы просто налагаем на фоковское пространство нужные нам связи. Поскольку рассматриваемое здесь действие не является локально суперсимметричным, мы не можем

вывести эти связи из основных допущений модели. Ниже, когда мы запишем вполне симметричное действие, мы увидим, что эти связи возникают вследствие локальной симметрии.)

В отличие от случая бозонной струны, у нас фактически есть выбор между двумя различными граничными условиями, которые можно наложить на поля ψ_0 и ψ_1 , — периодическими или антипериодическими. При $\sigma = 0$ всегда можно выбрать $\psi_0 = \psi_1$. Однако при $\sigma = \pi$ можно выбрать одно из двух граничных условий. Если поле периодично, то получаем граничные условия Рамона, а если оно антипериодично — граничные условия Невё–Шварца [9, 10]:

$$\begin{cases} \text{Рамона (R):} & \psi_0(\pi, \tau) = \psi_1(\pi, \tau), \\ \text{Невё–Шварца (NS):} & \psi_0(\pi, \tau) = -\psi_1(\pi, \tau). \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Получив для нашего спинора два разных типа граничных условий, мы, естественно, получаем два разных способа разложения в ряд Фурье по целым (полуцелым) модам [8, 9]:

$$\text{R:} \quad \begin{cases} \psi_0^\mu(\sigma, \tau) = 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \\ \psi_1^\mu(\sigma, \tau) = 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \end{cases} \quad (3.2.17)$$

$$\text{NS:} \quad \begin{cases} \psi_0^\mu(\sigma, \tau) = 2^{-1/2} \sum_{r \in Z + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}, \\ \psi_1^\mu(\sigma, \tau) = 2^{-1/2} \sum_{r \in Z + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Следующий шаг в нашей стратегии (3.2.5) — нахождение алгебры, которую эти токи порождают. В предыдущей главе мы видели, что симметрии давали тензор энергии-импульса, который в свою очередь порождал алгебру Вирасоро, т.е. конформную алгебру. Для действия Невё–Шварца–Рамона (NS–R) мы обнаружим, что порождается суперконформная алгебра.

При таком разложении полей моменты L_n тока T_{ab} можно теперь записать в виде

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \{ e^{in\sigma} (T_{00} + T_{01}) + e^{-in\sigma} (T_{00} - T_{01}) \}. \quad (3.2.19)$$

Заметим, что определение конформных генераторов теперь включает вклады от антикоммутирующего сектора.

Можно повторить это фурье-разложение также для суперсимметрич-

ного тока. Для сектора R получим

$$F_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \{ e^{in\sigma} J_+ + e^{-in\sigma} J_- \}. \quad (3.2.20)$$

Для сектора NS имеем

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \{ e^{ir\sigma} J_+ + e^{-ir\sigma} J_- \}. \quad (3.2.21)$$

Чтобы найти алгебру из этих моментов токов, нужно построить величины, канонически сопряженные полям. Если определить

$$\pi_A^\mu = \frac{\delta L}{\delta \psi_{A,\mu}}, \quad (3.2.22)$$

то окажется, что фермионное поле является самосопряженным. Поэтому наложим условие

$$\{ \psi_A^\mu(\sigma, \tau), \psi_B^\nu(\sigma', \tau) \} = \pi \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}. \quad (3.2.23)$$

Следовательно, осцилляторы в (3.2.17) и (3.2.18) подчиняются условиям

$$\begin{cases} \text{R: } \{ d_n^\mu, d_m^\nu \} = \eta^{\mu\nu} \delta_{n, -m}, \\ \text{NS: } \{ b_r^\mu, b_s^\nu \} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r, -s}. \end{cases} \quad (3.2.24)$$

Важно заметить, что нулевая составляющая R-сектора пропорциональна гамма-матрицам Дирака:

$$\{ d_0^\mu, d_0^\nu \} = \eta^{\mu\nu}. \quad (3.2.25)$$

Итак, мы видим, что сектор Рамона соответствует фермионному сектору и что NS-сектор, хотя он и содержит антикоммутирующие операторы, все же остается бозонным сектором. То, что граничные условия вроде (3.2.16) играют столь важную роль в развитии фермионного и бозонного секторов теории, — совершенно новая и, видимо, уникальная черта теории струн. (Этот на первый взгляд необъяснимый факт будет весьма важен при обсуждении многопетлевых амплитуд, определенных на поверхностях с дырками. Тогда эти граничные условия будут определять то, что называется «спиновыми структурами» многообразия.)

После установления коммутационных соотношений можно построить алгебру, порождаемую этими тензорами. Как и ранее, моменты этих токов порождают замкнутую алгебру. Для NS-сектора алгебра будет следующей:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{8} (m^3 - m) \delta_{m, -n},$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) G_{m+r}, \quad (3.2.26)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r,-s}.$$

Элементы алгебры можно явно выразить через осцилляторы NS-сектора:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \alpha_{m+n} : + \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(r + \frac{1}{2}m\right) : b_{-r} b_{m+r} :, \quad (3.2.27)$$

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} b_{r+n}.$$

Повторяя те же шаги для R-сектора, получим

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m,-n},$$

$$[L_m, F_n] = \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n}, \quad (3.2.28)$$

$$\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m,-n}.$$

В явном виде элементы алгебры выражаются через осцилляторы так:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \alpha_{m+n} : + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}m\right) : d_{-n} d_{m+n} :, \quad (3.2.29)$$

$$F_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} d_{m+n}.$$

Мы можем получить гамильтониан прямо из компонент тензора энергии-импульса. В конформной калибровке гамильтониан для NS-сектора есть

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{n\mu} + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^{\mu} b_{r\mu} + \alpha' p_0^2. \quad (3.2.30)$$

Для R-сектора он есть

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{n\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m}^{\mu} d_{m\mu} + \alpha' p_0^2. \quad (3.2.31)$$

Заметим, что этот гамильтониан диагонален в фоковском пространстве гармонических осцилляторов. Это чрезвычайно важно, потому что это значит, что мы можем легко сделать переход от формализма континуального интеграла к формализму гармонических осцилляторов. Пропагатор этой теории становится простым интегралом от экспоненты, который легко берется.

Состояния теории, как и в бозонном секторе, представляются фо-

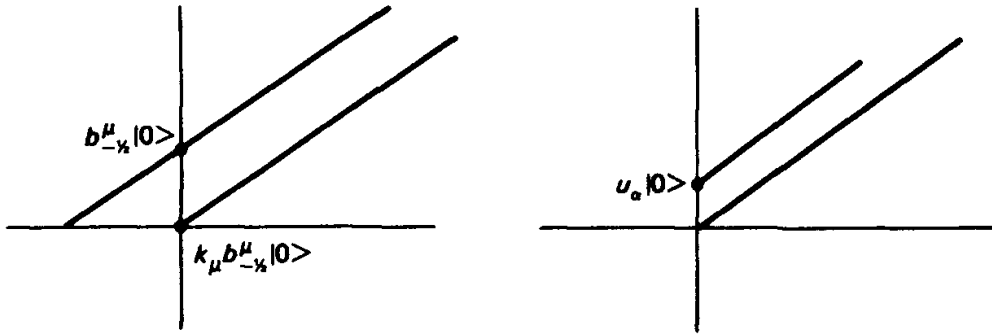


Рис. 3.1. Реджевские траектории для NS-R-модели открытых струн. Бозонные состояния соответствуют фокковскому пространству, порожденному всеми возможными произведениями гармонических осцилляторов a^+ и b^+ , действующими на вакуум. Фермионные состояния соответствуют фокковскому пространству, порожденному всеми возможными произведениями гармонических осцилляторов a^+ и d^+ , действующими на вакуум; они являются пространственно-временными спинорами, а не скалярами. На левом рисунке безмассовая частица со спином 1 соответствует полям Максвелла или Янга-Миллса (все тахионные состояния, включая вакуумное, можно устранить применением GSO-проекции). На правом рисунке безмассовый фермион со спином 1/2 является суперсимметричным партнером безмассового векторного поля.

ковским пространством произведений этих осцилляторов:

$$\text{Собственные состояния сектора NS: } \prod_{n,\mu} \prod_{m,\nu} \{a_{n,\mu}^+\} \{b_{m,\nu}^+\} |0\rangle, \quad (3.2.32)$$

$$\text{Собственные состояния сектора R: } \prod_{n,\mu} \prod_{m,\nu} \{a_{n,\mu}^+\} \{d_{m,\mu}^+\} |0\rangle u_{\alpha}. \quad (3.2.33)$$

Здесь u_{α} соответствует произвольному спинору, на который пока не наложено никаких связей. Ниже приведены некоторые низшие состояния обоих этих секторов (см. рис. 3.1):

$$\begin{aligned} \text{Вакуум:} & \quad |0\rangle; \quad k^2 = 2, \\ \text{Тахион:} & \quad k_{\mu} b_{-1/2}^{\mu} |0\rangle; \quad k^2 = 1, \\ \text{Безмассовый вектор:} & \quad a_{-1}^{\mu} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

$$\begin{aligned} \text{Фермион со спином 1/2:} & \quad |0\rangle u_{\alpha}, \\ \text{Фермион со спином 3/2:} & \quad d_{-1}^{\mu} |0\rangle u_{\alpha}, \\ \text{Фермион со спином 3/2:} & \quad a_{-1}^{\mu} |0\rangle u_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Итак, мы обнаружили замечательное сходство между моделью NS-R и первоначальной бозонной струной. В обоих случаях мы начинаем с действия, находим его симметрии, порождаем токи, отвечающие этим симметриям, по токам строим алгебру и затем налагаем связи на гильбертово пространство. Основное отличие состоит в добавлении супертоков, которое порождает супералгебру (3.2.26) и (3.2.28).

Последний шаг в нашей стратегии поэтому состоит в применении этой суперконформной алгебры к гильбертову пространству модели NS-R. Условия, устраняющие духи, суть

$$F_n |\varphi\rangle = 0 \text{ или } G_r |\varphi\rangle = 0$$

для положительных n и r . Однако для того, чтобы найти условия массовой поверхности, нам придется теперь исследовать древесные амплитуды модели NS-R.

§ 3.3. ДЕРЕВЬЯ

Снова нашей исходной точкой при построении теории взаимодействующих струн будет функциональный интеграл. К сожалению, нам нечем руководствоваться при построении такой теории, кроме интуиции. Наудачу попробуем умножить обычный вертекс V_0 на фактор $k_\mu \psi^\mu$ в точке, в которой частица со спином нуль входит в диаграмму. Тогда резонно предположить, что N -точечная амплитуда рассеяния для этой скалярной частицы является обобщением формулы (2.5.2) и выражается в виде

$$\begin{aligned} A(1, 2, 3, \dots, N) &= \sum_{\text{топологии}} \int d\mu D X D \psi \prod_{i=1}^N k_{i\mu} \psi^\mu e^{ik_{i\mu} \cdot x^{i\mu}} = \\ &= \sum_{\text{топологии}} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^N k_{i\mu} \psi^{i\mu} e^{ik_{i\mu} \cdot x^{i\mu}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где

$$D\psi = \prod_{\mu} \prod_{\sigma, \tau} d\psi_{\mu}(\sigma, \tau). \quad (3.3.2)$$

Здесь проводится функциональное интегрирование по бесконечной последовательности грассмановых переменных (см. Приложение).

Как и для бозонного функционального интеграла, мы можем устранить функциональные интегралы во всех промежуточных точках на струнной поверхности, поскольку в этом пространстве гамильтониан диагонален. Так, используя

$$1 = |X\rangle \langle \psi| \int D X D \psi \langle \psi| \langle X| \quad (3.3.3)$$

в каждой промежуточной точке, можно устранить все функциональные интегралы и оставить только гармонические осцилляторы. Итак, снова функциональное интегрирование позволяет вывести формализм гармонических осцилляторов, который мы рассматриваем лишь как одно из возможных представлений функционального интеграла.

Выраженный через осцилляторы, вертекс для испускания скалярной частицы с импульсом k_μ принимает вид

$$V = k_\mu \psi^\mu V_0. \quad (3.3.4)$$

Выбор этой формы мотивируется правилом, согласно которому кон-

формный вес вертексных функций должен быть равен 1, чтобы выполнялись условия уничтожения духов (2.9.5). Из (3.2.27) и (3.2.28) можно вычислить коммутатор L_n и ψ_μ и обнаружить, что он равен $1/2$. Поскольку V_0 имеет конформный вес $\alpha'k^2$, а ψ имеет вес $1/2$, то вес V есть сумма этих двух весов:

$$\alpha'k^2 + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow k^2 = \frac{1}{2\alpha'}. \quad (3.3.5)$$

Здесь $\alpha = 1/2$. Эта вертексная функция, соответствующая испусканию или поглощению тахиона, заведомо удовлетворяет правильным условиям уничтожения духов.

Пропагатор вычисляется просто. Заметим, что гамильтониан диагонален в пространстве гармонических осцилляторов. Поэтому мы будем использовать явное представление функционала, основанное на нормальных модах гармонического осциллятора. Тогда

$$D = \int_0^\infty e^{-\tau(L_0 - 1)} d\tau = \frac{1}{L_0 - 1}. \quad (3.3.6)$$

Построим N -точечную функцию для тахионов:

$$\langle 0; k_1 | k_1 \cdot b_{1/2} V(k_2) D \cdots V(k_{N-1}) k_N \cdot b_{-1/2} | 0; k_N \rangle. \quad (3.3.7)$$

Здесь мы разместили тахионные состояния слева и справа от всех вершин и пропагаторов. В этом формализме циклическую симметрию можно доказать тем же способом, что и для бозонной струны. Сначала заметим, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{V(k, y)}{y} | 0; 0 \rangle = k \cdot b_{-1/2} | 0; k \rangle, \quad (3.3.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \langle 0; 0 | y V(k, y) = \langle 0; -k | k \cdot b_{1/2}.$$

Это позволяет одинаковым способом рассматривать все внешние тахионы. Перенос на лево последний вертекс, можно показать, совершенно аналогично бозонному случаю, изученному в (2.6.24), что эта амплитуда циклически симметрична.

Здесь, однако, возникает одно затруднение. Только что построенное тахионное состояние соответствует $k_\mu b_{-1/2}^\mu | 0; k \rangle$; это выражение удовлетворяет

$$[L_0 - 1] k_\mu b_{-1/2}^\mu | 0; k \rangle = 0 \rightarrow \alpha'k^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.3.9)$$

Это, однако, означает, что вакуумное состояние $| 0; k \rangle$ имеет еще меньшую массу, поскольку оно удовлетворяет следующему условию:

$$[L_0 - 1] | 0; k \rangle = 0 \rightarrow \alpha'k^2 = 1. \quad (3.3.10)$$

Мы столкнулись, тем самым, с необычной проблемой: истинный вакуум

теории (3.3.10) не соответствует тахиону (3.3.9). Другими словами, гильбертово пространство, по-видимому, слишком обширно, истинный вакуум не является необходимым состоянием. У нас, кажется, оказалось два самых низких состояния.

Решение этой головоломки вытекает из того факта, что вакуумное состояние действительно излишне и его можно из теории устранить. Это достигается переопределением гильбертова пространства теории.

Формализм, в котором мы до сих пор работали, называется F_1 ; он неуклюж. Вакуум теории не равен тахиону, и поэтому фоковское пространство на самом деле обширнее, чем требуется. Хотя циклическая симметрия легко доказывается в этом формализме, мы предпочитаем ввести другой, более удобный. Он называется F_2 [10] и использует редуцированное фоковское пространство, полученное удалением вакуумного состояния с $k^2 = 1/\alpha'$.

Чтобы к нему перейти, перепишем тахионное состояние в виде

$$k_\mu b_{-1/2}^\mu |0; k\rangle = G_{-1/2} |0; k\rangle, \quad (3.3.11)$$

$$\langle 0; k | k_\mu b_{1/2}^\mu = \langle 0; k | G_{1/2}. \quad (3.3.12)$$

Теперь перепишем N -точечную амплитуду рассеяния тахиона (3.3.7) с помощью (3.3.12):

$$A_N = \langle 0; k_1 | G_{1/2} V(k_2) D \cdots V(k_{N-1}) G_{-1/2} |0; k_N\rangle. \quad (3.3.13)$$

Приступим к решающему шагу. Протолкнем $G_{1/2}$ направо, последовательно продвигая его через различные вершины и пропагаторы. Нам потребуются формулы

$$\{G_r, V\} = [L_{2r}, V_0] = [L_0 + r - 1] V_0 - V_0 (L_0 - 1),$$

$$G_{1/2} \frac{1}{L_0 - 1} = \frac{1}{L_0 - 1/2} G_{1/2}. \quad (3.3.14)$$

Важно заметить, что при проталкивании $G_{1/2}$ направо изменился интерсепт пропагатора, т. е.

$$\frac{1}{L_0 - 1} \rightarrow \frac{1}{L_0 - 1/2}, \quad (3.3.15)$$

тогда как все другие члены, содержащие разные L , обращаются в нуль, аналогично бозонному случаю. Наконец, мы протолкнем $G_{1/2}$ вправо до конца, где это выражение обратится в нуль на тахионном состоянии:

$$G_{1/2} G_{-1/2} |0\rangle = (2L_0 - G_{-1/2} G_{1/2}) |0\rangle = 0. \quad (3.3.16)$$

Итак, собрав все вместе, мы, наконец, получаем

$$\begin{aligned} A_N &= \langle 0; k_1 | k_1 \cdot b_{1/2} V(k_2) \frac{1}{L_0 - 1} \cdots V(k_{N-1}) k_N \cdot b_{-1/2} |0; k_N\rangle = \\ &= \langle 0; k_1 | V(k_2) \frac{1}{L_0 - 1/2} \cdots V(k_{N-1}) |0; k_N\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Удивительно, но теперь исходная амплитуда оказалась полностью переписанной таким образом, что набор собственных (резонансных) состояний подвергся сдвигу. В частности, старое вакуумное состояние в формализме F_1 при $\alpha'k^2 = 1$ исчезло из гильбертова пространства. Оно не взаимодействует ни с чем в новом формализме, который мы назовем F_2 [10]. Вместо него у нас есть тахионное состояние, представленное $|0; k\rangle$, которое теперь удовлетворяет новому условию $[L_0 - 1/2]|0; k\rangle = 0$ с $\alpha'k^2 = 1/2$.

Это весьма примечательно. Состояние $|0; k\rangle$, которое раньше представляло вакуумное состояние при $\alpha'k^2 = 1$, теперь неожиданно превратилось в тахионное состояние при $\alpha'k^2 = 1/2$. Таким образом, в формализме F_2 тахионное состояние и новое вакуумное состояние являются одной и той же частицей. (Следует помнить, что *один и тот же* символ $|0; k\rangle$ может представлять либо старый вакуум в формализме F_1 , либо тахион в новом формализме F_2 .)

Этот сдвиг гильбертова пространства является новой чертой, которой не было у теорий поля для точечных частиц. На самом деле при обсуждении конформной теории поля в следующей главе мы обнаружим, что это странное явление «смены картины» возникает всякий раз, когда мы строим неприводимые представления суперконформной группы. Следовательно, это не трюк, а существенное свойство данной группы. (Мы должны также отметить, что когда мы обеспечим пространственно-временную суперсимметрию модели, мы устраним также тахионное состояние. Тем самым тахион исключается из подлинно суперструнного гильбертова пространства, что делает теорию унитарной.)

Подытожим различия между этими двумя формализмами:

$$F_1: \begin{cases} \text{Вертекс} = V, \\ \text{Пропагатор} = (L_0 - 1)^{-1}, \\ \text{Тахион: } k_\mu \cdot b^\mu_{-1/2} |0; k\rangle (\alpha'k^2 = 1/2); \text{ Вакуум: } |0; k\rangle (\alpha'k^2 = 1), \end{cases} \quad (3.3.18)$$

$$F_2: \begin{cases} \text{Вертекс} = V, \\ \text{Пропагатор} = (L_0 - 1/2)^{-1}, \\ \text{Тахион} = \text{Вакуум: } |0; k\rangle; (\alpha'k^2 = 1/2). \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Преимущества и недостатки этих двух формализмов сводятся к следующему.

- (1) В формализме F_1 явную циклическую симметрию намного легче доказать. Однако все вычисления усложняются необходимостью учитывать ненужное вакуумное состояние, которое ни с чем не взаимодействует.
- (2) В формализме F_2 циклическая симметрия является скрытой, но устранение духов и калибровочные преобразования проводить легко.

Преимущество состоит в том, что теперь мы работаем в фоковском пространстве меньшего объема.

Используя формализм F_2 , нетрудно вычислить четырехточечную функцию в явном виде:

$$\langle 0, -k_1 | V(k_2) \frac{1}{L_0 - 1/2} V(k_3) | 0; k_4 \rangle = \frac{\Gamma(1 - \alpha(s)) \Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(1 - \alpha(s) - \alpha(t))}. \quad (3.3.20)$$

Здесь $\alpha(s) = 1 + \alpha's$.

Возможно также непосредственное обобщение до N -точечной функции. Последняя представима в виде

$$A_N = \int d\mu_N \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1}, \dots, \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} | 0; 0 \rangle. \quad (3.3.21)$$

В общем случае это выражение содержит большое число множителей, которые вычислять утомительно. Простой способ получить весь результат целиком — использовать соотношение

$$\frac{V(y)}{\sqrt{y}} = \int d\theta \exp \{ ik \cdot X + \theta k \cdot \psi / \sqrt{y} \}. \quad (3.3.22)$$

Заметим, что если разложить экспоненту в степенной ряд, то ненулевой вклад в интеграл даст лишь линейный член, и мы получим предыдущее выражение для вертексной функции. Пока что ничего нового мы не получили. Теперь воспользуемся следующими двумя тождествами:

$$\langle 0 | \frac{\psi^\mu(y_1)}{\sqrt{y_1}} \frac{\psi^\nu(y_2)}{\sqrt{y_2}} | 0 \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{y_1 - y_2}, \quad (3.3.23)$$

$$\langle 0 | \frac{V(y_1)}{\sqrt{y_1}} \frac{V(y_2)}{\sqrt{y_2}} | 0 \rangle = \int d\theta_1 d\theta_2 \exp [k_1 \cdot k_2 \ln (\dot{y}_1 - y_2 - \theta_1 \theta_2)].$$

Нетрудно обобщить последнее соотношение, выписав N -точечную амплитуду тахиона:

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \frac{V(k_i, y_i)}{y_i} | 0 \rangle = \int \prod \frac{d\theta_i}{\sqrt{y_i}} \prod_{i < j} (y_i - y_j - \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j}. \quad (3.3.24)$$

Преимущество этого выражения в том, что мы можем теперь находить различные члены, входящие в эту формулу, последовательно разлагая их в степенной ряд и интегрируя по грасмановым переменным.

Кроме амплитуд рассеяния тахионов на тахионах, мы можем также вычислить рассеяние безмассовых векторных частиц (соответствующих частицам Максвелла и Янга–Миллса). Выбор вертексной функции для безмассовой векторной частицы ограничен тем фактом, что она должна

обладать конформным весом 1 и правильным спином. Естественный выбор этой функции дается выражением

$$V(\zeta, k) = \{G_r, \zeta \cdot \psi e^{ikX}\} = (\zeta \cdot \dot{X} - \zeta \cdot \psi k \cdot \psi) e^{ikX},$$

где ζ -вектор поляризации векторной частицы, а $k^2 = \zeta \cdot k = 0$. Конформный вес этого вертекса равен сумме конформных весов индивидуальных множителей, его образующих. Поскольку ψ имеет конформный вес $1/2$, а e^{ikX} имеет конформный вес $\alpha' k^2$, то отсюда следует, что конформный вес этого вертекса дается выражением

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1,$$

имеющим желаемый вес. Этот вертекс заведомо удовлетворяет условиям уничтожения духов, налагаемым на G и L . Нетрудно вычислить N -точечную амплитуду рассеяния для этой безмассовой калибровочной частицы с помощью того же формализма, который был развит для тахиона. Например, амплитуда рассеяния для четырех безмассовых калибровочных частиц дается выражением

$$A_4 = K \frac{\Gamma(-s/2)\Gamma(-t/2)}{\Gamma(1-s/2-t/2)},$$

где кинематический фактор K имеет вид

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{4}(st\zeta_{13,24} + su\zeta_{23,14} + tu\zeta_{12,34}) + \\ & + \frac{1}{2}s(k_{14}k_{32}\zeta_{24} + k_{23}k_{41}\zeta_{13} + k_{13}k_{42}\zeta_{23} + \\ & + k_{24}k_{31}\zeta_{14}) + \frac{1}{2}t(k_{21}k_{43}\zeta_{31} + k_{34}k_{12}\zeta_{24} + \\ & + k_{24}k_{13}\zeta_{34} + k_{31}k_{42}\zeta_{12}) + \frac{1}{2}u(k_{12}k_{43}\zeta_{32} + k_{34}k_{21}\zeta_{14} + \\ & + k_{14}k_{23}\zeta_{34} + k_{32}k_{41}\zeta_{12}); \end{aligned}$$

здесь

$$k_{ij} = \zeta_i \cdot k_j; \quad \zeta_{ij} = \zeta_i \cdot \zeta_j; \quad \zeta_{ij,kl} = \zeta_{ij} \zeta_{kl}.$$

(Рассеяние с участием фермионов также можно вычислить; оно тоже будет иметь приведенную выше базовую форму, но кинематический фактор будет зависеть от внешних спиноров.)

Необходимо добавить к этому, что еще одно преимущество использования формализма F_2 состоит в том, что можно непосредственно показать инвариантность амплитуды относительно преобразования

$$\begin{aligned} \delta y_i &= \theta_i \varepsilon, \\ \delta \theta_i &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Оно порождает группу $Osp(1, 2)$ (см. Приложение), являющуюся супер-

симметричным обобщением проективной группы $SL(2, R)$. Эта группа порождается алгеброй, образуемой набором

$$G_{\pm 1/2}, \quad L_{\pm 1}, \quad L_0. \quad (3.3.26)$$

Пусть Ω есть элемент группы $Osp(1, 2)$. Тогда доказательство супер-проективной инвариантности дается следующим замечанием:

$$\Omega |0; 0\rangle = |0; 0\rangle. \quad (3.3.27)$$

(Заметим, что, как и в бозонном случае, вакуумное состояние $|0; 0\rangle$ не является физическим. Поэтому элемент Ω , который, вообще говоря, не уничтожает физические состояния, может уничтожить вакуумное состояние.) Вертекс при этом поворачивается согласно

$$\Omega V(y, \theta) \Omega^{-1} = V(y', \theta'), \quad (3.3.28)$$

где $V(y, \theta)$ – вертексная функция до интегрирования по θ .

Теперь, после того как мы выяснили свойства трехбозонной вертексной функции в формализме Невё–Шварца, мы можем также вычислить взаимодействие фермион–фермион–бозон (с внешней бозонной линией) для модели Рамона. Выберем

$$V(k) = \Gamma :e^{ik \cdot X}:, \quad (3.3.29)$$

где

$$\Gamma = \gamma_{11} (-1)^{\sum_n d_{-n} d_n}. \quad (3.3.30)$$

Здесь γ_{11} – произведение матриц Дирака. Кроме этой вертексной функции, нам также нужен пропагатор

$$D = \frac{1}{F_0} = \frac{F_0}{L_0}, \quad (3.3.31)$$

где F_0 дается формулой (3.2.20). Мы положили интерсепт равным нулю (что, как мы увидим, правильный выбор, если мы хотим обеспечить конформную инвариантность; на этой ранней стадии, однако, мы пока не можем обосновать выбор нулевого интерсепта).

Наконец, вакуумное состояние является теперь фермионом со спином $1/2$ и дается формулой

$$\sum_{\alpha} |0; q\rangle_{\alpha} u_{\alpha}, \quad (3.3.32)$$

где мы суммируем по спинорным индексам α спинора u_{α} . Амплитуда рассеяния фермиона, взаимодействующего с несколькими бозонами, определяется теперь выражением

$$\bar{u}(q_1) \langle 0; q_1 | V(k_2) D \cdots DV(k_{N-1}) | 0; q_N \rangle u(q_N). \quad (3.3.33)$$

Пока что мы лишь продемонстрировали амплитуды с двумя внешними фермионными линиями. Как ни странно, все наши первые взятые наугад и основанные на простой интуиции допущения оказались успешными. Поскольку действие в конформной калибровке совпадает с

действием свободной теории, модель NS-R весьма проста. За эту простоту, однако, приходится платить.

В принципе, поскольку струнную модель можно факторизовать в любом канале, должно быть возможно факторизовать R-модель в мезонном канале и заново вывести из нее NS-модель или получить многофермионную вертексную функцию. На самом деле это весьма трудно сделать. В частности, фермионная вертексная функция (с внешней фермионной линией, связанной с внутренними фермионной и бозонной линиями) — это объект, с которым слишком сложно работать. Это в свою очередь затрудняет вычисление многофермионных амплитуд в формализме NS-R.

Хотя можно показать, что R-модель можно факторизовать в разных каналах, чтобы вывести NS-модель, но формализм NS-R в действительности весьма неудобен для вычисления многофермионных амплитуд. В следующей главе мы увидим, что методы конформной теории поля делают ковариантное вычисление многофермионных амплитуд возможным.

§ 3.4. ЛОКАЛЬНАЯ ДВУМЕРНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ

Заметим, что условия

$$\begin{aligned} \langle T_{ab} \rangle &= 0, \\ \langle J_a \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

мы наложили вручную. Никакого обоснования этому дано не было. Мы просто сослались на то, что должно существовать действие с более широкой симметрией, из которого эти связи можно вывести с самого начала.

Здесь мы опишем локальное обобщение изложенной выше теории. Ключом к построению этого локально суперсимметричного действия служит введение в теорию дополнительных полей. Кроме суперсимметричной пары

$$(X_\mu, \Psi_\mu), \tag{3.4.2}$$

мы вводим двумерную «тетраду» и ее суперсимметричного партнера

$$(e_a^\mu, \chi_a). \tag{3.4.3}$$

Здесь греческие буквы α и β метят двумерные векторы в искривленном пространстве, греческие буквы μ и ν продолжают служить метками 10-мерных векторов (пространственно-временных), латинские буквы a, b, c метят двумерные векторы в плоском пространстве: χ_α — двумерный спинор, а также двумерный вектор, а двумерные индексы спинора опущены. Итак, и тетрада, и спинор χ_α имеют по четыре компоненты, как и требуется для суперсимметрии. Теперь построим полное действие,

впервые выписанное Бринком, Ди Вечchia, Хоувом, Дезером и Зумино [11–13]:

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu + 2\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta]. \quad (3.4.4)$$

Заметим, что матрицы ρ , использованные выше, в действительности определены в двумерном искривленном пространстве, поскольку они умножаются на

$$\rho^\alpha = e_a^\alpha \rho^a.$$

Действие инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu = -i\rho^\alpha \epsilon (\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha), \\ \delta e_\beta^a = -2i\bar{\epsilon} \rho^\alpha \chi_\beta, \\ \delta \chi_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \chi_\alpha. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Оно также инвариантно относительно масштабных преобразований Вейля:

$$\begin{cases} \delta X_\mu = 0, \\ \delta \psi^\mu = -\frac{1}{2} \sigma \psi^\mu, \\ \delta e_\beta^a = \sigma e_\beta^a, \\ \delta \chi_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \chi_\alpha. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Оно также инвариантно (вследствие некоторых тождеств, справедливых в двумерном случае) относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta \chi_\alpha &= i\rho_\alpha \eta, \\ \delta e_\beta^a &= \delta \psi_\mu = \delta X_\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Наконец, по построению оно также явно инвариантно относительно локальных двумерных лоренцевых преобразований и репараметризаций из-за присутствия поля локальных тетрад. (Наличие обыкновенных производных вроде ∂_α в действии вместо ковариантных производных D_α по искривленному пространству объясняется тем фактом, что двумерное поле связности исчезает из действия.)

Теперь мы можем вывести ограничения, которые мы наложили на фоковское пространство вручную. Заметим, что вариация действия

относительно тетрады дает

$$T_a^a = 0, \quad (3.4.8)$$

тогда как варьирование суперсимметричного партнера тетрады дает

$$\rho^\alpha \rho^\beta \partial_\alpha X_\mu \psi^\mu - \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi) \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\alpha = 0. \quad (3.4.9)$$

Это те ограничения, которые мы выше обещали получить и которые теперь выведены как следствия вариации полей.

Теперь мы можем выбрать калибровку

$$\begin{aligned} e_a^a &= \delta_a^a, \\ \chi_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Заметим, что у нас есть достаточно много симметрий, относящихся к полю χ_α , чтобы полностью исключить это поле: сочетание двумерной суперсимметрии (3.4.5) и симметрии (3.4.7). Тогда наши ограничения сведутся к

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X^\mu + \frac{1}{2} i \bar{\psi} \rho_\alpha \partial_\beta \psi - \text{след} = 0, \quad (3.4.11)$$

$$J^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho^\alpha \partial_\beta X_\mu \psi^\mu = 0 \quad (3.4.12)$$

(где скобки обозначают взятие половины симметризованной суммы). Это, конечно, те связи, которые были впервые введены в начале нашего обсуждения в (3.2.7) и (3.2.13). Итак, теперь мы вывели эти связи из инвариантного действия, вместо того чтобы просто налагать их на состояния системы.

В итоге это действие инвариантно относительно нескольких локальных симметрий. В их число входят

- (1) локальная двумерная лоренцева симметрия,
- (2) репараметризация,
- (3) вейлевское изменение масштаба,
- (4) двумерная суперсимметрия,

но не 10-мерная пространственно-временная суперсимметрия.

§ 3.5. КВАНТОВАНИЕ

Квантование действия NS-R является непосредственным обобщением квантования бозонной струны. Особенность суперструны – то, что действие NS-R, содержащее многочисленные взаимодействия, дает свободную теорию после выбора калибровки.

Снова мы будем пользоваться теми же тремя методами: (1) Гупты-Блейлера, (2) формализмом светового конуса, (3) BRST.

Квантование Гупты–Блейлера

Формализм Гупты–Блейлера является простейшим из трех, и в действительности именно в нем мы работали выше. Используя обширный набор симметрий модели, мы можем выбрать конформную калибровку:

$$\begin{cases} \chi_a = 0, \\ e_a^b = \delta_a^b. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Заметим, что в этой калибровке действие сводится к тому, которым мы пользовались выше, с наложенными условиями

$$\text{NS: } \begin{cases} L_n |\Phi\rangle = 0, \\ G_r |\Phi\rangle = 0, \end{cases} \quad (3.5.2)$$

$$\text{R: } \begin{cases} L_n |\Psi\rangle = 0, \\ F_m |\Psi\rangle = 0 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

для положительных n , m и r . Итак, мы квантовали действие NS–R в формализме Гупты–Блейлера.

Квантование в переменных светового конуса

Сущность формализма светового конуса состоит в том, что мы устраняем все нефизические духовые состояния, решая уравнения связей (3.4.11) и (3.4.12) явным образом в терминах поперечных или физических мод, вместо того чтобы налагать их на состояния. Мы можем наложить следующие условия:

$$\begin{cases} \psi^1 = 0, \\ \psi^\mu (\partial_\tau + \partial_\sigma) X_\mu = 0. \end{cases} \quad ; \quad (3.5.4)$$

Большинство генераторов изменились лишь незначительно. Реальное отличие наблюдается в «минусовых» компонентах полей, содержащих поперечные компоненты конформных генераторов:

$$\alpha_n^- = \alpha_n^-(X) + \frac{1}{2p^+} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(r - \frac{1}{2}n \right) : b_{n-r}^i b_r^i : - \frac{1}{2} \frac{a \delta_{n,0}}{p^+}, \quad (3.5.5)$$

где первый член справа относится к бозонному генератору, который мы вычислили ранее в (2.3.16), и

$$b_r^- = \frac{1}{p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_{r-s}^i b_s^i. \quad (3.5.6)$$

Трудности возникают с тем лоренцевым генератором, который со-

держит две минусовые компоненты:

$$M^{-i} = M_0^{-i} + K^{-i}, \quad (3.5.7)$$

$$K^{-i} = \frac{-i}{2p^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{D-2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^j (b_{m-r}^i b_r^j - b_{m-r}^j b_r^i).$$

Находим, наконец, что

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i) (\Delta_n - n), \quad (3.5.8)$$

где

$$\Delta_n = n \left(\frac{D-2}{8} \right) + \frac{1}{n} \left(2a - \frac{D-2}{8} \right). \quad (3.5.9)$$

Итак, лоренц-инвариантность достигается лишь при $D = 10$ и $\alpha = 1/2$.

Квантование BRST

Квантование BRST начинается с вычисления детерминанта Фаддеева–Попова, связанного с конформной калибровкой. Из-за обширного набора симметрий действия мы можем наложить связи

$$e_a^a = \delta_a^a, \quad (3.5.10)$$

$$\chi_a = 0.$$

Как и прежде, мы должны проанализировать связи, проварьировав поля, входящие в (3.4.5) и (3.4.7):

$$\delta \chi_a = \nabla_a \varepsilon + i \rho_a \eta. \quad (3.5.11)$$

Детерминант Фаддеева–Попова (1.6.10), связанный с калибровочной связью, снова дается формулой

$$\Delta_{FP} = \det \left[\frac{\delta}{\delta \varepsilon} \Delta_a \varepsilon' \right]. \quad (3.5.12)$$

(Поле η не дает вклада в духовый детерминант Фаддеева–Попова.) Поэтому детерминант Фаддеева–Попова, связанный с антикоммутирующим сектором, есть

$$\det [\nabla_a] = \det [\nabla_z] \det [\nabla_{\bar{z}}]. \quad (3.5.13)$$

Проанализировать это выражение довольно сложно из-за большого числа степеней свободы, которыми обладает χ_a , являющийся одновременно двумерным спинором и двумерным вектором и поэтому имеющий четыре компоненты.

Как и прежде, простейший способ вычислить определитель опе-

ратора – выразить его через экспоненту от действия:

$$\det[V_\alpha] = \int D\beta D\gamma e^{-S_{\text{gh}}}, \quad (3.5.14)$$

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \beta \bar{\partial} \gamma + \text{компл.-сопр. выраж.},$$

где теперь духовые поля β и γ суть *коммутирующие* переменные. (Хотя это действие выглядит похожим на найденное ранее для бозонной струны духовое действие (2.4.4), существенно указать, что новые духовые поля β и γ преобразуются конформной группой иначе, чем духи b и c , потому что они были выведены из вариаций спинора χ_α , а не тензора g_{ab} . Мы подробнее обсудим это в следующей главе.)

Полное действие, тем самым, является теперь суммой исходного действия и суммы по антикоммутирующим духам b , c и коммутирующим духам β , γ .

Мы легко можем вычислить тензор энергии-импульса и суперсимметричный ток для суперконформных духов. Взяв их моменты, мы получим алгебру супер-Вирасоро:

$$L_m^{\text{gh}} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m+n) : b_{m-n} c_n : + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} m + n \right) : \beta_{m-n} \gamma_n : , \quad (3.5.15)$$

$$F_m^{\text{gh}} = -2 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} b_{-n} \gamma_{m+n} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} n - m \right) c_{-n} \beta_{m+n} .$$

Аналогично, объединенное действие, включающее вклад духов, по-прежнему инвариантно относительно нильпотентного преобразования. Генератор этого нильпотентного преобразования дается оператором Q , где [14–16]

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (L_{-n} c_n + F_{-n} \gamma_n) - \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{m+n} : + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3n}{2} + m \right) c_{-n} \beta_{-m} \gamma_{m+n} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \gamma_{-m} \gamma_{-n} b_{m+n} - a c_0 . \quad (3.5.16)$$

Здесь L и F – генераторы, зависящие только от осцилляторов a и d . Если положить $Q^2 = 0$, мы приходим к равенствам

$$D = 10, \quad (3.5.17)$$

$$a = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ (NS)}, \\ 0 \text{ (R)}. \end{cases}$$

Условие, выделяющее физические состояния, примет вид

$$Q|\text{физ}\rangle = 0. \quad (3.5.18)$$

Решая это уравнение, получаем обычные условия для физических состояний:

$$\text{NS: } \begin{cases} (L_0 - \frac{1}{2})|\varphi\rangle = 0, \\ G_r|\varphi\rangle = 0; \quad r > 0, \end{cases} \quad (3.5.19)$$

$$\text{R: } \begin{cases} (L_0)|\varphi\rangle = 0, \\ F_n|\varphi\rangle = 0; \quad n > 0. \end{cases} \quad (3.5.20)$$

Вычислим теперь вклад аномалий от этих осцилляторов. Мы обнаружим, что эти два вклада в сумме дают нулевую аномалию, но лишь в десятимерии. Вклад духов равен

$$\{F_m^{\text{gh}}, F_n^{\text{gh}}\} = 2L_{m+n}^{\text{gh}} - 5m^2. \quad (3.5.21)$$

Аномальный вклад сектора Рамона был равен $Dm^2/2 + 2a$. Итак, получаем

$$\frac{1}{2}D + 2a - 5m^2 = 0, \quad (3.5.22)$$

что фиксирует значения параметров

$$D = 10, \quad a = 0. \quad (3.5.23)$$

Аналогично рассмотрим значение аномалии для NS-сектора

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{4} - 5r^2. \quad (3.5.24)$$

Оно должно компенсировать аномалию, происходящую из бозонного сектора, которая равна $D(r^2 - 1/4)/2 + 2a$. Итак,

$$\frac{1}{2}D(r^2 - 1/4) + 2a + \frac{1}{4} - 5r^2 = 0. \quad (3.5.25)$$

Это выражение обращается в нуль при

$$D = 10, \quad a = 1/2. \quad (3.5.26)$$

§ 3.6. ПРОЕКЦИЯ GSO

Действие (3.4.4) для модели NS-R не было инвариантным относительно десятимерной пространственно-временной суперсимметрии. Хотя это неочевидно, теория NS-R также инвариантна относительно указанной группы преобразований, если сделать некоторое обрезание фоковского пространства. Чтобы это увидеть, рассмотрим сначала пространство состояний струны.

Общее число бозонных состояний на уровне n равно числу способов

представления целого числа n в виде суммы целых чисел, т.е. $p(n)$. Сначала продемонстрируем это на примере для уровня 4. Общее число состояний, являющихся собственными функциями гамильтониана, на этом уровне равно пяти:

$$(a_{-1})^4|0\rangle; \quad (a_{-2})^2|0\rangle; \quad a_{-1}a_{-3}|0\rangle; \\ (a_{-1})^2a_{-2}|0\rangle; \quad a_{-4}|0\rangle. \quad (3.6.1)$$

Заметим, что это в точности совпадает с числом способов, которыми число 4 можно представить как сумму целых чисел, т.е. $p(4)$. В общем случае каждое состояние на уровне N можно представить как один из способов разбиения на целочисленные слагаемые целого N :

$$|\varphi\rangle = a_{-1}^{\lambda_1} a_{-2}^{\lambda_2} a_{-3}^{\lambda_3} \cdots a_{-m}^{\lambda_m} |0\rangle, \quad (3.6.2)$$

где

$$R|\varphi\rangle = N|\varphi\rangle, \quad (3.6.3)$$

$$N = \sum_{i=1}^m n_i^{\lambda_i},$$

а R -числовой оператор для этого пространства.

В статистической механике мы часто вводим статистическую сумму, которая показывает, какое число состояний имеется для заданного энергетического уровня:

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-H\tau} | n \rangle. \quad (3.6.4)'$$

Мы увидим, что статистическая сумма полезна, поскольку позволяет подсчитать число состояний струны:

$$Z = \text{Tr}(x^R), \quad (3.6.5)$$

$$x = e^{-\tau}. \quad (3.6.6)$$

Коэффициент при x^N в этом разложении в степенной ряд есть не что иное, как число способов разбиения N на целочисленные слагаемые, т.е. $p(N)$. Этот след можно вычислить разными способами. Простейший из них – ввести когерентные состояния:

$$1 = \int d\lambda d\lambda^* e^{-|\lambda|^2} |\lambda\rangle \langle \lambda|. \quad (3.6.7)$$

Так, след можно представить в виде

$$Z = \int d\lambda d\lambda^* e^{-|\lambda|^2} \langle \lambda | x^R | \lambda \rangle. \quad (3.6.8)$$

Вычислив этот интеграл, мы найдем

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-26}. \quad (3.6.9)$$

Для проверки мы можем разложить эту функцию в степенной ряд (в

одном измерении) и показать, что каждый коэффициент при x^N равен $p(N)$, т. е.

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} p(i) x^i. \quad (3.6.10)$$

Эта функция связана с известной математикам функцией Харди–Рамануджана. Действительно, некоторые из волшебных свойств струнной модели происходят из тождеств, справедливых для функции Харди–Рамануджана.

Затем нам хотелось бы вычислить состояния секторов NS и R, чтобы проверить, являются ли они суперсимметричными. По крайней мере нам нужно, чтобы число состояний на массовой поверхности было равно в обоих секторах.

Заметим, что фоковское пространство модели NS–R в действительности разделяется на два фоковских пространства меньших размеров; принадлежность состояния к одному из них зависит от того, четно или нечетно число осцилляторов типа b , отвечающих этому состоянию. Поскольку b -осцилляторы антикоммутируют, общее число N внешних линий должно быть четным, поскольку b -осцилляторы должны стягиваться попарно. Поэтому мы можем определить оператор « G -четности», который просто подсчитывает число b -осцилляторов в данном состоянии. Он равен -1 для нечетного числа и $+1$ для четного:

$$G = (-1)^{\sum_{r=1,3} b \cdot b_r}. \quad (3.6.11)$$

Если взять сектор теории с четной G -четностью, это немедленно устранит тахион, и самым нижним состоянием останется безмассовая векторная частица, у которой есть $10 - 2 = 8$ физических состояний.

Сектор Рамона также допускает уменьшение числа состояний. Если потребовать, чтобы самым низкоэнергетическим безмассовым фермионом был майорана-вейлевский, то у него останется только 16 мод. Подсчитать это можно так. Драковский спинор в D -мерном пространстве имеет $2^{(1/2)D} = 32$ комплексных компонент. Требование, чтобы он был майорановским (вещественным), уменьшает число компонент вдвое, а требование, чтобы он был вейлевским, — еще вдвое. Вычислим теперь статистическую сумму, подсчитывающую общее число состояний на каждом уровне. Для NS-сектора получим

$$\begin{aligned} f_{\text{NS}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n x^n = \\ &= x^{-1/2} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (1 + G) x^R \right], \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

где

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^+ a_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_r^+ b_r. \quad (3.6.13)$$

След можно вычислить в явном виде, что дает

$$f_{\text{NS}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-8} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{n-1/2})^8 - \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{n-1/2})^8 \right]. \quad (3.6.14)$$

С другой стороны, след для сектора Рамона принимает вид

$$f_{\text{R}} = 8 \text{Tr}(x^R), \quad (3.6.15)$$

где

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^\dagger a_n + d_n^\dagger d_n). \quad (3.6.16)$$

Мы находим

$$f_{\text{R}} = 8 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-8} (1 + x^n)^8. \quad (3.6.17)$$

На первый взгляд может показаться, что между этими двумя секторами нет никакой связи. Однако еще в 1829 г. Якоби показал, что эти два выражения в точности эквивалентны:

$$f_{\text{NS}} = f_{\text{R}}. \quad (3.6.18)$$

Это, конечно, не доказывает, что редуцированная модель NS–R суперсимметрична, но является необходимым условием наличия такой симметрии. Эта проекция называется проекцией GSO (по работе Глиози, Шерка и Олива [17]) и играет чрезвычайно важную роль в теории суперструн. (В гл. 5 будет показано, что GSO-проекция эквивалентна модулярной инвариантности однопетлевой амплитуды замкнутой струны.)

Итак, один из серьезных недостатков подхода NS–R состоит в том, что пространственно-временная суперсимметрия совершенно не очевидна. Второй серьезный недостаток этой модели – то, что с вертексной функцией для испускания фермионов весьма трудно работать и она не обладает привлекательным поведением при калибровочных преобразованиях Вирасоро. В результате потребовалось много лет, прежде чем удалось найти двухфермионные амплитуды рассеяния. В теории NS–R вертексы взаимодействия между бозонами и фермионами суть [18–22]

$$\begin{aligned} V_{\text{BB}} &= k_\mu \Psi^\mu V_0, \\ V_{\text{FF}} &= \gamma_{11} (-1)^{\sum_n d_n \cdot d_n} V_0, \\ V_{\text{FB}} &= e^{-L_1^d} W V_0, \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

где L_1^d – генератор Вирасоро, а

$$\begin{aligned} W &= \langle 0 |_B \exp \left[\frac{1}{i\sqrt{2}} \sum_{m=0, r=1/2}^{\infty} (-1)^{m-r} \binom{m-\frac{1}{2}}{r-\frac{1}{2}} d_m^{\mu\dagger} b_{\mu r} \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{r,s=1/2}^{\infty} \frac{r-s}{r+s} (-1)^{r+s} \binom{-\frac{1}{2}}{r-\frac{1}{2}} \binom{-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} b_r^\mu b_{s\mu} \right\} \times \gamma_{11} |u\rangle_F. \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

Вертекс (3.6.20) осуществляет переход от бозонного фоковского пространства к фермионному фоковскому пространству, поскольку слева стоит бозонный вакуум, а справа – фермионный. К сожалению, конформный спин этого вертекса равен $3/8$, что затрудняет построение амплитуды, обладающей конформной инвариантностью.

Итак, хотя модель NS–R привлекательна, поскольку по существу это свободная теория в конформной калибровке, но трудности с фермионным сектором вынуждают нас искать более сложные варианты теории. Ниже мы изучим действие Грина–Шварца, которое эквивалентно GSO-проекции модели NS–R и обладает явной пространственно-временной суперсимметрией.

§ 3.7. СУПЕРСТРУНЫ

Хотя модель NS–R была простой и изящной, она обладает лишь суперсимметрией на двумерной мировой поверхности, но не подлинной десятимерной суперсимметрией. Представим теперь действие Грина–Шварца, для которого десятимерная суперсимметрия является явной [23, 24]:

$$S = \frac{-1}{4\alpha'\pi} \int d\sigma d\tau \{ \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + 2i\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) - \\ - 2\varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \}, \quad (3.7.1)$$

где

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A. \quad (3.7.2)$$

В этих выражениях оба поля θ^A ($A = 1, 2$) являются настоящими пространственно-временными фермионными полями (а не пространственно-временными векторами, как в модели NS–R). Эти десятимерные спиноры, однако, преобразуются в двух измерениях как скаляры, а не как двухкомпонентные спиноры. Это действие, подобно действию суперсимметричной точечной частицы (3.1.1), инвариантно относительно глобальной суперсимметрии:

$$\delta\theta^A = \varepsilon^A, \\ \delta X^\mu = i\bar{\varepsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A. \quad (3.7.3)$$

Однако в доказательстве нам придется воспользоваться тождеством

$$\Gamma_\mu \psi_{[1} \bar{\psi}_2 \Gamma^\mu \psi_3] = 0. \quad (3.7.4)$$

Чтобы доказать это тождество, нужно применить преобразование Фирца. Оказывается, что (3.7.4) справедливо лишь при следующих условиях:

- (1) $D = 3$ и фермионы майорановские,
- (2) $D = 4$ и фермионы майорановские или вейлевские,
- (3) $D = 6$ и фермионы вейлевские,
- (4) $D = 10$ и фермионы одновременно вейлевские и майорановские.

Стандартное дираковское представление является комплексным; оно существует для любой размерности пространства-времени. Майорановское представление матриц Дирака – то, при котором все они вещественные (или мнимые). Поэтому у них вдвое меньше компонент, чем в дираковском представлении. Это представление существует лишь для размерности $D = 2, 3, 4 \pmod{8}$. Вейлевское представление матриц Дирака – то, при котором половина компонент устраняется применением вейлевского оператора проектирования:

$$\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{D+1}); \quad \Gamma_{D+1} = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_{D-1}.$$

Вейлевское представление возможно лишь при четной размерности пространства-времени. И, наконец, спиноры, являющиеся одновременно майорановскими и вейлевскими, можно определить только в размерности $2 \pmod{8}$:

Майорана-вейлевский спинор: $D = 2 \pmod{8}$.

Выберем для рассмотрения майорана-вейлевские спиноры в десятимерном пространстве.

Для доказательства локальной суперсимметричности действия (3.7.1) в десятимерии сначала построим следующие операторы проектирования, которые проектируют на самодуальные и антисамодуальные части двумерных векторов:

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} \pm \varepsilon^{\alpha\beta} / \sqrt{g}). \quad (3.7.5)$$

Этот оператор проектирования имеет следующие свойства:

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} P_{\pm}^{\gamma\delta} = P_{\pm}^{\alpha\delta},$$

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} P_{\mp}^{\gamma\delta} = 0,$$

$$\chi^{1\alpha} = P_{-}^{\alpha\beta} \chi_{\beta}^1,$$

$$\chi^{2\alpha} = P_{+}^{\alpha\beta} \chi_{\beta}^2.$$

Здесь суперсимметричный параметр дается формулой $\chi^{A\alpha a}$, где $A = 1$ или 2 , α представляет двумерный векторный индекс, а a – спинорный индекс в десятимерии. Обычно он будет опускаться. Заметим, что два последних свойства означают самодуальность или антисамодуальность χ при $A = 2$ или $A = 1$ соответственно.

Тогда можно показать, что действие инвариантно относительно

преобразований

$$\begin{aligned}\delta\theta^A &= 2i\Gamma\cdot\Pi_\alpha\kappa^{A\alpha}, \\ \delta X^\mu &= i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A, \\ \delta(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}) &= -16\sqrt{g}(P_-^{\alpha\gamma}\bar{\kappa}^{1\beta}\partial_\gamma\theta^1 + P_+^{\alpha\gamma}\kappa^{2\beta}\partial_\gamma\theta^2).\end{aligned}\tag{3.7.6}$$

Большое достижение действия Грина–Шварца – то, что оно явным образом содержит десятимерную суперсимметрию. Поскольку основное поле теперь является настоящим антикоммутирующим пространственно-временным спинором (а не антикоммутирующим векторным полем, как в теории NS–R), мы можем в явном виде построить оператор Q_α , обладающий пространственно-временной суперсимметрией.

Большой недостаток этого представления, однако, – то, что наивное ковариантное квантование, как и в случае точечных частиц, неосуществимо. Снова, как и в формуле (3.1.9) для точечных частиц, нам приходится столкнуться с тем фактом, что соотношения квантования нелинейны, поскольку

$$\pi_A = \frac{\delta L}{\delta\psi_A} \sim i\Gamma^\mu\partial_\sigma X_\mu\theta^A + \dots\tag{3.7.7}$$

Вследствие этого коммутационные соотношения между полями сильно нелинейны. Что еще хуже, оказывается, что они на самом деле обратно пропорциональны связям, т. е., скорее всего, не существуют [2, 24–32].

В результате мы вынуждены пользоваться квантованием в переменных светового конуса.

§ 3.8. КВАНТОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ ГРИНА–ШВАРЦА В КОНУСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Подсчет числа независимых степеней свободы спиноров важен при фиксации калибровки. В общем случае дираковские спиноры в D -мерном пространстве (D четно) имеют $2^{(1/2)D}$ комплексных компонент. Поэтому спиноры $\theta^{1,2}$ в десятимерном пространстве имеют $32 + 32$ комплексных компонент. Однако если потребовать, чтобы они были майорановскими спинорами, у нас останется вдвое меньше: $32 + 32$ вещественных компонент. Требуя, чтобы они были вейлевскими спинорами, снова уменьшаем их число еще вдвое, до $16 + 16$ вещественных компонент. Выбор калибровки светового конуса уменьшит число независимых компонент до $8 + 8$ вещественных компонент. Наконец, когда мы переходим к массовой поверхности и налагаем на эти спиноры уравнение Дирака, число независимых компонент снова уменьшается вдвое, до восьми. Но это в точности совпадает с числом компонент, необходимым для образования супермультиплетта с восемью бозонными компонентами струны X_i . Итак, мы располагаем именно тем числом компонент,

которое необходимо для выполнения условия суперсимметрии на массовой поверхности. Если N – число компонент спиноров θ^1 и θ^2 , то у нас имеются:

Дираковские: $N = 32 + 32$ комплексных компонент,
 Майорановские: $N = 32 + 32$ вещественных компонент,
 Майорана-вейлевские: $N = 16 + 16$ вещественных компонент,
 Конусная калибровка: $N = 8 + 8$ вещественных компонент,
 На массовой поверхности: $N = 8$ вещественных компонент.

Теперь приступим к этой редукции до калибровки светового конуса. Выберем следующие калибровочные связи:

$$\begin{aligned} \Gamma^+ \theta^{1,2} &= 0, \\ \Gamma^\pm &= 2^{-1/2} (\Gamma^0 \pm \Gamma^9). \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Поскольку для этих Γ -матриц справедливы тождества

$$(\Gamma^+)^2 = (\Gamma^-)^2 = 0, \quad (3.8.2)$$

то это означает, что ровно половина исходных $16 + 16$ компонент указанных спиноров устраняется. Окончательное выражение для действия в калибровке светового конуса становится замечательно простым:

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau (\partial_a X^i \partial^a X^i - i S \rho^b \partial_b S). \quad (3.8.3)$$

Здесь сделана подстановка

$$\sqrt{\rho^+} \theta \rightarrow S. \quad (3.8.4)$$

Здесь важно отметить, что все сложные нелинейные члены в (3.7.1), препятствовавшие простому ковариантному квантованию суперструны, теперь исчезли. (Заметим, что, кроме того, произошло удивительное явление. В ковариантном действии Грина–Шварца θ^1 и θ^2 в двумерном пространстве были независимыми друг от друга скалярами. Теперь, в калибровке светового конуса, эти два независимых скаляра слились в один двумерный спинор.)

Квантование исключительно просто, потому что система свелась к системе свободных частиц (тогда как ковариантная теория включала взаимодействия). Уравнения движения – это уравнения для свободных струн:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau + \partial_\sigma) S^{1a} &= 0, \\ (\partial_\tau - \partial_\sigma) S^{2a} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

Коммутационные соотношения суть

$$\{S^{Aa}(\sigma, \tau), S^{Bb}(\sigma', \tau)\} = \pi \delta^{ab} \delta^{AB} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.8.6)$$

Однако, как и прежде, мы можем наложить разные граничные условия

на эти поля. Для открытой струны (тип I) имеем следующие граничные условия:

$$\begin{cases} S^{1a}(0, \tau) = S^{2a}(0, \tau), \\ S^{1a}(\pi, \tau) = S^{2a}(\pi, \tau). \end{cases} \quad (3.8.7)$$

Заметим, что эти два струнных поля обладают одинаковой киральностью $SO(8)$. Причина в том, что только эти соотношения совместимы с глобальным преобразованием суперсимметрии, которые приравнивает два суперсимметричных параметра ϵ^A . Это означает, что открытая струна типа I имеет только суперсимметрию с $N = 1$. (Обращение знаков в предыдущем уравнении, дающее противоположные киральности, сделало бы суперсимметрию совершенно невозможной. Такой выбор действительно делается в другом варианте теории струн, а именно в теории $O(16) \otimes O(16)$.) Разложение по нормальным модам поэтому имеет вид

$$\begin{aligned} S^{1a}(\sigma, \tau) &= 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau - \sigma)}, \\ S^{2a}(\sigma, \tau) &= 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau + \sigma)}, \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

где

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta^{ab} \delta_{n, -m}. \quad (3.8.9)$$

Для замкнутой струны (тип II), однако, у нас действительно есть две возможности: поля могут быть либо киральными, либо нет. Замкнутые струны по определению периодичны по параметру σ , что дает следующие разложения по нормальным модам:

$$\begin{aligned} S^{1a}(\sigma, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-2in(\tau - \sigma)}, \\ S^{2a}(\sigma, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_n^a e^{-2in(\tau + \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Если эти два поля имеют противоположные киральности, их называют полями типа IIA. Если у них одинаковая киральность, совпадающая с киральностью струн типа I, то их называют полями типа IIB:

$$\begin{aligned} \text{Тип I} &= \begin{cases} \text{открытые и замкнутые струны,} \\ \text{одинаковые киральности,} \end{cases} \\ \text{Тип IIA} &= \begin{cases} \text{замкнутая струна,} \\ \text{противоположные киральности,} \end{cases} \\ \text{Тип IIB} &= \begin{cases} \text{замкнутая струна,} \\ \text{одинаковые киральности.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

Спектр суперструны в конусной калибровке особенно привлекателен тем, что на массовой поверхности теория суперсимметрична, а это означает, что все частицы сразу оказываются упорядочены таким образом, что спиральные состояния бозонов соответствуют числу фермионов. Масса каждой частицы определяется гамильтонианом:

$$N = \alpha'(\text{масса})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a). \quad (3.8.12)$$

Для струны типа I основное состояние теории состоит из безмассовой векторной частицы и ее спинорного партнера. Пусть $|i\rangle$ представляет восемь физических поперечных поляризаций безмассового векторного поля. Тогда спинорный партнер этого поля $|a\rangle$ может быть представлен в виде

$$|a\rangle = \frac{i}{8} (\gamma_i S_0)^a |i\rangle. \quad (3.8.13)$$

Можно нормировать наши состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle i, j \rangle &= \delta_{ij}, \\ \langle a | b \rangle &= \frac{1}{2} (h \gamma^+)^{ab}, \\ |i\rangle &= \frac{i}{8} (\bar{S}_0 \gamma_{i+})^a |a\rangle; \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

здесь h – вейлевский оператор проектирования. (Будем использовать следующее обозначение: $\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ равно произведению Γ -матриц, просуммированному по всем перестановкам индексов. Нормировка такова, что $\gamma^{12} = \gamma^1 \gamma^2$.)

Если бы мы квантовали десятимерную супермаксвелловскую теорию в калибровке светового конуса, то суперсимметричной паре (A_μ, ψ^a) соответствовал бы

$$\text{Суперсимметричный мультиплет: } \begin{cases} A_i \rightarrow |i\rangle, \\ \psi^a \rightarrow |a\rangle. \end{cases} \quad (3.8.15)$$

Таким образом, конусная теория воспроизводит супермаксвелловскую теорию на самом нижнем уровне.

На следующем уровне у нас будет 128 бозонных и 128 фермионных состояний:

$$128 \text{ бозонов } \begin{cases} \alpha_{-1}^i |j\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \\ S_{-1}^a |b\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \end{cases} \quad (3.8.16)$$

$$128 \text{ фермионов } \begin{cases} \alpha_{-1}^i |a\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \\ S_{-1}^a |i\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния.} \end{cases} \quad (3.8.17)$$

На уровне $N = 2$ имеется 1152 бозона и столько же фермионов:

$$\begin{aligned}
 1152 \text{ бозона} & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |k\rangle \rightarrow 228 \text{ состояний,} \\ S_{-1}^a S_{-1}^b |i\rangle \rightarrow 224 \text{ состояния,} \\ \alpha_{-2}^i |j\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \\ \alpha_{-1}^i S_{-1}^a |b\rangle \rightarrow 512 \text{ состояний,} \\ S_{-2}^a |b\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \end{array} \right. \\
 1152 \text{ фермиона} & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1}^i S_{-1}^a |j\rangle \rightarrow 512 \text{ состояний,} \\ S_{-2}^a |i\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \\ \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |a\rangle \rightarrow 288 \text{ состояний,} \\ \alpha_{-2}^i |a\rangle \rightarrow 64 \text{ состояния,} \\ S_{-1}^a S_{-1}^b |c\rangle \rightarrow 224 \text{ состояния.} \end{array} \right. \quad (3.8.18)
 \end{aligned}$$

Эту процедуру можно повторить на следующем уровне, на котором у нас будет 15360 состояний.

Неудивительно, что можно перегруппировать эти массивные мультиплеты также и в соответствии с группой $O(9)$. Причина состоит в том, что *безмассовая* D -мерная супергравитация после компактификации дает $D - 1$ массивных состояний. Так, сектор $N = 1$, содержащий 128 бозонов и 128 фермионов, можно перегруппировать в виде $44 + 84$ бозона в неприводимых представлениях группы $O(9)$ и одного 128-мультиплета для фермионов со спином $3/2$. На уровне $O(9)$ бозоны перегруппируются в виде представлений $9 + 36 + 126 + 156 + 231 + 594$ группы $O(9)$, тогда как фермионы будут перегруппированы в виде $16 + 128 + 432 + 576$.

Для замкнутой струны типа II спектр становится даже еще более интересным, поскольку мы получаем супергравитацию на безмассовом уровне, содержащем 128 бозонов и 128 фермионов:

$$\begin{array}{l} \text{Суперсимметричный} \\ \text{мультиплет} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 128 \text{ бозонов } |i\rangle |j\rangle; |a\rangle |b\rangle, \\ 128 \text{ фермионов } |i\rangle |a\rangle; |a\rangle |i\rangle, \end{array} \right. \quad (3.8.19)$$

где первое состояние относится к S -осциляторам, а второе — к \tilde{S} -осциляторам. Если фермионы обладают противоположной киральностью (тип IIA), то это представляет $N = 2$, ($D = 10$)-редукцию обычной $N = 1$, $D = 11$ супергравитации.

Однако если струнные поля для фермионов имеют одинаковую киральность, то возникают осложнения. Такая теория содержит десятимерный антисимметричный тензор четвертого ранга с 35 независимыми компонентами в восьмимерном пространстве. Было показано, что для такой частицы никакого ковариантного действия не существует! Тем самым мы сталкиваемся с необычной ситуацией, в которой для этого сектора не существует суперсимметричного действия. Теория, разумеется, остается корректно определенной. Ее

формулировка в калибровке светового конуса и элементы S -матрицы вычислимы в явном виде. Однако S -матрица, строго говоря, видимо, не выводится из ковариантного действия [33].

Наконец, если мы ограничимся симметризованными состояниями теории типа I, мы получим супергравитацию с $N = 1$, $D = 10$. Подытожим предельные формы этих теорий при нулевом наклоне реждевской траектории:

$$\begin{aligned} \text{Тип I} &\rightarrow N = 1, D = 10 \text{ супер-Янг-Миллс,} \\ \text{Тип I} &\rightarrow N = 1, D = 10 \text{ супергравитация,} \\ \text{Тип IIА} &\rightarrow N = 2, D = 10 \text{ супергравитация,} \\ \text{Тип IIВ} &\rightarrow \text{не существует.} \end{aligned} \quad (3.8.20)$$

При переходе к более высоким уровням становится все труднее продолжать этот анализ спектра для демонстрации суперсимметрии. Мы можем доказать, однако, что весь спектр, при сколь угодно высоких порядках, суперсимметричен, просто показав, что существуют генераторы суперсимметрии с коммутационными соотношениями, коммутирующие с гамильтонианом. Мы покажем это, в явном виде вычислив генераторы суперсимметрии во всех порядках.

В калибровке светового конуса два суперсимметричных преобразования (3.7.6) и (3.7.3) становятся весьма простыми:

$$\begin{cases} \delta S^a = (2p^+)^{1/2} \eta^a, \\ \delta X^i = 0, \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} \delta S^a = -i\sqrt{p^+} \rho^a \partial_\alpha X^i \gamma_{\alpha\dot{a}}^i \varepsilon^{\dot{a}}, \\ \delta X^i = p^{+1/2} \gamma_{\alpha\dot{a}}^i \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} S^a. \end{cases} \quad (3.8.21)$$

(См. представление Γ -матриц в приложении. Существует 8 представлений группы $SO(8)$. Первое из них – векторное представление 8_v , которое мы обозначим индексом i . Два других представления являются спинорными. Мы будем использовать для одного из них индекс a , а для второго – индекс \dot{a} . Таким образом, индексы Γ -матрицы преобразуются как $\gamma_{\alpha\dot{a}}^i$.) Можно найти явный вид двух генераторов суперсимметрии, выраженных через поля; он воспроизводит преобразования, даваемые формулой (3.8.21):

$$Q^a = (2p^+)^{1/2} S_0^a, \quad Q^{\dot{a}} = (p^+)^{-1/2} \gamma_{\alpha\dot{a}}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{-n}^a \alpha_n^i. \quad (3.8.22)$$

Теперь вычисление антикоммутационных соотношений между этими генераторами несложно:

$$\begin{cases} \{Q^a, Q^b\} = 2p^+ \delta^{ab}, \\ \{Q^a, Q^{\dot{a}}\} = \sqrt{2} \gamma_{\alpha\dot{a}}^i p^i, \\ \{Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}\} = 2H \delta^{\dot{a}\dot{b}}. \end{cases} \quad (3.8.23)$$

Здесь

$$H = \frac{1}{p^+} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha'_{-n} \alpha'_n + n S_{-n}^a S_n^a] + \frac{1}{2} p_i^2 \right\}. \quad (3.8.24)$$

Доказательство лоренц-инвариантности теории в конусной калибровке теперь нужно расширить до доказательства супер-Пуанкаре инвариантности суперструны. Кроме обычных коммутаторов мы должны показать, что

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] \sim -\frac{1}{2} i (\gamma^{\mu\nu})_a^\beta Q_\beta, \quad (3.8.25)$$

где α, β представляют спинорные индексы в десятимерии. Снова трудности возникают только с коммутатором, содержащим минусовые компоненты осцилляторов:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i + (m - \frac{1}{2}n) S_{n-m}^a S_m^a). \quad (3.8.26)$$

Вызывающий трудности коммутатор содержит дополнительный член:

$$M^{-i} = M_0^{-i} + \frac{-i}{4p^+} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} S_{n-m}^a \gamma_{ab}^{ij} S_m^b \alpha'_{-n}. \quad (3.8.27)$$

Поскольку теория уже однозначно определена как десятимерная, мы находим

$$[M^{-i}, M^{-j}] = 0. \quad (3.8.28)$$

Кроме того, мы находим также коммутатор для группы супер-Пуанкаре:

$$[M^{-i}, Q^a] = \frac{-i}{\sqrt{2}} \gamma_{aa}^{ia} Q^a. \quad (3.8.29)$$

Этим завершается доказательство того, что спектр модели Грина-Шварца обладает десятимерной суперсимметрией на всех уровнях.

§ 3.9. ВЕРШИНЫ И ДЕРЕВЬЯ

Теперь перейдем к вопросу о взаимодействиях. Нам придется полагаться на несколько подсказанных опытом предположений о характере вертексных функций, однако потребовав, чтобы вершины преобразовывались определенным образом под действием суперсимметрии, мы тем самым наложим жесткие условия на их окончательный вид. Установив пространственно-временную суперсимметрию для суперструны, покажем теперь, что это ограничение достаточно сильное, чтобы с его помощью построить деревья. Мы потребуем, чтобы операторы суперсимметрии превращали фермионные вершины в бо-

зонные и наоборот. Это наложит на нашу теорию огромное число ограничений, которые приведут к однозначному определению самой теории.

Мы требуем, чтобы в результате преобразования суперсимметрии, порожденного генераторами Q , вертексы V_F и V_B переходили друг в друга, т. е.

$$\begin{aligned} [\eta^a Q^a, V_F(u, k)] &\sim V_B(\tilde{\zeta}, k), \\ [\eta^a Q^a, V_B(\zeta, k)] &\sim V_F(\tilde{u}, k), \\ [\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_F(\hat{u}, k)] &\sim V_B(\hat{\zeta}, k), \\ [\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_B(\hat{\zeta}, k)] &\sim V_F(\hat{u}, k), \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

где ζ – тензор поляризации безмассовой векторной частицы, а u – его суперсимметричный партнер, майорана-вейлевский спинор. Заметим, что эти правила осложняет тот факт, что преобразование суперсимметрии с необходимостью порождает вращения в пространстве-времени, так что ζ и u должны также соответствующим образом переходить в $\tilde{\zeta}$, \tilde{u} и $\hat{\zeta}$, \hat{u} при этом преобразовании суперсимметрии.

Естественное допущение – предположить, что эти вертексы можно выразить в виде

$$\begin{cases} V_B(\zeta, k) = \zeta \cdot B e^{ik \cdot X}, \\ V_F(u, k) = u F e^{ik \cdot X} \end{cases} \quad (3.9.2)$$

для некоторого вектора B и спинора F . Замечательно, что после подробных вычислений в калибровке светового конуса мы сможем удовлетворить всем этим условиям при простых значениях B и F .

Начнем с вычисления полученных в результате вращения значений спиноров и тензоров поляризации. Чтобы найти, как они преобразуются, возьмем нулевые компоненты генераторов суперсимметрии и посмотрим, как эти компоненты преобразуют состояния. На нулевом уровне находим:

$$\begin{aligned} Q^a &\rightarrow (2p^+)^{1/2} S_0^a, \\ Q^{\dot{a}} &\rightarrow (p^+)^{-1/2} (\gamma^i p^i)_{a\dot{a}} S_0^a. \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

Эти нулевые компоненты преобразуют тензор поляризации в майорана-вейлевские спиноры. Определим

$$\begin{cases} \eta^a Q^a |u\rangle = |\tilde{\zeta}\rangle, \\ \eta^a Q^a |\zeta\rangle = |\tilde{u}\rangle, \\ \varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} |\zeta\rangle = |\hat{u}\rangle, \\ \varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} |u\rangle = |\hat{\zeta}\rangle. \end{cases} \quad (3.9.4)$$

Теперь подставим (3.9.3) в (3.9.4) и найдем преобразованные спиноры и векторы. Теперь несложно показать, что повернутые спиноры и

тензоры поляризации суть

$$\begin{aligned}
 \zeta^i &= (\gamma^i)_{aa} \eta^a u^{\dot{a}}, \\
 \tilde{u}^{\dot{a}} &= \eta^a k^+ (\gamma^i \zeta^i)_{a\dot{a}}, \\
 \hat{u}^{\dot{a}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (\varepsilon \gamma_{ij})^{\dot{a}} k^i \zeta^j, \\
 \hat{\zeta}^i &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon^{\dot{a}} \gamma_{a\dot{a}}^i u) + \frac{\sqrt{2}}{k^+} \varepsilon^{\dot{a}} u^{\dot{a}} k^j.
 \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

Подставив (3.9.5) и (3.9.1), находим поля B и F :

$$\begin{aligned}
 B^+ &= p^+, \\
 B^i &= \dot{X}^i - R^{ij} k^j, \\
 F^{\dot{a}} &= (2p^+)^{-1/2} [(\gamma \cdot \dot{X} S)^{\dot{a}} + \frac{1}{3} : (\gamma^i S)^{\dot{a}} R^{ij} : k^j], \\
 F^a &= (p^+ / 2)^{1/2} S^a,
 \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

где

$$R^{ij} = \frac{1}{4} \gamma_{ab}^{ij} S^a S^b. \tag{3.9.7}$$

Теперь мы можем осуществить свертку по вертексам и пропагаторам и получить деревья. Большое преимущество этого подхода состоит в том, что становится возможным вычислять многофермионные амплитуды почти с такой же легкостью, с какой мы вычисляем многобозонные амплитуды. Например, пропагатор и амплитуда для рассеяния фермионов и бозонов даются формулами

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a + \frac{1}{2} p^2 \right\}^{-1}, \tag{3.9.8}$$

$$A = \langle 0; k_1 | V(k_2) D \dots V(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle, \tag{3.9.9}$$

где различные вертексы могут быть как фермионными, так и бозонными. Четырехточечная амплитуда, например, равна

$$A_4 = K \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}t\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t\right)}, \tag{3.9.10}$$

где K – матрица, дающая подходящую конфигурацию спинов для этой амплитуды. Если u представляет спинор, а ζ – поляризацию безмассовых полей, то:

$$\begin{aligned}
 K(u_1, \zeta_2, u_3, \zeta_4) &= -\frac{1}{2} t (\bar{u}_1 \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\lambda u_3) \zeta_{2\mu}(k_3 + k_4)_\nu \zeta_{4\lambda} + \\
 &+ \frac{1}{2} s (\bar{u}_1 \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\lambda u_3) \zeta_{4\mu}(k_2 + k_3)_\nu \zeta_{2\lambda},
 \end{aligned} \tag{3.9.11}$$

$$K(u_1, u_2, u_3, u_4) = -\frac{1}{2}s(\bar{u}_2 \Gamma^\mu u_3)(\bar{u}_1 \Gamma_\mu u_4) + \frac{1}{2}t(\bar{u}_1 \Gamma^\mu u_2)(\bar{u}_4 \Gamma_\mu u_3).$$

Как отмечалось выше, основная форма (3.9.10) для амплитуд рассеяния безмассовых спинора и вектора одна и та же. Единственное отличие возникает из-за фактора K .

§ 3.10 РЕЗЮМЕ

Итак, существуют две эквивалентные версии теории суперструн. Сравнительные преимущества и недостатки действий Невё-Шварца-Рамона и Грина-Шварца таковы:

- (1) Действие NS-R линейно и легко квантуется как ковариантно, так и в калибровке светового конуса. Деревья и петли для бозонов строятся легко. Оно обладает явной инвариантностью относительно двумерной суперсимметрии. Однако эти важные преимущества необходимо сопоставить с тем фактом, что десятимерная пространственно-временная суперсимметрия по меньшей мере совсем неочевидна. Поскольку оно основано на антикоммутирующих векторных полях ψ_μ , возникают трудности со статистикой спинов, для разрешения которых приходится применять проекцию GSO. Кроме того, вертекс для испускания фермиона весьма трудно применять, что делает вычисление многофермионной амплитуды практически неосуществимым.
- (2) Действие Грина-Шварца обладает явной десятимерной суперсимметрией на всех массовых уровнях. Оно построено на настоящих пространственно-временных спинорах, а не на антикоммутирующих векторных полях. Однако это действие сильно нелинейно, и его ковариантное квантование в настоящее время не представляется возможным. Пока что оно поддается квантованию лишь в калибровке светового конуса. Все амплитуды, включая многофермионные деревья, можно вычислить в этой нековариантной калибровке.

Подытожим теперь некоторые факты о теории NS-R. Полное действие NS-R дается выражением

$$L = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu + 2 \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta]. \quad (3.10.1)$$

Оно инвариантно относительно преобразований двумерной суперсимметрии

$$\begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu = -i \rho^\alpha \epsilon (\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha), \\ \delta e_\beta^\alpha = -2i \bar{\epsilon} \rho^\alpha \chi_\beta, \\ \delta \chi_\alpha = \nabla_\alpha \epsilon, \end{cases} \quad (3.10.2)$$

а также преобразований Вейля, репараметризации и локальных дву-

мерных преобразований Лоренца. Преимущество этого формализма состоит в том, что тензор энергии-импульса и суперсимметричный ток порождают некую алгебру, а именно алгебру супер-Вирасоро, которая позволяет нам явным образом устранить из теории все духовые состояния. Нам не приходится налагать эти калибровочные связи вручную, в отличие от случая суперконформно инвариантного действия.

Наша стратегия квантования будет такой же, как и для бозонной струны. Сначала мы найдем симметрии действия, затем извлечем из них алгебру, далее используем эту алгебру для устранения духовых состояний и получим унитарную теорию:

Действие \rightarrow Симметрии \rightarrow Ток \rightarrow Алгебра \rightarrow Связи \rightarrow Унитарность.

Если устранить тетраду и поле χ , мы получим теорию NS-R в суперконформной калибровке:

$$L = -\frac{1}{2\pi}(\partial_a X_\mu \partial^a X^\mu - i\bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu). \quad (3.10.3)$$

Вследствие симметрий исходного действия, являющегося суперсимметричным, мы можем построить приведенные ниже токи и положить их равными нулю:

$$J_a = \frac{1}{2}\rho^b \rho_a \Psi^\mu \partial_b X_\mu, \quad (3.10.4)$$

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\Psi}^\mu \rho_a \partial_b \Psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\Psi}^\mu \rho_b \partial_a \Psi_\mu. \quad (3.10.5)$$

Вычислив моменты этих связей, убеждаемся, что они образуют алгебру:

$$\text{NS: } \begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \\ [L_m, G_r] = (\frac{1}{2}m - r)G_{m+r}, \\ \{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r,-s}, \end{cases} \quad (3.10.6)$$

$$\text{R: } \begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m,-n}, \\ [L_m, F_n] = (\frac{1}{2}m - n)F_{m+n}, \\ \{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2\delta_{m,-n}. \end{cases}$$

Как и в бозонном случае, переход от континуального интеграла к формализму гармонических осцилляторов прост. Гамильтониан диагонален в фоковском пространстве гармонических осцилляторов, так что мы можем устранить все промежуточные континуальные интегралы.

Находим, что тахионная вертексная функция с весом 1 может быть

записана в виде

$$k_\mu \psi^\mu V_0. \quad (3.10.7)$$

Однако оказывается, что существуют два способа, или «картины», позволяющие выписать N -точечную амплитуду: они называются формализмами F_1 и F_2 . Правила образования N -точечных функций следующие:

$$F_1: \begin{cases} \text{Вертекс} = V, \\ \text{Пропагатор} = \frac{1}{L_0 - 1}, \\ \text{Тахион} = k_\mu \cdot b_{-1/2} |0; k\rangle; \alpha' k^2 = \frac{1}{2}, \\ \text{Вакуум} = |0; k\rangle; \alpha' k^2 = 1, \end{cases} \quad (3.10.8)$$

$$F_2: \begin{cases} \text{Вертекс} = V, \\ \text{Пропагатор} = \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}}, \\ \text{Тахион} = \text{Вакуум} = |0; k\rangle; \alpha' k^2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.10.9)$$

Преимущества и недостатки этих двух формализмов следующие:

- (1) В формализме F_1 намного легче доказать явную циклическую симметрию. Однако приходится тащить через все вычисления излишний груз вакуумного состояния, которое никак не взаимодействует с другими состояниями теории.
- (2) В формализме F_2 циклическая симметрия неочевидна, но устранение духов провести несложно. Преимущество картины F_2 в том, что мы работаем в фоковском пространстве меньшего объема.

N -точечная функция представляется в виде

$$A_N = \int d\mu_N \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1}, \dots, \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} | 0; 0 \rangle. \quad (3.10.10)$$

Хотя модель NS-R с проекцией GSO имеет то же число фермионных и бозонных состояний, но доказать, что теория действительно обладает пространственно-временной суперсимметрией, чрезвычайно сложно. Поэтому мы покажем такую симметрию, постулировав новое действие Грина-Шварца, содержащее настоящие пространственно-временные спиноры. Действие Грина-Шварца — это

$$S = \frac{-1}{4\alpha' \pi} \int d\sigma dt \left\{ \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + 2i \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) - 2 \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right\}, \quad (3.10.11)$$

где

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A. \quad (3.10.12)$$

Это действие инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta \theta^A &= \varepsilon^A, \\ \delta X^\mu &= i\bar{\varepsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A, \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

а также относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta \theta^A &= 2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \chi^{A\alpha}, \\ \delta X^\mu &= i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta \theta^A, \end{aligned} \quad (3.10.14)$$

$$\delta(\sqrt{g}g^{ab}) = -16\sqrt{g}(P_-^{\alpha\gamma} \bar{\chi}^{1\beta} \partial_\gamma \theta^1 + P_+^{\alpha\gamma} \chi^{2\beta} \partial_\gamma \theta^2).$$

Преимущество этой формулировки Грина–Шварца состоит в том, что она обладает пространственно-временной суперсимметрией на всех уровнях. Однако цена, которую за это приходится платить, — то, что ковариантное квантование теории, как хорошо известно, очень трудно, поскольку система включает взаимодействия даже на уровне свободных частиц. Поэтому мы переходим к калибровке светового конуса, в которой теория становится линейной:

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma dt (\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - i\bar{S}\rho^b \partial_b S). \quad (3.10.15)$$

Это действие обладает также пространственно-временной суперсимметрией, генераторы которой даются выражениями

$$\begin{aligned} Q^a &= (2p^+)^{1/2} S_0^a, \\ Q^i &= (p^+)^{-1/2} \gamma_{aa}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{-n}^a \alpha_n^i. \end{aligned} \quad (3.10.16)$$

Антикоммутиационные соотношения для этих генераторов даются формулами

$$\begin{cases} \{Q^a, Q^b\} = 2p^+ \delta^{ab}, \\ \{Q^a, Q^i\} = \sqrt{2} \gamma_{aa}^i p^i, \\ \{Q^i, Q^b\} = 2H \delta^{ab}, \end{cases} \quad (3.10.17)$$

где

$$H = \frac{1}{p^+} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a] + \frac{p_i^2}{2} \right\}. \quad (3.10.18)$$

Далее мы рассмотрим конформную теорию поля, сочетающую лучшие черты обоих формализмов — NS-R и Грина–Шварца.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gervais J. L., Sakita B. Nucl. Phys. **B34**, 632 (1971).
- [2] Siegel W. Phys. Lett. **128B**, 397 (1983); Nucl. Phys. **B263**, 93 (1985); Class. Quant. Grav. **2**, L95 (1985).
- [3] Brink L., Schwarz J. H. Phys. Lett. **100B**, 310 (1981).
- [4] Ramond P. Phys. Rev. **D3**, 2415 (1971).
- [5] Neveu A., Schwarz J. H. Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).
- [6] Neveu A., Schwarz J. H., Thorn C. B. Nucl. Phys. **B31**, 529 (1971).
- [7] Wess J., Zumino B. Nucl. Phys. **B70**, 39 (1974).
- [8] См. также Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Письма в ЖЭТФ, **13**, 323 (1971); Волков Д. В., Акулов В. П. Письма в ЖЭТФ, **16**, 621 (1972).
- [9] Virasoro M. A. (неопубликовано).
- [10] Aharonov Y., Casher A., Susskind L. Phys. Rev. **D5**, 988 (1972).
- [11] Brink L., Di Vecchia P., Howe P. Phys. Lett. **65B**, 471 (1976).
- [12] Deser S., Zumino B. Phys. Lett. **65B**, 369 (1976).
- [13] Более ранняя попытка описана в Iwasaki Y., Kikkawa K. Phys. Rev. **D8**, 440 (1973).
- [14] Ohta N. Phys. Rev. **D33**, 1681 (1986).
- [15] Ito M., Morozumi S., Nojiri S., Uehara S. Prog. Theor. Phys. **75**, 934 (1986).
- [16] Schwarz J. Suppl. Prog. Theor. Phys. **86**, 70 (1986).
- [17] Gliozzi F., Scherk J., Olive D. Nucl. Phys. **B122**, 253 (1977).
- [18] Thorn C. B. Phys. Rev. **D4**, 1112 (1971).
- [19] Brink L., Olive D., Rebbi C., Scherk J. Phys. Lett. **45B**, 379 (1973).
- [20] Mandelstam S. Phys. Lett. **46B**, 447 (1973).
- [21] Schwarz J. H., Wu C. C. Phys. Lett. **47B**, 453 (1973).
- [22] Bruce D., Corrigan E., Olive D. Nucl. Phys. **B95**, 427 (1975).
- [23] Green M., Schwarz J. H. Phys. Lett. **136B**, 367 (1984).
- [24] Green M., Schwarz J. H. Nucl. Phys. **B198**, 252, 441 (1982).
- [25] Hori T., Kamimura K. Prog. Theor. Phys. **73**, 476 (1985).
- [26] Kaku M., Lykken J. In: Symposium on Anomalies, Geometry and Topology (edited by W. A. Bardeen and A. R. White). World Scientific, Singapore, 1986.
- [27] См. также: Bengtsson I., Cederwall. Geteborg preprint 84-21.
- [28] Allen T. J., Cal Tech preprint CALT-68-1373.
- [29] Hori T., Kamimura K., Tatewaki M. Phys. Lett. **185B**, 367 (1987).
- [30] Crnkovic C. Phys. Lett. **173B**, 429 (1986).
- [31] Каллош Р. Е. Письма в ЖЭТФ **45**, 365 (1987); Phys. Lett. **195B**, 369 (1987).
- [32] Batalin I. A., Kallosh R. E., Van Proeyen A. KUL-TF-87/17.
- [33] Marcus N., Schwarz J. H. Phys. Lett. **115B**, 111 (1982).

КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ

§ 4.1. КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Одна из загадок теории суперструн – возможность сформулировать ее двумя способами. Первый из них – модель NS–R (после GSO-проекции), содержащая антикоммутирующие векторы, а второй – модель Грина–Шварца (GS) с настоящими антикоммутирующими спинорами. У каждой формулировки есть свои специфические достоинства и недостатки. В настоящей главе мы обсудим конформную теорию поля, которая позволит нам увидеть динамическую связь между этими двумя формулировками. Конформная теория поля Фридэна и Шенкера [1] сочетает лучшие черты обеих теорий. Конформная теория поля позволяет сделать следующее.

- (1) Ввести ковариантные антикоммутирующие спинорные поля, исходя только из свободных полей. GS-формализм, напротив, основан на сложных взаимодействующих полях, что делает ковариантное квантование слишком трудным.
- (2) Построить явным образом ковариантные древесные диаграммы для многофермионного рассеяния. В (NS–R)-формализме сделать это практически невозможно из-за необходимости вводить сложные операторы проектирования для устранения духов. Конформная теория поля заменяет эти неуклюжие операторы проектирования свободными духами Фаддеева–Попова, с которыми легко работать.
- (3) Переходить от GS-формулировки к (NS–R)-формулировке и обратно и установить связь между ними. Это позволяет выражать результаты, полученные с помощью одной из них, в терминах другой:

$$\text{Конформная теория поля} \leftrightarrow \begin{cases} \text{GS-модель,} \\ \text{(NS–R)-модель.} \end{cases}$$

- (4) Построить ковариантные генераторы суперсимметрии. Это невозможно сделать в (NS–R)-формулировке, а в GS-формулировке возможно лишь в калибровке светового конуса.
- (5) Описать оба сектора теории, NS и R, с помощью одного и того же вакуума вместо использования громоздкого формализма двух различных гильбертовых пространств, основанных на двух вакуумах, $|0\rangle_{NS}$ и $|0\rangle_{R u_a}$. Это осуществляется с помощью процесса, называемого бозонизацией, т. е. построения фермионов из бозонов в двумерном пространстве.

Однако за возможность построения такой конформной теории поля некоторую небольшую цену придется заплатить. В этом формализме весьма быстро размножаются духи и антидухи, особенно для суперструн, и необходимо ввести странное явление, называемое «сменой картины» (см. (3.3.18), (3.3.19)). К счастью, эти духи и антидухи являются свободными полями и, следовательно, с ними легко работать. Кроме того, конформную теорию поля, по-видимому, нельзя вывести ни из какого действия, в отличие от формализмов GS и NS-R. Эта теория подчеркивает теоретико-групповое поведение полей вместо того, чтобы исходить из действия. Поэтому мы предполагаем, что существует еще не открытое первично квантованное действие более высокого порядка, выходящее за рамки действий GS и NS-R.

(Мы должны подчеркнуть, что конформная теория поля не является теорией поля в смысле вторичного квантования, т.е. мы начинаем с формализма Швингера, Томонаги и Фейнмана. Вторично квантованная полевая теория струн будет рассмотрена в части II настоящей книги.)

Сущность конформной теории поля состоит в том, что в ней подчеркивается использование одной лишь конформной инвариантности для вычисления корреляционных функций, связывающих различные поля [2-6]. Весьма примечательно, что конформная инвариантность сама по себе достаточна для почти полного определения структуры N -точечных амплитуд рассеяния. Например, в (2.6.9) нам встречались операторы, имеющие следующие матричные элементы:

$$\langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle = f(z_1 - z_2). \quad (4.1.1)$$

Здесь функция f может быть степенью или логарифмом. Скажем, матричный элемент древесных амплитуд для двух бозонных струн есть

$$\langle X(w) X(z) \rangle \sim \log(w - z),$$

тогда как матричный элемент для двух нормальных упорядоченных вершин есть

$$\langle e^{ikX(w)} e^{-ikX(z)} \rangle \sim (w - z)^{-k^2}.$$

До сих пор мы использовали для вычисления матричных элементов явные представления полей. Однако можно также обратить этот процесс. Если бы нам были полностью известны групповые свойства поля, мы смогли бы вычислить его матричные элементы и даже восстановить само поле.

Важнейшая идея, лежащая в основе конформной теории поля, — воспользоваться конформными свойствами поля φ для полного определения его матричных элементов и даже восстановления самого поля. В конформной теории поля это достигается, если известно поведение на

малых расстояниях полей, движущихся налево и направо:

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) \sim \frac{1}{(z_1 - z_2)^n} + \text{менее сингулярные члены.} \quad (4.1.2)$$

Итак, в принципе все возможные матричные элементы можно вычислить, исходя из конформных свойств самих полей.

В конформной теории поля мы, кроме того, строим спиновое поле S_α , которое при пространственно-временных преобразованиях Лоренца преобразуется как настоящий спинор с конформным весом $5/8$. Однако сектор духов Фаддеева–Попова порождает еще одно поле с конформным весом $3/8$. Именно произведение этих двух полей, одно из которых спиновое, а другое духовое, позволяет построить полный фермионный вертекс с правильным весом единица. Этот вершинный оператор, хотя он и включает экспоненты от полей, определяется целиком через свободные поля и поэтому решает проблему построения фермионной вершинной функции.

Фактически это спиновое поле вводится с помощью процесса, который называется «бозонизацией» [7, 8], т.е. создания фермиона из бозона. Легко, разумеется, создать бозон из двух фермионов. Однако в двумерии у нас имеется конкретная возможность построения фермионов из бозонов, которая одно время считалась неосуществимой. В действительности подсказка способа «бозонизации» уже приводилась в предыдущей главе, когда мы ввели вершинную функцию

$$V = :e^{ik \cdot X}:. \quad (4.1.3)$$

В (2.6.22) было показано, что

$$V_1 V_2 = V_2 V_1 e^{ik_1 \cdot k_2 \epsilon}. \quad (4.1.4)$$

Заметим, что, выбирая разные значения импульсов в показателе этой экспоненты, мы действительно можем построить операторы, удовлетворяющие соотношению

$$V_1 V_2 = (\pm 1) V_2 V_1. \quad (4.1.5)$$

Другими словами, мы можем построить поле с фермионными коммутационными соотношениями из бозонных гармонических осцилляторов. Ключ к этому построению – нормальное упорядочение осцилляторных мод в двумерном пространстве. Данное свойство не переносится на четырехмерные теории поля. (Задним числом можно увидеть, почему фермионы и бозоны так тесно связаны в двумерном пространстве, но не в пространствах более высокой размерности. Для группы Лоренца $O(1,1)$, у которой есть только один генератор, понятие, называемое «спин», не имеет большого смысла для одного пространственного измерения.)

Этот метод бозонизации посредством нормального упорядочивания полей будет далее также ключом к построению конформной теории

поля. Мы построим фермионное спиновое поле S_α с помощью нормального упорядочивания показателей экспонент бозонных полей. Из этого спинового поля мы построим ковариантный оператор суперсимметрии. Преимущество такого подхода — то, что теперь мы можем обсуждать пространственно-временные спиноры, используя один общий вакуум и для бозонов, и для фермионов, а также то, что все построение основано на свободных полях.

Прежде чем обсуждать суперконформный случай, начнем с анализа конформной теории поля. Сделаем наиболее общее конформное преобразование переменной мировой поверхности z :

$$z \rightarrow \tilde{z}(z). \quad (4.1.6)$$

Мы будем говорить, что первичная аналитическая функция преобразуется этим конформным преобразованием с *конформным весом* h , если она преобразуется по формуле

$$\varphi(z) = \tilde{\varphi}(\tilde{z}) \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right)^h. \quad (4.1.7)$$

(Вторичные поля преобразуются как производные от $\varphi(z)$.) Этот конформный вес представляет собой то же понятие, которое мы ввели ранее в выражении (2.7.6) при обсуждении конформных свойств вершин. Теперь мы видим, что математически конформный вес есть индекс, нумерующий неприводимые представления конформной группы, порожденной алгеброй Вирасоро.

Теперь мы можем построить объекты, инвариантные относительно конформного преобразования:

$$\varphi(z) dz^h = \tilde{\varphi}(\tilde{z}) d\tilde{z}^h. \quad (4.1.8)$$

Раз мы уже определили, как поля преобразуются под действием конформного преобразования, мы должны затем проверить, что две такие конформные операции дают замыкание группы. Пусть мы сделали два последовательных конформных преобразования:

$$z \rightarrow z_1(z) \rightarrow z_2[z_1(z)]. \quad (4.1.9)$$

Тогда поле преобразуется по формулам

$$U_1 \varphi(z) U_1^{-1} = \varphi(z_1) \left(\frac{dz_1}{dz} \right)^h, \quad (4.1.10)$$

$$U_2 U_1 \varphi(z) U_1^{-1} U_2^{-2} = \varphi[z_2(z_1(z))] \left(\frac{dz_2}{dz_1} \frac{dz_1}{dz} \right)^h. \quad (4.1.11)$$

Итак, конформные преобразования образуют группу с законом композиции следующего вида:

$$U_3 = U_2 U_1, \quad z_3 = z_2(z_1(z)). \quad (4.1.12)$$

Замыкание алгебры легче всего увидеть, взяв инфинитезимальное конформное преобразование. Рассмотрим бесконечно малую вариацию координаты:

$$\delta z = \varepsilon(z). \quad (4.1.13)$$

Под действием преобразования (4.1.7) мы получим инфинитезимальное преобразование

$$\delta \varphi_\varepsilon = [\varepsilon \partial + h(\partial \varepsilon)] \varphi. \quad (4.1.14)$$

(Мы для краткости будем обозначать ∂_z через ∂ .) Взяв коммутатор двух таких вариаций, получим

$$\delta_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} = [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}], \quad (4.1.15)$$

где

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1. \quad (4.1.16)$$

(Сравните это соотношение с (2.1.30).)

Мы снова показали, что группа замыкается при произвольном весе h . Чтобы лучше понять смысл конформного веса h , вычислим конформный вес струны. При бесконечно малой вариации координаты мы применим цепное правило с целью показать, что струна преобразуется по формуле

$$\delta X_\mu(z) = \varepsilon \partial X_\mu(z). \quad (4.1.17)$$

Итак, поле струны имеет вес 0. Аналогично, легко показать, что производная поля струны имеет вес 1:

$$\delta \partial X_\mu(z) = [\varepsilon \partial + (\partial \varepsilon)] \partial X_\mu(z). \quad (4.1.18)$$

Приведем сводку весов некоторых часто встречающихся струнных полей:

Поле	Вес
X	0
∂X	1
$\partial X \cdot \partial X$	2

(4.1.19)

В частности, это означает, что тензор энергии–импульса или генераторы алгебры Вирасоро имеют вес 2.

Весы аддитивны. Произведение полей, одно из которых имеет вес h_1 , а другое вес h_2 , дает поле с весом $h_1 + h_2$ в той же точке:

$$\varphi^{(h_1)}(z) \varphi^{(h_2)}(z) = \varphi^{(h_1 + h_2)}(z). \quad (4.1.20)$$

Обратите внимание на важный факт, который будет использоваться неоднократно в этой книге: интеграл от объекта с весом 1 является

инвариантным, т. е.

$$\begin{aligned}\delta \oint \varphi^{(1)}(z) dz &= \oint [v \partial \varphi + (\partial v) \varphi] dz \\ &= \oint \partial [v \varphi] dz \\ &= 0.\end{aligned}\tag{4.1.21}$$

Этот факт будет использован при построении вершинных операторов, а также действия вторично квантованной теории.

Теперь подробно изучим, как тензор энергии–импульса действует на основные поля теории.

Если действие выражено через переменную $X(z, \bar{z})$, т. е.

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \bar{\partial} X^\mu \partial X_\mu,\tag{4.1.22}$$

то тензор энергии–импульса (1.9.17), связанный с этим действием, есть

$$T_B = -\frac{1}{2} \partial X^\mu \partial X_\mu.\tag{4.1.23}$$

Преобразование полей под действием конформных преобразований порождается проинтегрированным тензором энергии–импульса, параметризованным малой функцией ε :

$$T_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} dz \varepsilon(z) T(z).\tag{4.1.24}$$

Здесь мы берем интеграл по контуру, окружающему начало координат в комплексной плоскости переменной z . Важность тензора энергии–импульса T связана с тем, что он служит генератором изучаемых нами конформных преобразований. Чтобы в этом убедиться, запишем

$$\begin{aligned}\delta \varphi(z_2) &= [T_\varepsilon, \varphi(z_2)] \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} dz \varepsilon(z) T(z), \varphi(z_2) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,2}-C_0} dz P \varepsilon(z) T(z) \varphi(z_2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} P \varepsilon(z) T(z) \varphi(z_2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz \varepsilon(z) T(z) \varphi(z_2).\end{aligned}\tag{4.1.25}$$

Заметим, что контур $C_{0,2}$ окружает и начало координат, и точку z_2 , тогда как контур C_2 окружает только точку z_2 , поскольку

$$C_2 = C_{0,2} - C_0\tag{4.1.26}$$

(см. рис. 4.1). Заметим также, что мы приняли *радиальное* упорядочение

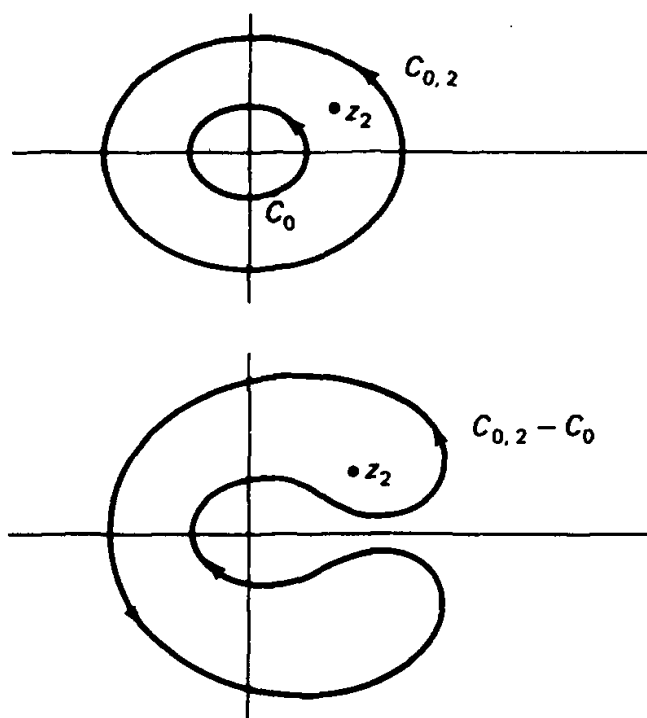


Рис. 4.1. Контуры интегрирования в конформной теории поля. На верхнем рисунке точка z_2 расположена между двумя концентрическими окружностями. На нижнем рисунке направление обхода внутреннего контура было обращено, и он слит с внешним контуром, в результате чего получен замкнутый контур. Точка z_2 лежит внутри этого контура, но начало координат — снаружи от него.

P операторов в комплексной плоскости, при котором операторы упорядочены в соответствии с их расстоянием от начала координат:

$$|z| \leq |z_1|. \quad (4.1.27)$$

На последнем шаге мы опустили радиальное упорядочение, поскольку радиально упорядоченные произведения аналитичны.

Из предыдущего нам также известно, что

$$\delta\phi = [\varepsilon\partial + h(\partial\varepsilon)]\phi. \quad (4.1.28)$$

Сравнивая два выражения для $\delta\phi$, (4.1.25) и (4.1.28), мы можем теперь увидеть поведение поля ϕ на коротких расстояниях:

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi + \dots \quad (4.1.29)$$

Поскольку сам тензор энергии–импульса имеет конформный вес 2, мы можем также подставить его в уравнение для поведения поля на коротких расстояниях. Тем самым мы вывели поведение на коротких

расстояниях самих генераторов:

$$T(z)T(w) = \frac{1}{2} \frac{c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{(z-w)} \partial_w T(w) + \dots \quad (4.1.30)$$

Второй член правой части этого уравнения показывает, что сами генераторы преобразуются как конформные поля с весом 2.

Теперь введем нормальные моды и установим связь с формализмом гармонических осцилляторов. Всегда возможно разложить произвольное поле ψ с весом h следующим образом:

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-h} \psi_n. \quad (4.1.31)$$

Это позволяет разложить тензор энергии-импульса по нормальным модам. Запишем

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \quad (4.1.32)$$

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n.$$

Будет поучительно действительно вывести шаг за шагом алгебру Вирасоро из этих абстрактных выражений, чтобы увидеть эквивалентность коммутаторов и разложений в операторные произведения. Используя (4.1.30) и (4.1.32), находим

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \\ &\quad \times \left[\frac{\frac{1}{2}c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{(z-w)} \partial_w T \right] \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \left\{ (n+1) w^{n+2} T(w) + w^{n+1} \partial_w T \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}c}{3!} w^{n-2} (n+1)n(n-1) \right\} \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left\{ (2n+2) w^{n+m+1} T(w) - (m+n+2) w^{n+m+1} T(w) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{12} n(n+1)(n-1) w^{m+n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Это в конце концов сводится к обычной алгебре Вирасоро:

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m, -n}. \quad (4.1.33)$$

Подставляя выражение для L_n в контурный интеграл, мы получим также

$$[L_n, \varphi(z)] = \{z^{n+1} \partial + h(n+1)z^n\} \varphi(z). \quad (4.1.34)$$

(Это можно также вывести из (4.1.28).)

Мы показали, что это описание эквивалентно обычному описанию с помощью коммутаторов, которым мы пользовались в предыдущих главах. Действительно, последнее уравнение есть не что иное, как (2.7.6), которое применялось при вычислении конформного веса вершинной функции.

Этим способом можно выразить не только обычные конформные коммутаторы; на этом эквивалентном языке можно также описать вклад духов Фаддеева–Попова в конформную калибровку. Духи Фаддеева–Попова дадут нам другое представление алгебры Вирасоро, основанное на духовых полях b и c , а не на струнной переменной X . Если переписать (2.4.1), получим

$$\delta g_{zz} = \nabla_z \delta \varepsilon_z, \quad (4.1.35)$$

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = \nabla_{\bar{z}} \delta \varepsilon_{\bar{z}}.$$

Эти ограничения в свою очередь позволят нам вычислить изменение функциональной меры. Простое вычисление якобиана этого преобразования дает

$$Dg_{zz} Dg_{\bar{z}\bar{z}} = (\det \nabla_z)(\det \nabla_{\bar{z}}) D\varepsilon_z D\varepsilon_{\bar{z}}. \quad (4.1.36)$$

Чтобы ввести определитель под знак экспоненты в действие, введем два духовых поля, b и c . Тогда духовое действие (2.4.4) можно записать в виде

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi} \int d^2z (b_{zz} \partial_{\bar{z}} c^z + \bar{b}_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \bar{c}^{\bar{z}}). \quad (4.1.37)$$

(Заметим, что духовое действие записано здесь таким образом, что тензорная природа полей проявляется при действии конформной группы. Тем самым инвариантность действия относительно конформной группы становится очевидной. Итак, поле b_{zz} – тензор второго ранга, а c^z – тензор первого ранга.)

Располагая этим действием, мы можем построить тензор энергии – импульса, ему соответствующий:

$$T_{\text{gh}} = c \partial_z b + 2(\partial_z c) b. \quad (4.1.38)$$

Указанные духовые поля имеют следующий матричный элемент:

$$\langle b_{zz}(z) c^z(w) \rangle = \frac{1}{z-w}.$$

Если теперь тщательно вычислить поведение этих полей на коротких расстояниях, мы получим

$$T_{gh}(z) T_{gh}(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T_{gh}(z) + \frac{1}{z-w} \partial T_{gh}(z) + \dots \quad (4.1.39)$$

Обратите внимание на множитель -13 в вычисленной аномалии духового тензора энергии-импульса. Если взять сумму этих двух тензоров энергии-импульса, (4.1.23) и (4.1.38), то окажется, что полученный комбинированный тензор свободен от аномалии в 26-мерном пространстве:

$$T(z) = T_X(z) + \overset{\cdot}{T}_{gh}(z), \quad (4.1.40)$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1}{2} \frac{D-26}{(z-w)^4} + \dots$$

Заметим, что сумма двух тензоров энергии-импульса имеет нулевой главный член только в 26-мерном пространстве. *Это фактически фиксирует размерность пространства-времени: она должна быть равной 26.* Итак, бозонное представление тензора энергии-импульса через струнные поля X дает множитель D для аномального члена, тогда как духовое представление для T дает множитель -26 . Сумма этих двух тензоров есть истинный тензор энергии-импульса, имеющий нулевой главный член лишь при $D = 26$.

Всякий раз, когда мы имеем дело с какой-нибудь группой Ли, первое, что мы должны выяснить, — это каковы ее представления. Скажем теперь несколько слов о представлениях алгебры Вирасоро.

Для групп $SU(2)$ или $SU(3)$, например, мы знаем, что представления можно образовать, используя хорошо известные «лестничные операторы» для построения триплетов, октетов и более высоких представлений. Для алгебры Ли общего вида можно построить представления, взяв все возможные произведения «повышающих операторов», действующие на вакуум с «наивысшим весом». Множество всех таких состояний, создаваемых повышающими операторами, называется «универсальной огибающей алгеброй». Тот же самый процесс применим к алгебре Вирасоро, если рассматривать L_{-n} как лестницу повышающих операторов.

Определим вектор с наивысшим весом $|h\rangle$ следующим образом:

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad (4.1.41)$$

$$L_n|h\rangle = 0; \quad \text{где } n > 0.$$

Заметим, что любое физическое состояние $|R\rangle$ с $h = 1$ является вектором с наивысшим весом, поскольку оно удовлетворяет условию $(L_0 - 1)|R\rangle = 0$. Отметим также, что вакуумное состояние $|0; k\rangle$ тоже является вектором с наивысшим весом, а состояние $|0; 0\rangle$ этим свойством не обладает.

Теперь определим набор состояний, порождаемых всеми повышаю-

щими операторами L_{-n} , действующими на вектор с наивысшим весом:

$$|\omega\rangle = L_{-n_1}^{\lambda_1} L_{-n_2}^{\lambda_2} \dots L_{-n_n}^{\lambda_n} |h\rangle. \quad (4.1.42)$$

Набор всех таких состояний называется *модулем Верма*. Если $|h\rangle$ рассматривается как физическое состояние, то модуль Верма, соответствующий ему, есть набор всех шпурионных состояний, которые можно получить из этого физического состояния.

Заметим, что любое конформное преобразование просто переводит это состояние в какой-то другой элемент модуля Верма:

$$\Omega|\omega\rangle = |\omega'\rangle, \quad (4.1.43)$$

где

$$\Omega = e^{\sum_n c^n L_{-n}}. \quad (4.1.44)$$

Это происходит потому, что генератор Вирасоро, действуя на элемент модуля Верма, создает другое состояние, принадлежащее тому же модулю Верма. Тем самым модуль Верма образует представление конформной группы.

Кроме вектора с наивысшим весом определим также вакуум, инвариантный относительно группы $SL(2, R)$, который мы ввели ранее:

$$\begin{aligned} L_{\pm 1}|0; 0\rangle &= 0, \\ L_0|0; 0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

Связь между этими двумя разными вакуумами дается соотношением

$$|h\rangle = \varphi(0)|0; 0\rangle, \quad (4.1.46)$$

где $\varphi(0)$ есть первичное поле с весом h . Это соотношение легко проверить, подействовав на его левую и правую части генераторами алгебры Вирасоро.

§ 4.2. СУПЕРКОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Обсудим теперь более сложный вопрос о записи суперконформной теории поля. Вместо выписывания преобразований поля как функций комплексной переменной выпишем преобразование пары переменных в наиболее общей форме:

$$z = z(z, \theta), \quad (4.2.1)$$

где θ – грассманова переменная. Преобразование этой пары наиболее общего вида дается формулой

$$\tilde{z}(z) = (\tilde{z}(z, \theta), \tilde{\theta}(z, \theta)). \quad (4.2.2)$$

К сожалению, такое преобразование имеет чрезмерно общий вид.

Действительно, если взять произведение двух таких преобразований, мы не получим преобразование того же вида. Необходимо наложить ограничение на систему, чтобы получить замкнутую группу преобразований.

Определим суперсимметричную производную (см. Приложение) формулой

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.2.3)$$

так что

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.2.4)$$

Вычислим теперь, как эта суперсимметричная производная преобразуется при репараметризации:

$$D = (D\tilde{\theta})\tilde{D} + [D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta}]\tilde{D}^2. \quad (4.2.5)$$

Такой закон композиции также не может нас удовлетворить, поскольку он сильно нелинеен. Нам нужно, чтобы, как это было в случае конформных преобразований, производная преобразовывалась линейно. Поэтому мы просто устраним нелинейные члены, налагая связи

$$\begin{aligned} D &= (D\tilde{\theta})\tilde{D}, \\ D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Эти связи, линеаризующие преобразование репараметризации, в точности совпадают с нужными нам связями. Наложив их, мы можем показать, что два различных суперконформных преобразования дают новое суперконформное преобразование:

$$z \rightarrow \tilde{z} \rightarrow \hat{z}. \quad (4.2.7)$$

Итак, мы назовем преобразование поля суперконформным, если оно удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}}{dz} = D\tilde{\theta}, \\ \varphi(z) = \tilde{\varphi}(\tilde{z})(D\tilde{\theta})^{2h}. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Легко проверить, что устранение компонент θ приводит это выражение обратно к конформному виду, выписанному ранее в (4.1.7).

Как и в предыдущем параграфе, мы можем выписать эти условия в форме бесконечно малой вариации полей:

$$\delta_\varepsilon \varphi = [\varepsilon \partial + \frac{1}{2}(D\varepsilon)D + h(\partial\varepsilon)]\varphi, \quad (4.2.9)$$

где ε параметризует суперконформные преобразования. Заметим, что

это выражение почти совпадает с бозонным преобразованием (4.1.28), отличаясь от него лишь членом, содержащим два оператора D . Замыкание алгебры теперь можно записать в виде

$$\delta_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} = [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}], \quad (4.2.10)$$

где

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (D\varepsilon_1)(D\varepsilon_2). \quad (4.2.11)$$

Заметим, что мы снова получим обычную алгебру Вирасоро (4.1.16), если положим $D\varepsilon_1$ и $D\varepsilon_2$ равными нулю.

Мы видим, что репараметризации по грассмановым переменным можно выразить через два параметра, $\delta z = \varepsilon_a$ и $\delta \theta = \varepsilon_b$:

$$\varepsilon(z) = \delta z + \theta \delta \theta = \varepsilon_a + \theta \varepsilon_b,$$

$$\delta z = \varepsilon - \theta \delta \theta = \varepsilon_a + \frac{1}{2} \theta \varepsilon_b, \quad (4.2.12)$$

$$\delta \theta = \frac{1}{2} D\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_b + \theta \partial \varepsilon_a).$$

Эти уравнения являются частным решением системы (4.2.6), так что нам известно, что группа замыкается в собственном смысле после двух последовательных преобразований полей. Это решение будет положено в основу построения суперконформных токов, а затем и самой суперконформной алгебры.

До сих пор мы ограничивались лишь весьма общими замечаниями о суперконформной группе, не ссылаясь ни на какую конкретную модель. Теперь перепишем (NS–R)-модель, выразив ее через конформные поля. Действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z d\theta d\bar{\theta} \bar{D} X^\mu D X_\mu. \quad (4.2.13)$$

Уравнения движения суть

$$\bar{D} D X_\mu = 0, \quad (4.2.14)$$

а их решение есть

$$X^\mu(z, \theta, \bar{z}, \bar{\theta}) = X^\mu(z, \theta) + X^\mu(\bar{z}, \bar{\theta}). \quad (4.2.15)$$

Поэтому мы выберем

$$X^\mu(z, \theta) = X^\mu(z) + \theta \psi^\mu(z), \quad (4.2.16)$$

так что действие примет вид

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z (\bar{\partial} X^\mu \partial X_\mu - \psi \bar{\partial} \psi - \bar{\psi} \partial \bar{\psi}). \quad (4.2.17)$$

Заметим, что это есть не что иное, как исходное действие модели NS-R (3.2.1), записанное на конформном языке. Из него можно получить супертензор энергии-импульса в несколько иной нормировке:

$$T = T_F + \theta T_B = -\frac{1}{2}DX^\mu\partial X_\mu. \quad (4.2.18)$$

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{aligned} T_F &= -\frac{1}{2}\psi_\mu\partial X^\mu, \\ T_B &= -\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu - \frac{1}{2}\partial\psi^\mu\psi_\mu. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Это токи (3.2.7) и (3.2.13), записанные в конформном формализме. Заметим, что суперток J_a теперь является частью того же тензора, что и тензор энергии-импульса T_{ab} , т. е. они являются суперсимметричными партнерами друг друга.

Как и в (4.1.25), вариация суперполя дается формулой

$$\delta\varphi(z_2) = \frac{1}{2\pi i c_2} \oint dz_1 \varepsilon(z_1) T(z_1) \varphi(z_2). \quad (4.2.20)$$

Если поле φ имеет вес h , а тензор энергии-импульса имеет вес $3/2$, то φ и T преобразуются суперконформным преобразованием по формулам

$$\begin{aligned} T(z_1)\varphi(z_2) &\sim h\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}\varphi(z_2) + \frac{1}{z_{12}}D_2\varphi + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial_2\varphi + \dots \\ T(z_1)T(z_2) &\sim \frac{\hat{c}}{4}\frac{1}{z_{12}^3} + \frac{3}{2}\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}T(z_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{z_{12}}D_2T(z_2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial_2T(z_2) + \dots, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \theta_1 - \theta_2, \\ z_{12} &= z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

На самом деле эти соотношения сложнее, чем кажутся; они выражают в компактной форме большое число уравнений. Чтобы это увидеть, выпишем предыдущие уравнения в развернутом виде. Подставляя (4.2.18) в (4.2.21), находим

$$\begin{aligned} T_B(z_1)T_B(z_2) &\sim \frac{3\hat{c}/4}{(z_1 - z_2)^4} + \frac{2}{(z_1 - z_2)^2}T_B(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2}\partial_2T_B + \dots, \\ T_B(z_1)T_F(z_2) &\sim \frac{\frac{2}{3}}{(z_1 - z_2)^2}T_F(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2}\partial_2T_F + \dots, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$T_F(z_1)T_F(z_2) \sim \frac{\hat{c}/4}{(z_1 - z_2)^3} + \frac{\frac{1}{2}}{z_1 - z_2} T_B(z_2) + \dots$$

В развернутом виде эти соотношения дают суперконформную алгебру, которую мы явным образом описали в (3.2.26) и (3.2.28). Поэтому они содержат большой объем информации.

Преобразование поля (4.2.21) можно расписать подробно, взяв $\varphi = \varphi_0 + \theta\varphi_1$:

$$\begin{aligned} T_B(z_1)\varphi_0(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1 - z_2)^2} \varphi_0(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2} \partial_2 \varphi_0 + \dots, \\ T_B(z_1)\varphi_1(z_2) &\sim \frac{h + \frac{1}{2}}{(z_1 - z_2)^2} \varphi_1(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2} \partial_2 \varphi_1 + \dots, \\ T_F(z_1)\varphi_0(z_2) &\sim \frac{\frac{1}{2}}{z_1 - z_2} \varphi_1(z_2) + \dots, \\ T_F(z_1)\varphi_1(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1 - z_2)} \varphi_0(z_2) + \frac{\frac{1}{2}}{z_1 - z_2} \partial_2 \varphi_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Разлагая в степенные ряды по формулам

$$\begin{aligned} T_F(z) &= \frac{1}{2} \sum_n z^{-n-3/2} G_n, \\ T_B(z) &= \sum_n z^{-n-2} L_n, \\ \varphi_0(z) &= \sum_n z^{-n-h} \varphi_{0,n}, \\ \varphi_1(z) &= \sum_n z^{-n-h-1/2} \varphi_{1,n}, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

мы получим описание того, как поле $\varphi(z, \theta)$ преобразуется суперконформным преобразованием:

$$\begin{aligned} [L_m, \varphi_0(z)] &= z^{m+1} \partial \varphi_0 + h(m+1) z^m \varphi_0(z), \\ [L_m, \varphi_1(z)] &= z^{m+1} \partial \varphi_1 + (h + \frac{1}{2})(m+1) z^m \varphi_1(z), \\ [\varepsilon G_m, \varphi_0(z)] &= \varepsilon z^{m+1/2} \varphi_1(z), \\ [\varepsilon G_m, \varphi_1(z)] &= \varepsilon [z^{m+1/2} \partial \varphi_0 + 2(m + \frac{1}{2}) h z^{m-1/2} \varphi_0(z)], \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

$$\begin{aligned}
[L_m, \varphi_{0,n}] &= [(h-1)m - n] \varphi_{0,m+n}, \\
[L_m, \varphi_{1,n}] &= [(h - \frac{1}{2})m - n] \varphi_{1,m+n}, \\
[\varepsilon G_m, \varphi_{0,n}] &= \varepsilon \varphi_{1,m+n}, \\
[\varepsilon G_m, \varphi_{1,n}] &= \varepsilon [(2h-1)m - n] \varphi_{0,m+n}.
\end{aligned}
\tag{4.2.27}$$

Итак, соотношения (4.2.21) содержат всю информацию о суперконформных преобразованиях.

Вычислим теперь, какие вклады разные поля вносят в аномалию. Сравнивая (4.1.29) и (4.2.23), видим, что бозон X_μ вносит в аномалию вклад D , тогда как фермион ψ_μ вносит лишь $\frac{1}{2}D$. Можно также показать, что духи b и c вносят вклад -26 , а духи β и γ — вклад $+11$. Действительно, ниже в этой главе мы покажем, что вклад в аномалию духа с конформным весом λ равен

$$c = -2\varepsilon(6\lambda(\lambda - 1) + 1), \tag{4.2.28}$$

где ε равно $+1$ (соответственно -1) для статистики Ферми (соответственно для статистики Бозе). Подытоживая, находим:

Поле	Аномалия
X_μ	D
ψ_μ	$\frac{1}{2}D$
b, c	-26
β, γ	11

(4.2.29)

Складывая все вместе, находим, что общая аномалия равна

$$D + \frac{1}{2}D - 26 + 11 = \frac{3}{2}(D - 10), \tag{4.2.30}$$

так что для обращения этого члена в нуль должно выполняться $D = 10$.

§ 4.3. СПИНОВЫЕ ПОЛЯ

Пока что ничего нового мы не получили. Мы лишь вывели заново старые результаты, которые можно было получить и с помощью формализма гармонических осцилляторов, использованного в предыдущих главах. Мы просто предпочли переписать генераторы алгебры NS-R на языке, подчеркивающем конформный вес и структуру особенностей коммутаторов в z -плоскости, вместо того чтобы разлагать эти коммутаторы по их фурье-компонентам. Новшеством, однако, будет введение нового поля S_α , которое преобразуется как настоящий спинор под действием группы Лоренца. Это позволит сформулировать (NS-R)-

модель с единственным вакуумом вместо двух разных вакуумов с помощью процесса, называемого бозонизацией.

Сначала выпишем генераторы $j^{\mu\nu}$ десятимерной лоренцевой группы $SO(10)$ через антикоммутирующее векторное поле ψ , используемое в (NS-R)-теории:

$$j^{\mu\nu}(z) = \psi^\mu \psi^\nu(z). \quad (4.3.1)$$

Мы требуем, чтобы они удовлетворяли коммутационным соотношениям обычной алгебры Лоренца, выраженным через поля, определенные в z -плоскости. С учетом известных антикоммутационных соотношений для поля ψ , даваемых формулой (3.2.23), легко показать, что

$$j^{\mu\nu}(z)j^{\sigma\tau}(w) \sim \frac{1}{z-w} \eta^{\mu\sigma} j^{\nu\tau}(w) (1 - \mu \leftrightarrow \nu) (1 - \sigma \leftrightarrow \tau) + \frac{1}{(z-w)^2} (\eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\sigma} - \mu \leftrightarrow \nu) + \dots \quad (4.3.2)$$

Заметим, что генераторы этой алгебры суть функции z и, следовательно, они образуют более обширную алгебру, чем $SO(10)$. Действительно, эта алгебра называется *алгеброй Каца–Муди*, и она будет широко использоваться в настоящей книге.

Изучение теории групп, лежащей в основе лоренцевой симметрии, показало, что представления этой группы могут быть либо тензорами, либо спинорами. Свойства преобразований этих полей однозначно определяются самой теорией групп. Аналогично мы определим тензорные и спинорные представления алгебры Каца–Муди, связанной с группой $SO(10)$, свойства преобразований которых будут однозначно определяться одной лишь теорией групп. Эти свойства преобразований оказываются столь мощными, что из них можно определить матричные элементы.

В частности, вектор по определению преобразуется под действием алгебры Каца–Муди $SO(10)$ следующим образом:

$$j^{\mu\nu}(z)\psi^\alpha(w) \sim \frac{1}{z-w} (\eta^{\mu\sigma}\psi^\nu - \eta^{\nu\sigma}\psi^\mu)(w) + \dots \quad (4.3.3)$$

Спиновое поле S_α , поскольку оно преобразуется как спинор группой $SO(10)$, должно по определению удовлетворять следующему свойству преобразования:

$$j^{\mu\nu}(z)S_\alpha(w) \sim \frac{1}{4} \frac{1}{z-w} (\gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]})^\beta_\alpha S_\beta(w) + \dots \quad (4.3.4)$$

Замечательное утверждение конформной теории поля состоит в том, что два предыдущих тождества, показывающих, как векторы и спиноры преобразуются под действием группы $SO(10)$, достаточны для определения практически *всех* корреляционных функций этой теории!

Тензор энергии-импульса в свою очередь может быть записан как нормально упорядоченный квадрат генераторов группы Лоренца:

$$T_B^\Psi = \frac{-\frac{1}{4}}{D-1} j^{\mu\nu} j_{\mu\nu}(z). \quad (4.3.5)$$

Вычислив в явном виде коммутаторы предыдущего уравнения, убеждаемся, что этот тензор является генератором алгебры Вирасоро.

К сожалению, спиновое поле S_α имеет конформный вес $5/8$, что мы докажем ниже в этой главе, когда построим явное представление этих полей. Однако это можно вывести и из общих соображений следующим образом. Ранее в (4.1.46) мы видели, что вектор с наивысшим весом $|h\rangle$ модуля Верма можно записать как

$$|h\rangle = \varphi(0)|0; 0\rangle, \quad (4.3.6)$$

где φ -поле с весом h , а $|0; 0\rangle$ -вакуум группы $SL(2, R)$. В суперконформном случае у нас фактически имеются два вакуумных вектора с наивысшим весом:

$$|h\rangle = S(0)|0; 0\rangle, \quad (4.3.7)$$

$$G_0|h\rangle.$$

Мы хотим устранить второе вакуумное состояние с наивысшим весом, чтобы сохранить $2D$ -суперсимметрию. В случае суперструны теория содержит лишь один спинор на низшем уровне, а не два. Чтобы устранить второе состояние, используем тождество

$$G_0^2 = L_0 - \frac{\hat{c}}{16}. \quad (4.3.8)$$

(Мы выбрали форму c -числовой аномалии в алгебре Рамона, слегка отличную от (3.2.28). Этот выбор также удовлетворяет тождествам Якоби.) Мы хотим, чтобы состояние $G_0|h\rangle$ обратилось в нуль после действия на него еще одним оператором G_0 . Это значит, что

$$G_0 G_0 |h\rangle = \left(h - \frac{\hat{c}}{16}\right) |h\rangle = 0. \quad (4.3.9)$$

Чтобы это равенство выполнялось, вес h спинового поля должен быть равен $10/16 = 5/8$, что и ожидалось.

Ключ к вычислению матричных элементов любого конформного поля - вычисление его поведения на коротких расстояниях при взаимодействии с другими полями и действии суперконформной группы. Поэтому мы вычислим теперь поведение спинового поля на коротких расстояниях, используя только соображения симметрии, чтобы установить его структуру на коротких расстояниях и его матричные элементы.

Прежде всего, тождество (4.3.4) означает, что операторное произве-

дение двух полей S должно содержать, во всяком случае, поле ψ :

$$S_\alpha(z)S^\beta(w) = \frac{1}{(z-w)^{1/4}} (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \psi_\mu(z)\psi_\nu(w) + \text{другие члены.} \quad (4.3.10)$$

Чтобы вычислить операторное произведение ψ и S , рассмотрим трехточечную функцию

$$\langle 0 |_{NS} S_\alpha(z_1) \psi^\mu(z_2) S_\beta(z_3) | 0 \rangle_{NS}, \quad (4.3.11)$$

где вакуум — это NS-вакуум. В пределе $z_1 \rightarrow \infty$ и $z_3 \rightarrow 0$ спиновое поле заменяет NS-вакуум на вакуум со спинорными квантовыми числами, т. е. на вакуум Рамона $|0\rangle$:

$$S_\alpha(0)|0\rangle_{NS} = |0\rangle_R u_\alpha; \quad \langle 0 |_{NS} S_\alpha(\infty) = u_\alpha \langle 0 |_R. \quad (4.3.12)$$

(Заметим, что оператор спина позволяет нам перейти от NS-вакуума к R-вакууму, что было невозможно в рассмотренной выше теории NS–R.) Это значит, что (4.3.11) можно переписать в виде

$$u_\alpha \langle 0 |_R \psi^\mu(z_2) | 0 \rangle_R u_\beta. \quad (4.3.13)$$

Но только нулевые моды поля ψ сохранятся в этом вакуумном среднем, так что у нас останется матричный элемент матрицы Дирака:

$$\psi^\mu(z) S_\alpha(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(z-w)^{1/2}} (\gamma^\mu)_\alpha^\beta S_\beta(z) + \dots \quad (4.3.14)$$

Это в свою очередь означает, что операторное произведение двух ψ содержит S :

$$S_\alpha(z) S^\beta(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}} (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \psi^\mu(z) + \dots \quad (4.3.15)$$

Наконец, нам нужно знать поведение на коротких расстояниях результата взаимодействия двух спиновых полей. Мы видели, что конформный вес спинового поля равен $5/8$. Поэтому

$$S_\alpha(z) S^\beta(w) \sim -\delta_\alpha^\beta (z-w)^{-5/4} + \dots, \quad (4.3.16)$$

где $5/4$ есть удвоенная размерность спинового поля.

Окончательно мы можем свести воедино (4.3.10), (4.3.14) и (4.3.16) и получить поведение на коротких расстояниях двух спиновых полей. Итак, соображения симметрии задали поведение спинового поля на коротких расстояниях, которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_\alpha(z) S^\beta(w) \sim & \frac{-1}{(z-w)^{5/4}} \delta_\alpha^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}} (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \psi^\mu(z) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{1/4}} (\gamma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \psi_\mu(z) \psi_\nu(z) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Мы видели, что спиновое поле имеет размерность $5/8$. Но нам нужна фермионная вершинная функция, имеющая размерность 1, которую можно было бы использовать в многофермионной амплитуде. Чтобы отыскать недостающий фактор $3/8$, обратимся теперь к духовому сектору нашей теории. Этот сектор даст нам последний кусочек мозаики, которого не хватало для полноты картины.

§ 4.4. СУПЕРКОНФОРМНЫЕ ДУХИ

Перепишем детерминант Фаддеева–Попова, возникающий при фиксации суперконформной калибровки, на языке конформных преобразований. С помощью (3.4.5) находим

$$\begin{aligned}\delta g_{zz} &= \nabla_z \delta \xi_z, \\ \delta \chi_z &= \nabla_z \delta \varepsilon\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

и комплексно-сопряженные им выражения. Отсюда получаем детерминант Фаддеева–Попова

$$\det_g(\nabla_z) \det_\chi(\nabla_z)\tag{4.4.2}$$

и комплексно-сопряженное выражение. На первый взгляд это выглядит очень похоже на детерминант (2.4.3), найденный ранее для струны Намбу–Гото, т. е. на детерминант операторов ∂_z и $\partial_{\bar{z}}$. Однако имеются несколько важных отличий. Гильбертово пространство, в котором действуют эти операторы, теперь уже другое. Если разложить детерминант по базисным состояниям, то окажется, что конформные веса изменились, преобразования тензоров под действием конформной группы стали другими, а статистика полей заменилась противоположной.

Если внести эти детерминанты в действие под знак экспоненты (см. (1.6.16)), получится духовое действие:

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 z d\theta d\bar{\theta} B \bar{D} C + \text{компл.-сопр. выраж.},\tag{4.4.3}$$

где

$$\begin{cases} B(z) = \beta(z) + \theta b(z), \\ C(z) = c(z) + \theta \gamma(z). \end{cases}\tag{4.4.4}$$

В последнем определении β и γ суть коммутирующие операторы. Интегрируя по θ , получаем

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 z (b \bar{\partial} c + \beta \bar{\partial} \gamma) + \text{компл.-сопр. выраж.},\tag{4.4.5}$$

$$\begin{aligned}\bar{D} B &= 0, \\ \bar{D} C &= 0,\end{aligned}\tag{4.4.6}$$

где (b, c) суть духовые поля, порождаемые фиксацией метрики калибровкой, а β, γ — духи, порождаемые фиксацией поля χ_a (в секторе NS или в секторе R). Суперконформные духи (связанные друг с другом коммутационными соотношениями) впервые появились в формуле (3.5.14) при квантовании (NS–R)-модели. Различие состоит в том, что теперь мы хотим подчеркнуть конформные свойства этих полей, т. е. их веса. Приведем сводку соответствующих весов:

Поле	Вес	Статистика
b	2	Ферми
c	–1	Ферми
β	3/2	Бозе
γ	– $\frac{1}{2}$	Бозе

(4.4.7)

Располагая действием (4.4.5), можно найти тензор энергии–импульса, который является суммой двух слагаемых:

$$\begin{cases} T_X = -\frac{1}{2}DX^\mu\partial X_\mu = T_F + \theta T_B, \\ T_{gh} = -C\partial B + \frac{1}{2}DCDB - \frac{3}{2}\partial CB. \end{cases} \quad (4.4.8)$$

Выписав в явном виде последнее выражение для духового слагаемого, имеем

$$T_F^h(z) = -c\partial\beta - \frac{3}{2}\partial c\beta + \frac{1}{2}\gamma b, \quad (4.4.9)$$

$$T_B^h(z) = c\partial b + 2\partial cb - \frac{1}{2}\gamma\partial\beta - \frac{3}{2}\partial\gamma\beta.$$

Неудобно всякий раз выписывать поля b и c , β и γ , особенно когда выражения для бозонных и фермионных полей очень похожи. Поэтому мы примем систему обозначений, в которой можно описать все духовые поля сразу, присвоив им произвольный вес. Выпишем обобщенное духовое действие, в котором поля, обозначенные жирным шрифтом, будут представлять коммутирующие или антикоммутирующие духи:

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \mathbf{b}\bar{\partial}c + \text{компл.-сопр. выраж.}, \quad (4.4.10)$$

$$\bar{\partial}\mathbf{b} = \bar{\partial}c = 0.$$

Здесь по определению поле \mathbf{b} имеет произвольный вес λ , а поле c имеет вес $1 - \lambda$. Напомним, что система антикоммутирующих духов b, c имела вес $\lambda = 2$, а система коммутирующих духов имела вес $\lambda = 3/2$. Такое действие служит компактной формой записи выражения (4.4.5), но

теперь наше обсуждение обобщено на любые возможные конформные веса.

Исходя из этого обобщенного действия, легко выписать тензор энергии-импульса:

$$T^{bc}(z) = -\lambda b\partial c + (1 - \lambda)\partial bc. \quad (4.4.12)$$

Возьмем разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(z) &= \sum_{n \in \delta - \lambda + \mathbb{Z}} z^{-n-\lambda} \mathbf{b}_n, \\ \mathbf{c}(z) &= \sum_{n \in \delta + \lambda + \mathbb{Z}} z^{-n-1+\lambda} \mathbf{c}_n, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

где δ равно 0 для NS-сектора, а для R-сектора $\frac{1}{2}$. В этом представлении генераторы алгебры Вирасоро с \hat{u} ть

$$L_n^{bc} = \sum_k (k - (1 - \lambda)n) b_{n-k} c_k. \quad (4.4.14)$$

Можно проверить, что такие генераторы порождают обычные коммутационные соотношения при любых λ .

Кроме тензора энергии-импульса, из этого действия можно построить два других тока, BRST-ток и ток духового числа.

Согласно (1.9.12), BRST-ток является следствием того факта, что действие в исходной калибровке вместе с его духами Фаддеева-Попова обладает остаточной калибровочной симметрией, которая является нильпотентной (и потому не может быть использована для устранения каких-либо еще полей). С каждой калибровочной симметрией связан некоторый ток, так что BRST-ток можно вывести прямо из действия:

$$J_{\text{BRST}}(z) = DC(CDB - \frac{3}{2}DCB). \quad (4.4.15)$$

Согласно (1.9.12), BRST-заряд является суперинтегралом от BRST-тока:

$$Q_{\text{BRST}} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz d\theta J_{\text{BRST}}. \quad (4.4.16)$$

Этот заряд можно разбить на три слагаемых:

$$Q_{\text{BRST}} = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(2)}. \quad (4.4.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz (c T_{\text{B}}(X, \psi, \beta, \gamma) - c\partial cb), \\ Q^{(1)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{2} \gamma \psi_{\mu} \partial X^{\mu}, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$Q^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{4} \gamma^2 b.$$

Тщательно проанализировав каждое слагаемое, можно показать, что их сумма нильпотентна:

$$Q_{\text{BRST}}^2 = 0. \quad (4.4.19)$$

В дополнение к BRST-току есть также $U(1)$ -ток, называемый током духового числа. На первый взгляд можно ожидать, что поскольку духи появляются парами, то они должны сохранять некоторое квантовое число, подобно сохранению барионного числа. Однако, как ни удивительно, у духового тока есть поправочный член. Выпишем ток духового числа, который просто-напросто билинеен по духовым полям:

$$\mathbf{j}(z) = -\mathbf{bc} = \sum_n z^{-n-1} \mathbf{j}_n, \quad (4.4.20)$$

где

$$\mathbf{j}_n = \sum_k \varepsilon \mathbf{c}_{n-k} \mathbf{b}_k, \quad (4.4.21)$$

$\varepsilon = +1$ (для фермионов) или $\varepsilon = -1$ (для бозонов). Теперь у нас имеются все тождества, необходимые для вычисления взаимодействия (на коротких расстояниях) между духовым током и тензором энергии–импульса:

$$T(z)\mathbf{j}(w) \sim \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{\mathbf{j}(z)}{(z-w)^2} + \dots, \quad (4.4.22)$$

где $Q = \varepsilon(1 - 2\lambda)$. (Отметим, что присутствие этого фактора является аномалией.) Отсюда следует

$$[L_m, \mathbf{j}_n] = -n\mathbf{j}_{m+n} + \frac{1}{2} Q m(m+1) \delta_{m,-n}. \quad (4.4.23)$$

Этот ток духового числа приписывает духовое число каждому из духовых полей. Он обладает необычными свойствами относительно операции комплексного сопряжения:

$$\mathbf{j}_m^\dagger = -\mathbf{j}_{-m} - Q\delta_{m,0}, \quad (4.4.24)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon(1 - 2\lambda), \\ \lambda &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon Q), \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

$\varepsilon = +1$ (статистика Ферми); -1 (статистика Бозе).

(Если бы в (4.4.24) отсутствовал член, содержащий Q , то этот ток

обладал бы обычными свойствами преобразования при операции комплексного сопряжения.) Квантовые числа духовых полей следующие:

$$\begin{aligned} b, c: \varepsilon = 1; \quad \lambda = 2; \quad Q = -3; \quad c = -26, \\ \beta, \gamma: \varepsilon = -1; \quad \lambda = \frac{3}{2}; \quad Q = 2; \quad c = 11. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Вклад духов в аномалию равен $c = -2\varepsilon(6\lambda(\lambda - 1) + 1)$. Одно из необычных свойств этой структуры духов — существование *бесконечного количества вакуумов*, возникающих вследствие (4.4.23) и (4.4.24). Определим вакуумные состояния формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_n |q\rangle = 0; \quad n > \varepsilon q - \lambda, \\ \mathbf{c}_n |q\rangle = 0; \quad n \geq -\varepsilon q + \lambda. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

Нулевая компонента тока духового числа и L_0 действуют на эти состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_0 |q\rangle = q |q\rangle, \\ L_0^{bc} |q\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon q (Q + q) |q\rangle. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

В частности, последние тождества показывают, что ненулевыми являются лишь следующие матричные элементы:

$$\langle -q - Q | q \rangle = 1. \quad (4.4.29)$$

Простейший способ продемонстрировать это — взять матричные элементы токов между разными вакуумными состояниями, причем каждый вакуум нумеруется числом q :

$$\langle q' | L_0 | q \rangle; \quad \langle q' | \mathbf{j}_0 | q \rangle. \quad (4.4.30)$$

Все матричные элементы нулевые, кроме отвечающих условию $q' = -q - Q$.

Все это очень странно. В обычной модели Венециано был только один-единственный вакуум. Теперь же в духовом секторе моделей Невё-Шварца и Рамона, по-видимому, имеется *бесконечное число вакуумных состояний*, нумеруемых числом q ! *Существование бесконечного количества фермионных и бозонных вакуумных состояний является одной из необычных черт конформной теории поля.*

Это означает наличие аномалии духового числа. Проблема связана с формулами (4.4.22) и (4.4.23), т. е. с тем фактом, что коммутационные соотношения тока духового числа $U(1)$ с тензором энергии-импульса содержат аномалию. Аномальный член соответствует нарушению закона сохранения духового числа. Действительно, расходимость тока дается формулой $\partial_z j_z = \frac{1}{8} Q \sqrt{g} R^{(2)}$, т. е. двумерной плотностью кривизны. На самом деле первоисточник всех этих трудностей — формула (4.1.36), полученная при вычислении детерминанта Фаддеева-Попова

относительно ∇_z и $\nabla_{\bar{z}}$. Тщательный анализ собственных значений этих операторов показывает необходимость устранения нулевых мод, в противном случае эти детерминанты становятся бессмысленными. При внесении этих детерминантов в действие посредством выражения их через духи Фаддеева–Попова указанные нулевые моды соответствуют нетривиальным решениям уравнений $\partial_{\bar{z}}c^z = \partial_{\bar{z}}b_{zz} = 0$. К сожалению, мы не можем подробно рассмотреть здесь эти нулевые моды, потому что для этого необходимы сведения, которые не будут обсуждаться ранее гл. 9, где аномалии рассматриваются более детально. (Вкратце, эта аномалия связана с топологией римановой поверхности, заметаемой струной. Интегрируя уравнение неразрывности для тока духового числа $U(1)$, можно воспользоваться теоремой Гаусса–Боне, чтобы показать, что $\int d^2z \sqrt{g} R^{(2)} = -8\pi(g-1)$, где g — число дырок или ручек замкнутой римановой поверхности. Затем применяется теорема Римана–Роха, утверждающая, что число нулевых мод духового поля c минус число нулевых мод поля b равно $(1-2\lambda)(1-g)$. Нулевые моды поля c соответствуют конформным векторам Киллинга, а нулевые моды поля b соответствуют модулям. Этот результат полезен, поскольку из него получается, что число комплексных модулей для сферы с g ручками равно $3g-3$, что будет широко применяться в гл. 5. Из него также следует, что число супермодулей равно $4(g-1)$, что трудно доказать другими способами.) Можно показать, что фермионные вакуумные состояния (для духов обычной бозонной струны Намбу–Гото) на самом деле являются эквивалентными, т. е., умножая фермионные вакуумные состояния на разные степени полей b и c , можно получить другие вакуумные состояния. Поэтому разные вакуумы дают эквивалентные представления. Однако для бозонных вакуумных состояний (для духов (NS-R)-модели) дело обстоит иначе. Оказывается, что разные вакуумные состояния в этом случае неэквивалентны. Никакая комбинация степеней полей β и γ не может перевести один вакуум в другой.

В NS-секторе бозонные вакуумные состояния нумеруются целыми числами, тогда как в R-секторе они нумеруются полупелыми числами. Вакуумные состояния, наиболее близкие к обычному определению вакуума (т. е. они аннигилируются всеми частями осцилляторов, отвечающим положительным частотам), суть

$$\mathbf{R}: \left\{ \begin{array}{l} |-\frac{1}{2}\rangle, \\ |-\frac{3}{2}\rangle, \end{array} \right. \quad (4.4.31)$$

$$\text{NS}: \{ | - 1 \rangle.$$

Они нормируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle -\frac{3}{2} | -\frac{1}{2} \rangle &= 1, \\ \langle -1 | -1 \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Хотя появление бесконечного числа неэквивалентных вакуумных со-

стояний на первый взгляд кажется крахом теории, мы покажем ниже, что это дает вполне приемлемые результаты. В частности, мы покажем, что на массовой поверхности на самом деле безразлично, какой из различных вакуумов мы выберем. Для одного и того же физического процесса все матричные элементы на массовой поверхности дадут одни и те же числа при любом выборе вакуума. Фактически мы сможем построить операторы «смены картины», которые позволят перейти от одного вакуума к другому. Ситуация в точности аналогична исследованной ранее для случая картин F_1 и F_2 (см. (3.3.18) и (3.3.19)).

Исследовав структуру духового сектора (NS–R)-модели, мы должны сделать следующий шаг – найти поле, дающее конформный вес $3/8$, т.е. недостающий фрагмент фермионной вершинной функции.

Бозонизируем теперь ток духового числа, введя в теорию новую функцию φ :

$$j(z) = \varepsilon \delta \varphi(z). \quad (4.4.33)$$

Новый объект, который мы хотим исследовать, это

$$: e^{q\varphi} :. \quad (4.4.34)$$

Его поведение на коротких расстояниях дается формулами

$$j(z) e^{q\varphi(w)} \sim \frac{q}{z-w} e^{q\varphi(w)} + \dots \quad (4.4.35)$$

и

$$T(z) e^{q\varphi(w)} \sim \left[\frac{1}{2} \varepsilon q(q+Q)(z-w)^{-2} + (z-w)^{-1} \partial_w \right] e^{q\varphi(w)} + \dots \quad (4.4.36)$$

Это означает, что

$$e^{q\varphi(0)} |0\rangle = |q\rangle, \quad (4.4.37)$$

$$\text{вес: } \frac{1}{2} \varepsilon q(q+Q). \quad (4.4.38)$$

Тем самым показано, что умножение на бозонизированное поле $e^{q\varphi}$ позволяет нам перейти от одного духового вакуума к другому. Заметим, что духовые вакуумы NS-сектора целые, а духовые вакуумы R-сектора дробные. Поскольку q может быть дробным, это позволяет переходить от одних NS- и R-вакуумов к другим в любом направлении, умножая на $e^{q\varphi}$.

Применим теперь этот метод бозонизации для записи антикоммутирующих полей b и c через новое скалярное бозонное поле σ :

$$\begin{aligned} b(z) &= e^{-\sigma(z)}, \\ c(z) &= e^{\sigma(z)}. \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

(Мы можем проверить, что эти поля обладают правильными конформными весами. Согласно (4.4.38), поле $e^{q\sigma}$ имеет конформный вес $\frac{1}{2}q(q-3)$. Тогда при $q = -1$ поле $e^{-\sigma}$ имеет вес 2, тогда как при $q = 1$

поле e^σ имеет вес -1 . Поэтому они имеют правильные веса.) Заметим, что и левые, и правые части выражений (4.4.39) являются антикоммутирующими полями несмотря на то, что σ само по себе коммутирующее поле. Теперь легко показать, что

$$\langle \sigma(z)\sigma(w) \rangle = \log(z-w); \quad e^{-\sigma(z)}e^{\sigma(w)} \sim \frac{1}{z-w}.$$

Для духового сектора (NS–R)-модели, однако, ситуация сложнее. Здесь духовые поля уже коммутируют, так что бозонизация не представляется возможной. Мы можем, однако, воспользоваться следующим трюком:

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-\varphi} \partial \xi, \\ \gamma &= e^{\varphi} \eta. \end{aligned} \tag{4.4.40}$$

Здесь левые части суть коммутирующие поля, а правые – произведения двух антикоммутирующих полей, т.е. ξ и η также являются антикоммутирующими полями (которые в свою очередь могут быть бозонизированы). Итак, мы выразили коммутирующие поля через антикоммутирующие. Мы можем также обратить эту процедуру:

$$\begin{aligned} \eta &= \partial \gamma e^{-\varphi}, \\ \partial \xi &= \partial \beta e^{\varphi}. \end{aligned} \tag{4.4.41}$$

Заметим, что поля ξ и η сами по себе антикоммутирующие, так что их можно бозонизировать. Выразим эти два антикоммутирующие поля через бозонное поле χ :

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\chi}, \\ \eta &= e^{-\chi}. \end{aligned} \tag{4.4.42}$$

Хотя конформная теория поля обладает тем огромным преимуществом, что в ней все поля свободные, за это приходится заплатить некоторую небольшую цену: необходимо следить за всеми этими разными свободными полями. Поскольку критически важно, чтобы все указанные бозонные поля были четко определены, составим таблицу их квантовых чисел:

Бозон	Заряд	Аномалия	Вес
φ	$Q = 2$	$c = 13$	$\text{wt}(\exp q\varphi) = \frac{1}{2}q(q+2)$
χ	$Q = -1$	$c = -2$	$\text{wt}(\exp q\chi) = \frac{1}{2}q(q-1)$
σ	$Q = -3$	$c = -26$	$\text{wt}(\exp q\sigma) = \frac{1}{2}q(q-3)$

(4.4.43)

Определение бозонных (NS-R)-духов содержит важную тонкость. Заметим, что β определяется через производную от ξ , так что это поле независимо от нулевой моды поля ξ . Поэтому обычное фоковское пространство не зависит от нулевой моды поля ξ . Итак, у нас имеются два возможных фоковских пространства. «Малое» фоковское пространство не содержит нулевой моды поля ξ . «Большое» фоковское пространство содержит эту моду и является приводимым. Поскольку

$$[\eta_0, \xi_0] = 1, \quad (4.4.44)$$

то это значит, что вакуум системы η, ξ вырожденный.

Смысл этого построения в том, что теперь мы можем выписать недостающую часть фермионного вершинного оператора.

§ 4.5. ФЕРМИОННЫЙ ВЕРШИННЫЙ ОПЕРАТОР

Вычислим конформные веса бозонизированных полей:

$$\text{Wt}(e^{-(1/2)\varphi}) = \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) = \frac{3}{8}, \quad (4.5.1)$$

$$\text{Wt}(e^{(1/2)\varphi}) = \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) = -\frac{5}{8}.$$

Теперь недостающая часть найдена. Поскольку бозонизированное поле $e^{-(1/2)\varphi}$ имеет вес $3/8$, мы можем построить настоящую фермионную вершинную функцию нашей теории:

$$V_{-1/2} = u^\alpha e^{-(1/2)\varphi} S_\alpha e^{ik \cdot X}. \quad (4.5.2)$$

Она имеет конформный вес

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \alpha' k^2. \quad (4.5.3)$$

Если поместить внешнюю фермионную линию на массовой поверхности, положив

$$\begin{aligned} k^2 &= 0, \\ \gamma^\mu k_\mu u_\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

то у нас получится вершинная функция с конформным весом 1. Она обладает требуемыми свойствами взаимодействия с BRST-зарядом: с точностью до членов, обращающихся в нуль на массовой поверхности,

$$\{Q_{\text{BRST}}, V_{-1/2}\}_+ = 0. \quad (4.5.5)$$

Это одно из крупных достижений конформной теории поля: построение настоящей фермионной вершинной функции с конформным весом 1, целиком основанной на свободных полях. Ключевым моментом было использование духового сектора для обеспечения недостающего конформного веса $3/8$.

Хотя теперь наша цель достигнута, мы еще не выбрались из чаши. Мы упоминали выше в предыдущем параграфе, что существует одна трудность с бесконечным бозонным морем. Оказывается, что если подставить эту фермионную вершинную функцию в матричный элемент бозонной матрицы рассеяния, то мы получим 0:

$$\langle \dots V_{-1/2} \dots V_{-1/2}, \dots \rangle = 0. \quad (4.5.6)$$

Что нам нужно – это, конечно, вершинная функция с духовым зарядом $+1/2$, который мог бы сократиться с зарядом $-1/2$, происходящим из фермионной вершинной функции. Эта новая вершинная функция $V_{1/2}$ должна антикоммутировать с BRST-зарядом с точностью до членов, обращающихся в нуль на массовой поверхности. Легко показать, что любая вершинная функция

$$V = [Q_{\text{BRST}}, \Phi] \quad (4.5.7)$$

при произвольном Φ дает обращающееся в нуль антикоммутационное соотношение с BRST-зарядом, поскольку Q нильпотентен. Однако все такие функции шпурионные. Эти состояния нулевые и не взаимодействуют с физическими состояниями $|R\rangle$, которые удовлетворяют соотношениям

$$Q_{\text{BRST}}|R\rangle = 0, \quad (4.5.8)$$

так что их нельзя использовать как вершинные функции. Они просто дают нулевые матричные элементы с физическим сектором теории. Однако есть одна вершинная функция, для которой это рассуждение неприменимо:

$$V_{1/2} = 2[Q_{\text{BRST}}, \xi V_{-1/2}]. \quad (4.5.9)$$

В нормальной ситуации следовало бы ожидать, что такая вершинная функция также является шпурионной и не взаимодействует с физическими состояниями системы. Однако $\xi V_{1/2}$, как мы указывали ранее, не является частью неприводимого фоковского пространства теории, и поэтому мы не можем просто сказать, что коммутатор обращается в нуль при сокращении с физическими состояниями. Эта вершинная функция необязательно обращается в нуль, поскольку

$$Q_{\text{BRST}} = \xi|0\rangle \neq 0. \quad (4.5.10)$$

Проведя вычисления, находим, что эта вершинная функция равна

$$V_{1/2} = u^a(k) e^{ik \cdot X} [e^{(1/2)\Phi} (\partial X^\mu + \frac{1}{4} ik \cdot \psi \psi^\mu) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S^\beta + \frac{1}{2} e^{3\Phi/2} \eta b S_\alpha]. \quad (4.5.11)$$

Именно такой оказывается правильная фермионная вершинная функция, сокращающаяся с $V_{-1/2}$.

Именно здесь, однако, мы сталкиваемся с довольно тревожной проблемой. Теперь у нас оказывается слишком много возможных вершинных функций! Например, мы могли бы также написать

$$\begin{aligned}
 V_{3/2} &= [Q_{\text{BRST}}, \xi V_{1/2}], \\
 V_{5/2} &= [Q_{\text{BRST}}, \xi V_{3/2}], \\
 V_{7/2} &= \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.5.12}$$

Фактически существует бесконечно много таких вершинных функций, каждая из которых связана со своим, неэквивалентным другим, бозонным морем вакуума. Конечно, такое изобилие вызывает смущение. Однако можно показать, что нам достаточно использовать лишь $V_{1/2}$ и $V_{-1/2}$, а все другие вершинные функции не дадут каких-либо новых матричных элементов. Мы хотим показать, что справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 \langle \dots V_{-1/2}(u_1, k_1, z_1), \dots, V_{1/2}(u_2, k_2, z_2) \dots \rangle \\
 = \langle \dots V_{1/2}(u_1, k_1, z_1), \dots, V_{-1/2}(u_2, k_2, z_2) \dots \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.5.13}$$

Доказательство того, что мы можем просто заменять произвольным образом духовые индексы $-1/2$ на $+1/2$ или наоборот у вершинных функций, включает довольно тонкие рассуждения, позволяющие переходить от неприводимого малого фоковского пространства (которое не включает нулевой моды поля ξ) к приводимому большому фоковскому пространству (которое эту моду включает) и обратно.

Начнем с того, что перепишем вершинную функцию $V_{1/2}$ в эквивалентной форме:

$$V_{1/2}(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint dw j_{\text{BRST}}(w) \xi(z_2) V_{-1/2}(z_2).
 \tag{4.5.14}$$

Заметим, что теперь эта функция записана в большом фоковском пространстве, так что необходимо подставить другую $\xi(z)$, чтобы переопределить вакуум и получить ненулевой матричный элемент. Однако поскольку положение $\xi(z)$ несущественно (так как нам нужна лишь ее нулевая мода), то можно переписать матричный элемент в виде

$$\langle \dots \xi(z_1) V_{-1/2} \dots \frac{1}{2\pi i} \oint dw j_{\text{BRST}}(w) \xi(z_2) V_{-1/2}(z_2) \dots \rangle.
 \tag{4.5.15}$$

Пока что ничего существенного не сделано. Мы просто перешли от малого фоковского пространства, в котором нулевая мода поля ξ отсутствует, к большому фоковскому пространству, в котором она есть, но матричный элемент остался в точности тем же.

Сделаем теперь следующее наблюдение. Интеграл по контуру, окружающему z_2 , можно менять произвольно, так что деформируем (растянем) этот контур так, что он обойдет сзади риманову поверхность (сферу) и окружит точку z_1 . Конечно, при растяжении контура он будет пересекать другие бозонные вершины, но заметим, что j_{BRST} коммутирует со всеми этими вершинами на массовой поверхности, так что мы

можем передвигать и контур, и ток j_{BRST} произвольным образом, пока они не окружают z_1 .

Заметим, что контур интегрирования теперь окружает точку $\xi V_{-1/2}$, которую можно записать как $V_{+1/2}$. Итак, мы полностью обратили положение контура интегрирования, и теперь мы можем устранить все ξ и вернуться к малому фоковскому пространству. Символически эти шаги можно изобразить так:

$$\begin{aligned} \langle \dots V_{-1/2} \dots V_{1/2} \dots \rangle &\rightarrow \langle \dots (\xi V_{-1/2}) \dots [\oint dw \xi j_{BRST} V_{-1/2}] \dots \rangle \\ &\rightarrow \langle \dots [\oint dw \xi j_{BRST} V_{-1/2}] \dots (\xi V_{-1/2}) \dots \rangle \\ &\rightarrow \langle \dots V_{1/2} \dots V_{-1/2} \dots \rangle. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Цель этого упражнения – показать, что можно успешно поменять местами $+1/2$ и $-1/2$ в выражении для матричного элемента. Это означает, что хотя фермионных вершинных функций бесконечно много, все они дают один и тот же матричный элемент на массовой поверхности.

§ 4.6. СПИНОРЫ И ДЕРЕВЬЯ

Чтобы вычислить древесные амплитуды, необходимо построить явное представление спиновых полей через (NS–R)-операторы. Хотя эти поля в формализме Грина–Шварца были сильно взаимодействующими операторами, в конформной теории поля (и это большое ее преимущество) взаимодействующее спиновое поле действительно может быть выражено через свободные поля, что позволяет вычислять корреляционные функции в явном виде.

Мы построим спиновое поле из генераторов $SO(10)$ -алгебры, которые в свою очередь составлены из $\psi(z)$. $SO(10)$ -алгебра – это алгебра Ли ранга 5 (см. Приложение). Это значит, что из $10(10-1)/2 = 45$ генераторов $SO(10)$ -алгебры 5 взаимно коммутируют, образуя подалгебру Картана. Коммутационные соотношения между этими пятью коммутирующими генераторами и 40 некоммутирующими элементами суть

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Последнее тождество справедливо, если $E_{\alpha+\beta}$ есть повышающий или понижающий оператор. Каждое α – это корневой вектор группы $SO(10)$. Компоненты ε суть структурные константы группы, подчиняющиеся различным условиям симметрии и ассоциативности.

Теперь введем пять взаимно коммутирующих полей ϕ_j и выразим через них 45 генераторов $SO(10)$ -алгебры. Можно представить пять взаимно коммутирующих элементов $SO(10)$ -алгебры в виде

$$\partial\phi_j = H_j. \quad (4.6.2)$$

Чтобы представить остальные 40 генераторов, запишем

$$E_{\alpha} = :e^{i\beta_{\alpha}^i \phi_j} : c_{\alpha}, \quad (4.6.3)$$

где β – матрица, посредством которой корневой вектор α представляется как линейная комбинация векторов ϕ_j :

$$\beta_{\alpha} = (\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0). \quad (4.6.4)$$

Учтем также перестановки в этом выражении. Заметим, что имеется четыре возможные комбинации знаков «+» и «-» в этой формуле и 10 способов размещения этих знаков по пяти позициям в ней. Итак, матрица β содержит 40 элементов. Каждая позиция соответствует одному из полей ϕ_j .

Назначение множителя c_{α} в (4.6.3) – обеспечить выполнение правильных коммутационных соотношений. Если подставить эти выражения в определение алгебры, то выяснится, что мы должны положить

$$c_{\alpha} c_{\beta} = \varepsilon(\alpha, \beta) c_{\alpha+\beta}. \quad (4.6.5)$$

Требование ассоциативности коммутаторов дает соотношение

$$\varepsilon(\alpha, \beta) \varepsilon(\alpha + \beta, \gamma) = \varepsilon(\alpha, \beta + \gamma) \varepsilon(\beta, \gamma). \quad (4.6.6)$$

Одно из многих возможных представлений этих двух коциклов есть

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)}, \quad (4.6.7)$$

где

$$\sigma(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle, \quad (4.6.8)$$

$$\sigma(\alpha, \beta) + \sigma(\beta, \alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \pmod{2}, \quad (4.6.9)$$

(см. [9, 10], где описаны другие представления).

Можно также представить антикоммутирующее векторное поле NS-модели с помощью вышеописанной процедуры бозонизации. Запишем

$$\psi^{\rho_{\alpha}} = :e^{i\rho_{\alpha}^i \phi_j} : c_{\rho_{\alpha}}, \quad (4.6.10)$$

где

$$\rho_{\alpha} = (\pm, 0, 0, 0, 0) \quad (4.6.11)$$

и в последнем выражении допускаются перестановки. Матрица ρ содержит 2×5 элементов, что равно числу элементов векторного поля ψ^{μ} .

Теперь выразим спиновое поле посредством этой бозонизированной картины. Определим матрицу

$$\alpha_{\alpha} = \frac{1}{2} (\pm, \pm, \pm, \pm, \pm). \quad (4.6.12)$$

Заметим, что она содержит $2^5 = 32$ элемента. Определим

$$S_{\alpha} = :e^{i\alpha_{\alpha}^i \phi_j} : c_{\alpha}. \quad (4.6.13)$$

Это поле S_α имеет правильное число компонент для десятимерного спинора. Кроме того, его вес равен $5/8$, поскольку каждый из составляющих его множителей имеет вес $1/8$ и таких множителей пять, что составляет суммарно $5/8$. Это подтверждает приведенное выше в (4.3.9) утверждение, которое основывалось исключительно на теоретико-групповых соображениях: спиновое поле S_α имеет вес $5/8$.

Поле $e^{-1/2\varphi}$ имеет вес $3/8$, а поле $e^{(1/2)\varphi}$ — вес $-5/8$. Итак, наша вершинная функция с весом 1 дается формулой

$$V_{-1/2, \alpha} = S_\alpha e^{-(1/2)\varphi} : e^{ik \cdot X} :. \quad (4.6.14)$$

Теперь, располагая явным представлением спинорового поля, мы можем вычислить матричные элементы фермион-фермионного рассеяния.

Вычислим амплитуду рассеяния четырех фермионов, представленную как произведение трех независимых факторов, включающих X , S_α и $e^{-(1/2)\varphi}$:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_4}(z_4) \rangle. \quad (4.6.15)$$

Мы положим $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = z$, $z_4 = 0$.

Вычислим каждый из этих факторов отдельно. Применяя выведенную выше в гл. 2 формулу, найдем, что зависящие от переменной X множители равны

$$\langle V(k_1, z_1) V(k_2, z_2) \dots V(k_N, z_N) \rangle = \prod_{i \neq j} (z_i - z_j)^{k_i \cdot k_j}, \quad (4.6.16)$$

где

$$V(k, z) = : e^{ikX(z)} : \quad (4.6.17)$$

и сумма всех k , равна нулю.

Теперь найдем вклад духов, который равен

$$\langle e^{-(1/2)\varphi(\infty)} e^{-(1/2)\varphi(1)} e^{-(1/2)\varphi(z)} e^{-(1/2)\varphi(0)} \rangle = [z(1-z)]^{-1/4}. \quad (4.6.18)$$

Наконец, вклад спинорового поля равен

$$\begin{aligned} & \langle S_\alpha(\infty) S_\beta(1) S_\gamma(z) S_\delta(0) \rangle \\ & = [z(1-z)]^{-3/4} \{ (1-z)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha\delta} - z(\gamma^\mu)_{\alpha\delta} (\gamma_\mu)_{\beta\gamma} \}. \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} A_4 & = g^2 \int_0^1 dz z^{k_3} z^{k_2-1} (1-z)^{k_3} z^{k_4-1} \\ & \quad \times \{ (1-z)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha\delta} - z(\gamma^\mu)_{\alpha\delta} (\gamma_\mu)_{\beta\gamma} \}. \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

Переписав эту амплитуду, окончательно получаем

$$A_4 = g^2 \left\{ B\left(1 - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}s\right) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - B\left(-\frac{1}{2}t, 1 - \frac{1}{2}s\right) (\gamma^\mu)_{\alpha\delta} (\gamma_\mu)_{\beta\gamma} \right\}. \quad (4.6.21)$$

Эти вычисления, как и другие, включающие N -точечные амплитуды рассеяния фермионов, не столь трудны в рамках конформной теории поля [9, 10], но были бы чрезвычайно трудны в прежних ковариантных формализмах NS–R и GS.

§ 4.7. АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ

Хотя конформная теория поля дает мощные результаты, начинающему различные правила и соглашения могут показаться слишком произвольными и случайными. На первый взгляд создается впечатление, что конформная теория поля основана на хитроумных трюках и совпадениях, а не на чем-то фундаментальном.

На самом деле последовательность и элегантность конформной теории поля связана с новыми бесконечномерными алгебрами Ли, называемыми алгебрами Каца–Муди [11–22], которые являются мощными обобщениями обычных конечномерных алгебр Ли. Они были открыты математиками В. Г. Кацем и Р. В. Муди в 1967 г., хотя одна разновидность таких алгебр была уже известна физикам в середине 60-х годов под названием алгебр токов. Вместе с суперконформной двумерной группой $SO(10)$ -алгебра Каца–Муди обеспечивает математическую основу конформной теории поля. Фактически многие матричные элементы в конформной теории поля можно рассматривать как коэффициенты Клебша–Гордона в алгебрах Каца–Муди.

Определим алгебру Каца–Муди как обобщение обычной алгебры Ли, такое, что ее генераторы подчиняются условию

$$[T_m^i, T_n^j] = if^{ijl} T_{m+n}^l + km\delta^{ij}\delta_{m,-n}. \quad (4.7.1)$$

Эта алгебра очень похожа на обычную алгебру Ли, за исключением бесконечного целочисленного индекса m у каждого генератора и константы k , называемой уровнем. Нулевая компонента генераторов T есть не что иное, как алгебра конечной алгебры Ли. Часто будет удобно переписать генераторы алгебры Каца–Муди как фурье-компоненты одной функции, определенной на окружности:

$$T^i(\theta) = \sum_n T_n^i e^{-in\theta}. \quad (4.7.2)$$

Мы можем также редуцировать генераторы алгебры Каца–Муди к подалгебре Картана и ее собственным векторам:

$$H_i(\theta): E_\alpha(\theta). \quad (4.7.3)$$

Таким образом, алгебра Каца–Муди выглядит как обычная алгебра Ли, «размазанная» по окружности.

Теперь построим то, что называется «базовым представлением» алгебры Каца–Муди, используя вершинные операторы. Это представление справедливо лишь для групп с простыми связями (т.е. групп с корнями равной длины, а именно групп Ли D и E) и уровнем, равным

единице ($k = 1$). Сначала определим струнную переменную

$$\varphi_i(\theta) = q_i + p_i \theta + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^i e^{-in\theta}}{n}. \quad (4.7.4)$$

Затем введем базисные векторы решетки нашей алгебры Ли, такие, что

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (4.7.5)$$

Это позволяет записать струнную переменную и вершинную функцию как векторы на решетке:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \sum \mathbf{e}_i \varphi_i, \\ q_i(\theta) &= :e^{i\varphi_i(\theta)}: c_i. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Здесь c_i — уже знакомые коциклы, введенные в (4.6.5) с целью получить коммутационные соотношения с правильными знаками. Для них возможны многочисленные представления, одно из которых

$$c_i = \exp \left\{ \frac{1}{2} i\pi \left(\sum_{k < i} - \sum_{k > i} \right) \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{p} \right\}. \quad (4.7.7)$$

Наконец, это позволяет ввести генераторы алгебры Каца–Муди:

$$\begin{aligned} H_i(\theta) &= :q_i^*(\theta) q_i(\theta): = -\frac{d\varphi_i}{d\theta}, \\ E_\alpha &= :q_j^*(\theta) q_k(\theta): = \pm ic_j^* c_k : e^{i\alpha\varphi(\theta)}: . \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

Здесь $\alpha = \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$, знак «+» используется для $k > j$, а знак «−» для $k < j$. Поскольку элементы с индексами i и j коммутируют, то H суть обобщения подалгебры Картана, т. е. набор взаимно коммутирующих элементов алгебры Ли.

Вычислим теперь коммутатор этих генераторов. Весьма похожим на то, что мы делали выше, способом находим, что произведение двух вершинных функций определяется формулами

$$\begin{aligned} V(\alpha, \theta) &= :e^{i\alpha\varphi(\theta)}:, \\ V(\alpha, \theta) V(\beta, \theta') &= \Delta(\theta - \theta')^{-\alpha\beta} :e^{i\alpha\varphi(\theta) + i\beta\varphi(\theta')}:, \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

где

$$\Delta(\theta - \theta') = e^{-i(1/2)(\theta - \theta')} (1 - (1 - \varepsilon)e^{-i(\theta - \theta')})^{-1} \sim \frac{-i}{\theta - \theta' + i\varepsilon} + \dots \quad (4.7.10)$$

Теперь у нас есть все тождества, необходимые для вычисления коммутатора для всех генераторов. Прямым вычислением находим

$$\begin{aligned} [H_i(\theta), H_j(\theta')] &= 0, \\ [H_i(\theta), E_\alpha(\theta')] &= -2\pi\delta(\theta - \theta') \alpha_i E_\alpha(\theta). \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Заметим, что H взаимно коммутируют, как и в обычной алгебре Ли,

и что α_i суть собственные значения для H . Остальные коммутаторы для различных E даются формулами

$$[E_a(\theta), E_{-a}(\theta)] = 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_i \alpha_i H_i(\theta) + 2\pi i \delta'(\theta - \theta'), \quad (4.7.12)$$

$$[E_a(\theta), E_b(\theta')] = \begin{cases} 2\pi\delta(\theta - \theta') E_{a+b}(\theta), & \text{если } a + b \in \Gamma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7.13)$$

(Γ есть решетка корней.) Итак, мы видим, что коммутаторы алгебры Каца–Муди очень похожи на обычные коммутаторы алгебры Ли, с тем единственным отличием, что генераторы «размазаны» по окружности.

Очень важно также заметить, что возможно полупрямое произведение алгебры Вирасоро и алгебры Каца–Муди. Коммутаторы суть

$$[L_m, T_n^i] = -n T_{m+n}^i, \quad (4.7.14)$$

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n, -m}.$$

В зависимости от того, какое представление этой алгебры мы выберем, можно получить связь между уровнем k алгебры Каца–Муди и центральным элементом c алгебры Вирасоро. Одно из замечательных свойств алгебры Каца–Муди – то, что можно построить представление алгебры Вирасоро, целиком выраженное через формализм алгебры Каца–Муди. Запишем генераторы алгебры Вирасоро, размазанные по окружности:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{1}{2} N \left(\sum_i : H_i(\theta)^2 : + \sum_a : E_a(\theta) E_{-a}(\theta) : \right) \\ &= \frac{1}{2} N \left(\sum_{i=1}^d : T_i(\theta)^2 : \right). \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

Такая запись называется формой Сугавары.

У нас есть все необходимые тождества для вычисления коммутатора таких выражений, и мы находим

$$\begin{aligned} [L(\theta), L(\theta')] &= 2\pi i \delta'(\theta - \theta') (L(\theta) + L(\theta')) \\ &\quad - \frac{c}{12} 2\pi i (\delta'''(\theta - \theta') + \delta'(\theta - \theta')), \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} c_2(G)}, \\ c &= \frac{d}{1 + \frac{1}{2} c_2(G)}. \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

В последних формулах d – размерность группы, а $c_2(G)$ – значение квад-

ратичного оператора Казимира для присоединенного представления.

Последний коммутатор дает полупрямое произведение алгебр Ви-расоро и Каца–Муди:

$$[L(\theta), E_a(\theta')] = \delta'(\theta - \theta') E_a(\theta). \quad (4.7.18)$$

Приведем вычисленные значения центрального заряда для некоторых групп:

c	Группа
$n - 1$	$SU(n)$
$n + \frac{1}{2}$	$SO(2n + 1)$
n	$SO(2n)$
n	E_n
$\frac{n(2n + 1)}{n + 2}$	$Sp(n)$

На основе подхода алгебр Каца–Муди заново рассмотрим конформную теорию поля, интерпретируя результаты этой теории с теоретико-групповой точки зрения. Мы видим, что спиновые поля, определенные формулой (4.6.13), преобразуются под действием алгебры Каца–Муди как 32-компонентный спинор. Аналогично, антикоммутирующие векторные поля NS-модели, определенные формулой (4.6.10), преобразуются под действием $SO(10)$ -алгебры Каца–Муди как 10-компонентные векторы. Можно также рассматривать тензор энергии–импульса (4.3.5) как форму Сугавары представления алгебры Вирасоро посредством $SO(10)$ -алгебры Каца–Муди. Кроме того, духи b, c, β, γ конформной теории поля можно считать представлениями суперконформной группы с разными значениями центрального элемента, приведенными в таблице (4.4.43). Наконец, мы можем также рассматривать корреляционные функции, служащие ядром конформной теории поля, как коэффициенты Клебша–Гордона, найденные при разных тензорных произведениях разных представлений $SO(10)$ -алгебры Каца–Муди, связанной с суперконформной группой.

§ 4.8. СУПЕРСИММЕТРИЯ

Теперь, наконец, можно построить оператор суперсимметрии этой теории, позволяющий переходить от бозонного к фермионному сектору и обратно. Поскольку конформный вес $V_{\pm 1/2}$ равен 1, то интеграл от этой вершинной функции инвариантен относительно конформной группы преобразований. Поэтому если взять $k = 0$, то получится оператор суперсимметрии

$$Q_{\pm 1/2, \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz V_{\pm 1/2, \alpha}. \quad (4.8.1)$$

Беря знаки «+» или «-» для фермионной вершинной функции, находим

$$\begin{aligned} Q_{-1/2, \alpha} &= S_{\alpha} e^{-(1/2)\Phi}, \\ Q_{1/2, \alpha} &= e^{(1/2)\Phi} S^{\beta}(\gamma^{\mu})_{\beta\alpha} \partial_z X_{\mu}. \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

Эти операторы действительно обладают свойством превращать фермионный сектор в бозонный и наоборот:

$$\begin{aligned} [Q_{\alpha}, V_F(u, k, z)]_+ &= V_B(\xi^{\mu} = u^{\beta}(\gamma^{\mu})_{\beta\alpha}, k, z), \\ [Q_{\alpha}, V_B(\zeta, k, z)] &= V_F(u^{\beta} = ik^{\mu}\zeta^{\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}, k, z). \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Снова, однако, мы сталкиваемся с проблемой наличия бесконечного числа таких операторов суперсимметрии, связывающих друг с другом различные неэквивалентные бозонные моря. Однако, согласно приведенным выше соображениям, нам не нужно об этом беспокоиться. Хотя существует бесконечно много неэквивалентных бозонных вакуумов, матричные элементы для этих состояний совпадают.

§ 4.9. РЕЗЮМЕ

Крупное преимущество суперконформной теории поля состоит в том, что она сочетает лучшие черты моделей NS-R и GS. Она явно ковариантна, целиком построена на свободных полях, обладает ковариантным суперсимметричным генератором, имеет спиновые поля с весом 5/8, фермионные вершинные функции с весом 1, и с ней легко работать.

У конформной теории поля есть, однако, два недостатка. Во-первых, нам приходится тщательно следить за многочисленными бозонизированными духами. К счастью, эти духи являются свободными полями и действуют в других гильбертовых пространствах. Во-вторых, у нас имеется бесконечно много «картин». К счастью, итоговая S -матрица не зависит от выбора «картины».

Сущность конформной теории поля состоит в том, что мы можем вычислить корреляционные функции различных полей, зная лишь их поведение на коротких расстояниях и то, как они преобразуются. Например, корреляционная функция

$$\langle e^{ikX(w)} e^{-ikX(z)} \rangle \sim (w-z)^{-k^2}$$

может быть вычислена, если мы знаем поведение двух струнных полей.

Одно из достижений конформной теории поля — построение фермионной вершинной функции с конформным весом 1. Эта функция зависит от спинорного поля S_{α} , которое должно преобразовываться как настоящий спинор под действием лоренцевой группы SO(10):

$$j^{\mu\nu}(z) S_{\alpha}(w) \sim \frac{1}{4} \frac{1}{z-w} (\gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]})_{\alpha}^{\beta} S_{\beta}(w) + \dots \quad (4.9.1)$$

Другие соображения, вроде того, что поле имеет размерность $5/8$, позволяют фиксировать соотношения

$$\Psi^\mu(z) S_\alpha(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^2} (\gamma^\mu)_\alpha^\beta S_\beta(z) + \dots, \quad (4.9.2)$$

$$S_\alpha(z) S^\beta(w) \sim \frac{-1}{(z-w)^{5/4}} \delta_\alpha^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}} (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \Psi^\mu(z) + \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{1/4}} (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \Psi^\mu(z) \Psi^\nu(z) + \dots \quad (4.9.3)$$

Если нам полностью известно поведение спинового поля на коротких расстояниях, мы можем построить вершинную функцию с весом 1. Нам нужен еще один фактор с весом $3/8$, происходящий из духового сектора теории:

$$S_{gh} = \frac{1}{\pi} \int d^2z d\theta d\bar{\theta} B \bar{D} C + \text{компл.-сопр. выраж.}, \quad (4.9.4)$$

где

$$\begin{cases} B(z) = \beta(z) + \theta b(z), \\ C(z) = c(z) + \theta \gamma(z). \end{cases} \quad (4.9.5)$$

Духовой сектор можно бозонизировать в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-\varphi} \partial \xi, \\ \gamma &= e^{\varphi} \eta. \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

Это позволяет, наконец, написать вершинную функцию с конформным весом 1 на массовой поверхности:

$$V_{-1/2} = u^\alpha e^{-(1/2)\varphi} S_\alpha e^{ik \cdot X}. \quad (4.9.7)$$

Ее конформный вес равен

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \alpha' k^2. \quad (4.9.8)$$

Чтобы выписать амплитуды, которые могли бы сократиться с вершинным оператором с индексом $-1/2$, нам нужна соответствующая вершинная функция с индексом $+1/2$, которая дается выражением

$$\begin{aligned} V_{1/2} &= u^\alpha(k) e^{ik \cdot X} [e^{(1/2)\varphi} (\partial X^\mu + \frac{1}{4} ik \cdot \psi \psi^\mu) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S^\beta \\ &+ \frac{1}{2} e^{3\varphi/2} \eta b S_\alpha]. \end{aligned} \quad (4.9.9)$$

Располагая этими двумя вершинными функциями, мы можем теперь построить многофермионные амплитуды рассеяния.

Один из недостатков этого формализма — то, что у нас имеется бесконечно много вакуумных состояний и, следовательно, бесконечно

много вершинных функций. Эти вакуумные состояния можно построить следующим образом:

$$e^{q\varphi(0)}|0\rangle = |q\rangle, \quad (4.9.10)$$

$$\text{вес: } \frac{1}{2} \varepsilon q(q + Q). \quad (4.9.11)$$

Это позволяет построить бесконечную серию фермионных вершинных функций. Например, любое из выражений

$$\begin{aligned} V_{3/2} &= [Q_{BRST}, \xi V_{1/2}], \\ V_{5/2} &= [Q_{BRST}, \xi V_{3/2}], \\ V_{7/2} &= \dots \end{aligned} \quad (4.9.12)$$

можно взять в качестве приемлемой вершинной функции с весом 1. Такое чрезмерное изобилие смущает. Однако можно показать, что по крайней мере на массовой поверхности все эти функции эквивалентны. Поэтому мы можем выбрать по желанию любую из них и построить фермион-фермионные амплитуды рассеяния.

Одно из крупных преимуществ этого формализма состоит в том, что теперь мы можем построить генератор суперсимметрии, который является просто вершинной функцией, проинтегрированной по переменной z . Фактически мы получаем бесконечно много неэквивалентных операторов суперсимметрии и все они на массовой поверхности эквивалентны:

$$Q_{-1/2, \alpha} = S_{\alpha} e^{-(1/2)\varphi}, \quad (4.9.13)$$

$$Q_{1/2, \alpha} = e^{(1/2)\varphi} S^{\beta} (\gamma^{\mu})_{\beta\alpha} \partial_z X_{\mu}, \text{ etc.}$$

Наконец, можно получить последовательную целостную картину конформной теории поля, если рассматривать ее как один из способов вычисления матричных элементов для бесконечномерных алгебр Каца-Муди и суперконформной алгебры. Алгебра Каца-Муди обладает коммутационными соотношениями

$$[T_m^i, T_n^j] = if^{ijl} T_{m+n}^l + km\delta^{ij}\delta_{m, -n},$$

в которых все f суть структурные постоянные конечномерной алгебры Ли. Для алгебр уровня 1 с простыми связями можно построить базисное представление алгебры Каца-Муди. Это базисное представление дается на языке вершинных операторов, впервые полученных в теории струн.

В указанном формализме спинорные поля S_{α} и ψ -поля NS-R-модели можно рассматривать как спинорное и векторное представления $SO(10)$ -алгебры Каца-Муди, а различные духовые поля (b, c) и (β, γ) — как различные представления суперконформной алгебры. Корреляционные функции тогда можно считать коэффициентами Клебша-Гордона для комбинированной алгебры, включающей $SO(10)$ -алгебру Каца-Муди и суперконформную алгебру.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Friedan D. In: Unified String Theories, eds. M. B. Green and D. Gross, World Scientific, Singapore, 1986.
- [2] Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. Nucl. Phys. **B247**, 83 (1984).
- [3] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984).
- [4] Friedan D., Martinec E., Shenker S. Nucl. Phys. **B271**, 93 (1986).
- [5] Friedan D., Martinec E., Shenker S. Phys. Lett. **160B**, 55 (1985).
- [6] Knizhnik V. G. Phys. Lett. **160B**, 403 (1985).
- [7] Mandelstam S. Phys. Rev. **D11**, 3026 (1975).
- [8] Coleman S. Phys. Rev. **D11**, 2088 (1975).
- [9] Cohn J., Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Nucl. Phys. **B278**, 577 (1986).
- [10] Kosteletsky V. A., Lechtenfeld O., Lerche W., Samuel S. Nucl. Phys. **B288**, 173 (1987).
- [11] Кац В. Функц. анализ и его прилож. **1**, 328 (1967).
- [12] Moody R. V. J. Algebra **10**, **211** (1968).
- [13] Goddard P., Olive D. Int. J. Mod. Phys. **A1**, 303 (1986).
- [14] Goddard P., Nahm W., Olive D. Phys. Lett. **160B**, 111 (1985).
- [15] Goddard P., Kent A., Olive D. Comm. Math. Phys. **103**, 105 (1986).
- [16] Lepowsky J., Mandelstam S. In: Vertex Operators in Mathematics and Physics, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [17] Bardakci K., Halpern M. B. Phys. Rev. **D3**, 2493 (1971).
- [18] Halpern M. B. Phys. Rev. **D12**, 1684 (1975).
- [19] Goddard P., Nahm W., Olive D. Phys. Lett. **160B**, 111 (1985).
- [20] Goddard P., Kent A., Olive D. Comm. Math. Phys. **103**, 105 (1986).
- [21] Кас В. Infinite Dimensional Lie Algebras. Birkhauser, Boston, 1983. [Имеется перевод: Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. – М.: Мир, 1993.]
- [22] Moody R. V. Bull. Am. Math. Soc. **73**, 217 (1974).

МНОГОПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ И ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

§ 5.1. УНИТАРНОСТЬ

Одна из наиболее привлекательных особенностей теории струн – это возможность создания теории гравитации, которая была бы полностью финитной и поэтому независимой от обычной теории перенормировки. Теория струн способна обеспечить такой подход, в рамках которого впервые может быть сформулирована финитная квантовая теория гравитации. Особенный интерес вызывает механизм, с помощью которого достигается устранение всех потенциальных расходимостей, а именно использование топологических соображений для устранения определенных типов расходимостей. Мы снова убеждаемся в огромной мощи симметрии, встроенной в струнную модель. Мы покажем, например, что потенциально расходящиеся диаграммы топологически эквивалентны испусканию эффективного дилатона. Поэтому, устраняя дилатон из теории, мы получаем теорию, свободную от каких-либо явных расходимостей. Итак, механизмы, ответственные за устранение потенциально опасных диаграмм, принципиально новы и никогда прежде не возникали в квантовой теории поля, использующей формализм точечных частиц.

До сих пор мы разрабатывали только первично квантованную теорию взаимодействия струн без петель. Этим способом, конечно, нельзя получить унитарную теорию. Бета-функция Эйлера, как мы показали выше, имеет полюсы в s -плоскости на вещественной оси без мнимых частей или разрезов, и поэтому такая теория описывает лишь древесные диаграммы. Прежде делались попытки модифицировать исходную бета-функцию, добавив мнимую часть к массе резонансов:

$$A(s, t) \rightarrow \sum_J \frac{\alpha_J}{s - M_J^2 + i\Gamma_J} \quad ; \quad (5.1.1)$$

Однако при этом неизбежно разрушались замечательные свойства бета-функции.

Правильный способ сделать модель унитарной в конце концов предложили Киккава, Сакита и Вирасоро [1] в 1969 г.: добавить петли, рассматривая бета-функцию как борновский член пертурбативного подхода к определению S -матрицы. Фактически многопетлевые амплитуды вычислили Каку, Яу, Лавлейс и Алессандрини [2–8].

Чтобы понять, как строятся ряды теории возмущений, начнем с оператора временной эволюции U , который преобразует начальное состояние с $t = -\infty$ в конечное состояние с $t = \infty$. S -матрица представлена матричным элементом оператора U :

$$S_{ij} = \langle i | U(-\infty, \infty) | f \rangle. \quad (5.1.2)$$

Поскольку оператор временной эволюции унитарен, то сама S -матрица тоже унитарна:

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1. \tag{5.1.3}$$

В матричной форме это записывается как

$$\sum_n \langle i|S|n\rangle \langle n|S^\dagger|j\rangle = \delta_{ij}, \tag{5.1.4}$$

где разные n суть полный набор промежуточных состояний. Если выделить состояние, соответствующее отсутствию рассеяния, мы получим T -матрицу:

$$S = 1 - iT. \tag{5.1.5}$$

Тогда

$$i(T - T^\dagger) = TT^\dagger. \tag{5.1.6}$$

Если взять матричные элементы для рассеяния многочастичного начального состояния $\langle i|$, превращающегося в конечное многочастичное состояние $|j\rangle$, то мы получим

$$\text{Im } T_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_n \langle i|T|n\rangle \langle n|T^\dagger|j\rangle \tag{5.1.7}$$

(см. рис. 5.1). Если представить амплитуду рассеяния четырех струн как $\langle i|T|k\rangle$, то ясно, что мы должны сочетать различные четырехточечные функции, чтобы получить следующий порядок теории возмущений. Поскольку струны могут перекручиваться, заметая двумерную поверхность, то набор фейнмановских диаграмм для петель шире, чем для простых плоских диаграмм. Фактически, как показывает рис. 5.2, существуют три типа диаграмм, которые можно построить с использованием оптической теоремы.

Для открытой струны взаимодействия замечают мировую поверхность, топологически эквивалентную диску с отверстиями. Кроме того,

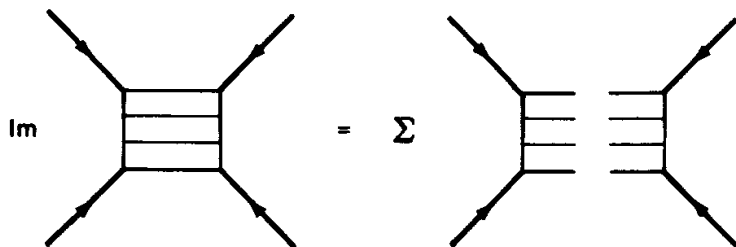


Рис. 5.1. Унитарность S -матрицы. Мнимая часть амплитуды рассеяния пропорциональна квадрату ее абсолютной величины. Этим способом мы можем построить диаграммы высших петель из древесных диаграмм более низкого порядка. Именно этим способом стремились обеспечить унитарность Киккава, Сакига и Вирасоро.

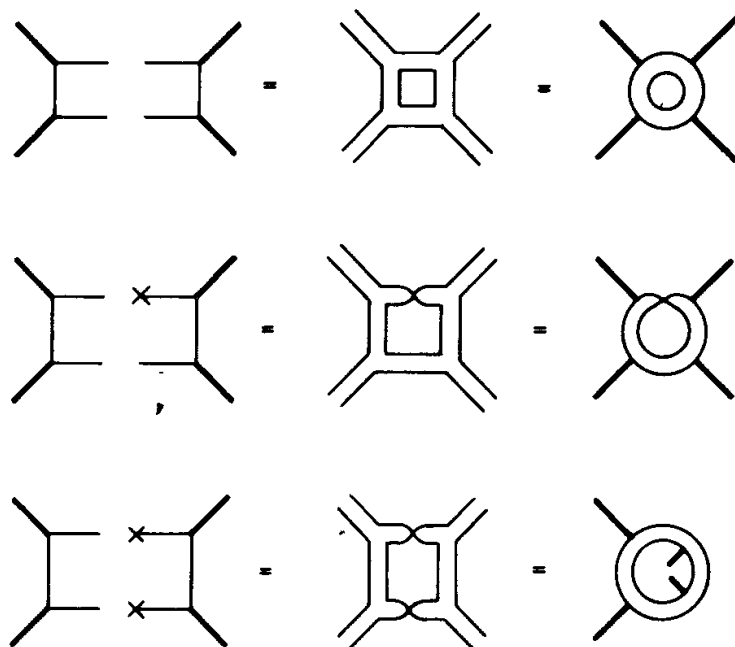


Рис. 5.2. Планарные, непланарные и неориентируемые однопетлевые диаграммы для открытых струн. Унитарность вынуждает нас сшивать графы этих трех типов. (Знак \times на струне соответствует твистованной линии.) Неориентируемая диаграмма соответствует листу Мёбиуса. Непланарная диаграмма соответствует помещению нескольких внешних тахионных линий на границу внутренней петли.

диск может содержать «твисты». (Твист получается, если сделать разрез по линии, соединяющей два отверстия, а затем заклеить разрез, обратив ориентацию точек вдоль разреза.) Упомянутые выше три типа открытых струнных диаграмм следующие.

- (1) Плоские диаграммы. Они топологически эквивалентны диску с N отверстиями, проделанными в его внутренности, а внешние линии прикрепляются к его внешнему краю. ;
- (2) Неплоские ориентируемые диаграммы. Здесь внешние линии могут прикрепляться как к внешнему краю, так и к некоторым внутренним отверстиям или же отверстия могут перекрываться.
- (3) Неориентируемые диаграммы. У таких диаграмм поверхность диска содержит нечетное число твистов. Примером неориентируемой диаграммы служит лист Мебиуса.

Для замкнутой струны древесная диаграмма, заметаемая взаимодействующей струной, топологически эквивалентна сфере. Существует два типа петлевых диаграмм, которые можно построить из замкнутой струны. Прорежем $2N$ отверстий на поверхности сферы и тщательно пометим ориентацию точек вдоль окружности, представляющей край каждого отверстия. Затем соединим N пар отверстий, чтобы получить сферу с N ручками. Эти два типа диаграмм следующие.

- (1) Плоские диаграммы. В них ориентация кромок каждой пары от-

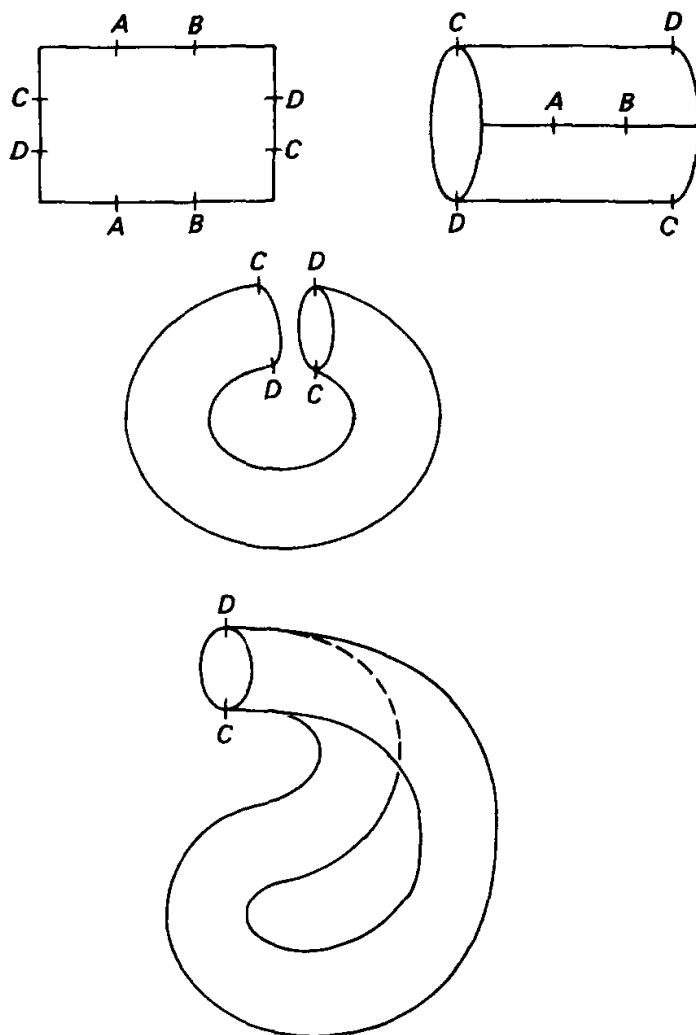


Рис. 5.3. Бутылка Клейна. Отождествляя противоположные стороны прямоугольника, можно получить либо тор, либо (если обратить ориентации сторон) бутылку Клейна, изображенную на нижнем рисунке. Это двумерная замкнутая поверхность, у которой имеется только одна сторона.

верстий сохраняется при повторном сшивании диаграммы (приклеивании ручек). Бублик, например, — это плоская однопетлевая диаграмма.

- (2) Неориентируемые диаграммы. Пары точек, лежащие на замкнутых краях отверстий, соединяются с обращением ориентации отверстий. Бутылка Клейна, например, является неориентируемой диаграммой (на рис. 5.3 показано, как можно склеить бутылку Клейна из плоской двумерной поверхности отождествлением отрезков ее границы). (Заметим, что бутылки Клейна встречаются в рядах теории возмущений только для струн типа I. Струны типа II обладают собственной ориентацией и не могут порождать бутылки Клейна.)

В функциональном формализме мы показали выше, что все древесные диаграммы строятся вычислением функции Неймана для диска или сферы [9–11]. Простейший способ вычисления этой функции Неймана состоял в конформном отображении диска или сферы на верхнюю полуплоскость или на всю комплексную плоскость. Мы тогда воспользовались методом, разработанным в электростатике, а именно методом изображений, чтобы выписать функцию Неймана

$$G(z, z) = \ln|z - z'| + \ln|z - \bar{z}'|. \quad (5.1.8)$$

Теперь мы обобщим эти рассуждения на римановы поверхности с отверстиями. К счастью, математики давно вычислили функцию Неймана для диска и сферы с N отверстиями. На самом деле Бернсайд решил эту задачу еще в 1891 году! Решения этой классической задачи выражены через *автоморфные функции*, которые мы сейчас проанализируем.

§ 5.2. ОДНОПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ

Сначала выпишем континуальный интеграл для однопетлевой диаграммы

$$A = \int_S DX d\mu e^{iS} \prod_{i=1}^N e^{ik_i X_i}, \quad (5.2.1)$$

в котором интегрирование проводится по горизонтальной полосе в комплексной плоскости (см. рис. 5.4), имеющей конечную длину, и отождествим ее левую и правую границы. Тем самым мы построим поверхность, топологически эквивалентную диску с отверстием. Этот континуальный интеграл, разумеется, можно вычислить в явном виде, что даст фактор

$$\exp \sum k_i N(z_i, z'_j) k_j, \quad (5.2.2)$$

где N – функция Неймана.

Теперь топологически деформируем горизонтальную полосу в следующую поверхность. Рассмотрим кольцо, определенное как область в верхней полуплоскости с внешним радиусом r_b и внутренним радиусом r_a , причем отношение радиусов обозначим $w = r_b/r_a$.

Теперь потребуем отождествления внешнего периметра с внутренним. Это значит, что точка z на внешнем периметре должна быть отождествлена с точкой на внутреннем периметре, имеющей тот же полярный угол:

$$z \rightarrow wz. \quad (5.2.3)$$

Такое отождествление создаст полукруговую трубку в верхней полуплоскости. Конформное отображение горизонтальной полосы в такую трубку есть просто экспонента.

Трубку в свою очередь можно отобразить на диск с отверстием, растянув один ее конец в окружность большого радиуса и затем стянув

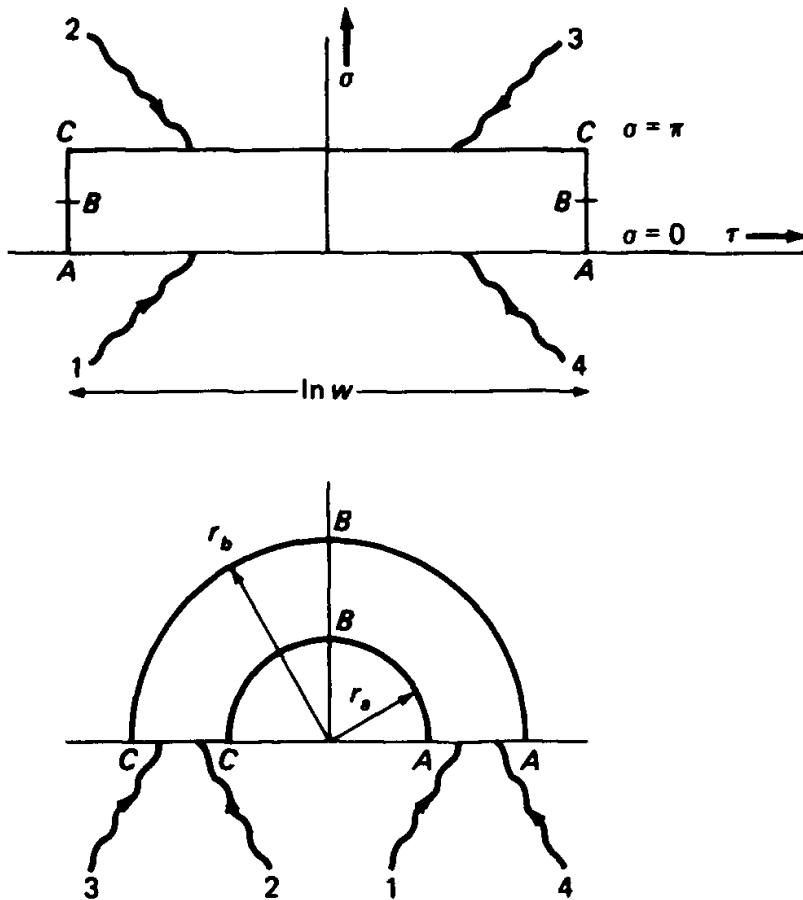


Рис. 5.4. Конформная поверхность однопетлевой диаграммы для открытой струны. В плоскости w эта поверхность соответствует прямоугольнику с шириной π и с произвольной длиной, концы которого отождествлены. Прямоугольники с постоянной шириной и меняющейся длиной конформно эквивалентны, так что в континуальном интеграле мы должны интегрировать по всем длинам. Волнистые линии соответствуют струнам «нулевой ширины», или тахионам, которые могут прикрепляться к поверхности как на верхней, так и на нижней границах. В плоскости z эта поверхность соответствует узкой трубке, согнутой в полукольцо, из обоих концов которой выходят внешние линии.

другой ее конец. При построении функций Неймана на этом кольце нас, очевидно, будут интересовать функции, обладающие свойством

$$\psi(z) = \psi(wz). \quad (5.2.4)$$

Если взять произвольные степени w , это отождествление фактически разобьет верхнюю полуплоскость на бесконечное число концентрических полуколец. Каждая из этих концентрических окружностей имеет радиус w^n . Отождествляя внешний периметр одного из колец с его внутренним периметром, можно создать бесконечную последовательность трубок. Таким образом, вся верхняя полуплоскость может быть разбита на бесконечную последовательность этих трубок, но нас интересует лишь одна из них.

Итак, мы разбили верхнюю полуплоскость, отождествляя concentрические окружности, порожденные умножением на число w . Это число w тем самым параметризует диск с отверстием. Оно называется *параметром Тейхмюллера* однопетлевой диаграммы. Такие параметры допускают естественное обобщение на поверхности с N отверстиями.

В общем случае мы можем также разбить верхнюю полуплоскость, используя произвольное проективное преобразование, которое, как мы видели выше, отображает вещественную ось на себя. (В общем случае окружности переходят в окружности при проективных преобразованиях.) Определим автоморфную функцию как функцию, обладающую свойством

$$\psi(z) = \psi(z'), \quad (5.2.5)$$

где мы сделали проективное преобразование группы

$$SL(2, \mathbb{R}): \begin{cases} z' = \frac{az + b}{cz + d}, \\ ad - bc = 1 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

для вещественных (a, b, c) и d . (Фазы могут иногда входить в свойства периодичности этих функций.) К счастью, математики вычислили эту функцию. Функция Неймана равна

$$N(z, z') = \ln |\psi(z'/z, w)| + \ln |\psi(\bar{z}'/z, w)|, \quad (5.2.7)$$

где мы требуем, с точностью до фазового множителя, чтобы эта функция была периодической:

$$\psi(z, w) = \psi(wz, w). \quad (5.2.8)$$

В явном виде эта периодическая функция равна

$$\begin{aligned} \ln \psi(x, w) = & \ln(1 - x) - \frac{1}{2} \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \ln w} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(1 - w^{2n}x) + \ln(1 - w^n/x) - 2 \ln(1 - w^n)]. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Заметим, что эта функция явным образом обладает требуемым свойством периодичности, упомянутым выше. Поэтому при взятии экспоненты от функции Неймана (см. (5.2.2)) окажется, что импульсный фактор подынтегрального выражения содержит множители вида

$$\prod_{n=1}^N \prod_{i < j} (z_i - w^n z_j)^{k_i k_j}. \quad (5.2.10)$$

Эту функцию можно также выразить через η -функции Якоби:

$$\psi(x, w) = -2\pi i \exp(i\pi \xi^2/\tau) \frac{\Theta_1(\xi|\tau)}{\Theta_1'(0|\tau)}, \quad (5.2.11)$$

где

$$\xi = \frac{\ln x}{2\pi i}, \quad \tau = \frac{\ln w}{2\pi i}. \quad (5.2.12)$$

Существует четыре тэта-функции Якоби, которые выражаются формулами

$$\begin{aligned} \Theta_1(v|\tau) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)v} \\ &= 2f(q^2) q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \Theta_2(v|\tau) &= \Theta_1(v + \frac{1}{2}|\tau), \\ \Theta_3(v|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2i\pi n v} \\ &= f(q^2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\ \Theta_4(v|\tau) &= \Theta_3(v + \frac{1}{2}|\tau) = ie^{i\pi(v+(1/4)\tau)} \Theta_1(v + \frac{1}{2}|\tau), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

где

$$f(q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}); \quad q = e^{i\pi\tau} \quad (5.2.14)$$

является функцией распределения.

Поэтому амплитуда равна

$$A_{\text{loop}} = \int d\mu \int d^{26} p \Delta \prod_{n \ i < j} \Pi (z_i - w^n z_j)^{k_i \cdot k_j}.$$

Используя конформную инвариантность, можно также определить факторы Δ и $d\mu$. Однако мы увидим, что удобно просто подытожить результаты подхода гармонических осцилляторов, который также приводит к правильной интегральной мере.

§ 5.3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Наиболее удобный язык для обсуждения плоских, неплюских и неориентируемых однопетлевых диаграмм — это операторный язык, который, конечно, является одним из представлений функциональных интегралов. Начнем с полосы в комплексной плоскости, заданной формулой $0 < y < 2\pi$, т. е. множества всех точек от 2π до 0. Поместим точки взаимодействия с внешними линиями вдоль оси x . Как и выше, если выбрать эту область в качестве поверхности, по которой берется континуальный интеграл, то можно всюду вставить полный набор

промежуточных состояний:

$$|X\rangle \int DX_\mu \langle X| = 1. \quad (5.3.1)$$

Тогда мы получим континуальный интеграл

$$\dots \int dX_1 \langle X_1 | V_0 | X_2 \rangle \int DX_2 \langle X_2 | \frac{1}{L_0 - 1} \dots \quad (5.3.2)$$

Как и выше, мы отмечаем, что выражение (5.3.1) возможно потому, что гамильтониан диагонален в базисе гармонических осцилляторов. Устраняя функциональное интегрирование во всех промежуточных точках вдоль полоски, получаем первую плоскую петлевую амплитуду, выраженную на операторном языке:

$$A_p = \int d^p P \text{Tr} [V_0 D V_0 D \dots V_0 D]. \quad (5.3.3)$$

Для вычисления многопетлевых амплитуд решающее значение имеет правильный выбор калибровки. Тождества (2.9.5) показывают, что для древесных амплитуд духовые состояния не взаимодействуют с деревьями, так что их в сущности можно игнорировать. Однако в силу (2.2.9) факторизованные деревья все же взаимодействуют с духовыми состояниями, так что последние будут распространяться по петле до тех пор, пока не подвергнутся тщательному устранению. Та же трудность возникает при квантовании теории Янга–Миллса (что не удивительно, поскольку и теория Янга–Миллса, и теория струн являются калибровочными).

Существует три стандартных способа устранения духов в петлевых амплитудах. Во-первых, можно ввести операторы проектирования, явным образом устраняющие духи из гильбертова пространства. Однако этот метод весьма громоздок и чрезмерно труден для фермионных петель. Во-вторых, мы можем позволить духам Фаддеева–Попова распространяться и сокращаться с духовыми состояниями. Используя метод BRST и конформную теорию поля, можно вычислить даже высшие фермионные петлевые амплитуды. И в-третьих, мы можем использовать калибровку светового конуса, что мы и сделаем в настоящей главе.

Преимущество выбора конусной калибровки – то, что она сильно упрощает вычисления. Духовые состояния в большинстве случаев можно просто игнорировать.

В дополнение к конусной калибровке, мы также выберем специальную кинематическую систему отсчета для внешних линий многочастичной амплитуды, определяемую условием

$$k^+ = 0. \quad (5.3.4)$$

(Мы должны предупредить читателя о существовании некоторых кинематических трудностей при наложении этого условия для произвольного числа внешних частиц с произвольным спином. Например, может потребоваться аналитическое продолжение внешних компонент

импульсов для сохранения такой системы отсчета. Тщательный анализ показывает, что мы всегда можем выбрать ее в случае, когда число внешних бозонных линий не превышает 26, а суперсимметричных линий не больше 10. Подход калибровки светового конуса не создаст при этом серьезных трудностей, поскольку всегда можно сделать лоренцев поворот вершинных функций к такой системе отсчета, что плюсовые компоненты импульсов будут ненулевыми. Калибровка светового конуса совместима с любыми значениями плюсовых компонент импульсов. Поэтому мы не будем далее обсуждать этот тонкий вопрос.)

К счастью, этот след легко вычислить, воспользовавшись формализмом когерентных состояний (2.6.18), (2.6.19), который мы применяли к древесной диаграмме:

$$A_N = \int \prod_{i=1}^N dx_i \int d^D p \text{Tr} [V_0(k_1, x_1) V_0(k_2, x_1, x_2) \dots \dots V_0(k_N, x_1, x_2 \dots x_N) w^{L_0 - 2}], \quad (5.3.5)$$

где

$$w = x_1 x_2 \dots x_N. \quad (5.3.6)$$

Этот след можно вычислить в явном виде методами когерентных состояний. Применим тождество

$$\text{Tr}(M) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \lambda e^{-|\lambda|^2} \langle \lambda | M \lambda \rangle. \quad (5.3.7)$$

Тщательно подсчитав значение разных факторов, получим

$$A_N = \int d^D p \prod_{i=1}^N dx_i x_i^{(1/2)p_i^2 - 2} T, \quad (5.3.8)$$

$$T = f(w)^{2-D} \prod_{i < j} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - w^{m-1} c_{ij})(1 - w^m c_{ji}^{-1})^{k_i \cdot k_j}}{(1 - w^m)^2} \right\}.$$

$$\rho_i = x_1 x_2 \dots x_i, \quad f(w) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n), \quad c_{ji} = \rho_j / \rho_i. \quad (5.3.10)$$

Мы можем также выполнить интегрирование по p :

$$\int d^D p \prod_{i=1}^D x_i^{(1/2)p_i^2} = \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{(1/2)D} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left[c_{ji}^{-1/2} \exp \frac{\ln^2 c_{ji}}{2 \ln w} \right]^{k_i \cdot k_j}. \quad (5.3.11)$$

Собирая все вместе, получаем [13, 14]

$$A_N = \pi^{-1} \int \prod_{i=1}^{N-1} \theta(v_{i+1} - v_i) dv_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q} \right)^N f(q^2)^{-24} \prod_{i < j} (\Psi_{P,i,j})^{k_i \cdot k_j}, \quad (5.3.12)$$

где

$$\Psi_{P,i,j} = \Psi(c_{ji}, w), \quad v_i = \ln \rho_i / \ln w, \quad q = e^{2\pi^2 / \ln w}, \quad (5.3.13)$$

а функция θ здесь просто упорядочивает различные факторы v_i вдоль вещественной оси.

Это есть окончательный результат для плоской однопетлевой амплитуды. Обратите внимание на некоторые свойства, которыми он обладает. Перечислим их.

- (1) Как и предсказывалось методом континуального интеграла, подынтегральное выражение является автоморфной функцией.
- (2) Мера интегрирования легко вычисляется в подходе гармонических осцилляторов. (Ее вычисление несколько сложнее в подходе континуального интеграла.)
- (3) Интеграл расходится при $q = 0$, что соответствует стягиванию внутреннего отверстия к нулевому радиусу. Расходимость мягкая и может быть устранена добавлением к струнам их суперсимметричных партнеров.

Для ссылок в дальнейшем определим одновременно плоские (P), неплоские (NP) и неориентируемые (NO) подынтегральные выражения:

$$\Psi_P(x, w) = \frac{1-x}{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\ln^2 x}{2 \ln w}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-w^n x)(1-w^n/x)}{(1-w^n)^2} \right\}, \quad (5.3.14)$$

$$\Psi_{NP}(x, w) = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\ln^2 x}{2 \ln w}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-w^n x)(1+w^n/x)}{(1-w^n)^2} \right\}, \quad (5.3.15)$$

$$\Psi_{NO}(x, w) = \frac{1-x}{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\ln^2 x}{2 \ln w}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-(-w)^n x)(1-(-w)^n/x)}{(1-(-w)^n)^2} \right\}. \quad (5.3.16)$$

Эти функции в свою очередь можно выразить в таком виде, что их связь с тэта-функциями Якоби станет более очевидной:

$$\Psi_P(x, w) = \frac{-2\pi}{\ln q} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})}{(1-q^{2n})^2} \right\}, \quad (5.3.17)$$

$$\Psi_{NO}(x, w) = \frac{-4\pi}{\ln q} \sin \frac{1}{2} \pi v \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-2(-\sqrt{q})^n \cos \pi v + q^n)}{(1-(-\sqrt{q})^n)^2} \right\}, \quad (5.3.18)$$

$$\Psi_{NP}(x, w) = -\frac{\pi}{\ln q} q^{-1/4} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})}{(1-q^{2n})^2} \right\}. \quad (5.3.19)$$

Явным образом выразив их через тэта-функции, получим

$$\begin{aligned} \Psi_P(x, w) = & -2\pi i \exp \frac{\ln^2 x}{2 \ln w} \\ & \times \Theta_1 \left(\frac{\ln x}{2\pi i} \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} \right) \Theta_1^{-1} \left(0 \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} \right), \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{NP}}(x, w) &= 2\pi \exp \frac{\ln^2 x}{2 \ln w} \\ &\times \Theta_2 \left(\frac{\ln x}{2\pi i} \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} \right) \Theta_1'^{-1} \left(0 \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} \right), \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{NO}}(x, w) &= -2\pi i \exp \frac{\ln^2 x}{2 \ln w} \\ &\times \Theta_1 \left(\frac{\ln x}{2\pi i} \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} + \frac{1}{2} \right) \Theta_1'^{-1} \left(0 \middle| \frac{\ln w}{2\pi i} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Теперь, когда мы получили результат для плоской однопетлевой диаграммы, вычислим неориентируемую однопетлевую функцию. След, который нам нужно подсчитать, это

$$A_{\text{NO}} = \int d_p^D \text{Tr}(\Omega V_0 D V_0 \dots V_0 D), \quad (5.3.23)$$

где Ω есть оператор твиста из (2.7.13). Заметим, что этот оператор можно поместить в любом месте цепочки и результат от этого не изменится. След вычисляется тем же методом когерентных состояний; основное отличие в том, что w заменяется на $-w$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} A_{\text{NO}} &= \int \prod_{i=1}^1 \Pi dx_i w^{-2} f(-w)^{-24} \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{13} \prod_{i < j} (\Psi_{\text{NO}, ij})^{k_i \cdot k_j} \\ &= \int \prod_{i=1}^2 \Pi \theta(v_{i+1} - v_i) dv_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \times (-\ln q)^{-N} f(-q^2)^{-24} \prod_{i < j} (\Psi_{\text{NO}, ij})^{k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Заметим, что область интегрирования представляет собой удвоенную обычную область от 0 до 1. Причина в том, что для полного обхода листа Мёбиуса внешние линии должны дважды обойти его край (см. рис. 5.5). Этот факт в конечном итоге будет играть решающую роль в сокращении аномалий в гл. 9.

Неплоские диаграммы также можно обчитать. Заметим, что помещение четного числа твистов в петлевую диаграмму разбивает внешние линии на два класса: обходящие петлю по внешнему краю и обходящие ее по внутреннему. Конечный результат зависит от того, какие линии прикрепляются к внешнему, а какие к внутреннему краю. Поместим операторы твиста так, что линии от первой до L -й отделены от остальных:

$$A_{\text{NP}} = \int d^D p \text{Tr}(\Omega D V_1 D \dots V_L \Omega D V_{L+1} \dots D V_N). \quad (5.3.25)$$

Интегрирование можно выполнить, и в результате получится [15]

$$A_{\text{NP}} = \int \prod_{i=1}^{N-1} \Pi dv_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q} \right)^N [f(q^2)]^{-24} \prod_{i < j} (\Psi_{\text{NP}, ij} \text{ или } \Psi_{\text{P}, ij})^{k_i \cdot k_j}, \quad (5.3.26)$$

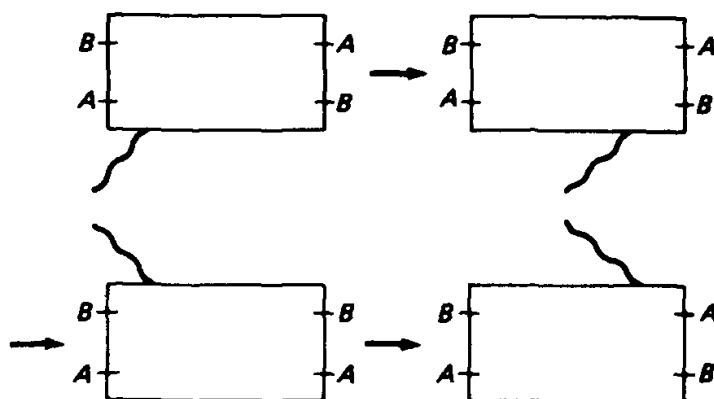


Рис. 5.5. Интегрирование вокруг листа Мёбиуса. Для листа Мёбиуса внешняя линия должна дважды пройти по его длине, чтобы описать полный путь по его границе. Поэтому для неориентируемой полосы область интегрирования вдвое больше, чем для плоской

где мы используем ψ_{NP} , если линии ij находятся на противоположных сторонах диска, и ψ_P , если они лежат на одной его стороне. Область интегрирования для линий отражает тот факт, что на диске имеется две непересекающиеся области. Внешние линии интегрируются последовательно, с тем лишь изменением, что теперь у нас две непересекающиеся области.

Для удобства представим теперь все три амплитуды одним общим выражением:

$$A_J \sim \int_{R_J} \prod_{i=1}^{N-1} dv_i \int_0^1 \frac{dq_J}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q_J} \right)^N f_J(q)^{-24} \prod_{i < j} (\psi_{J,ij})^{k_i k_j}, \quad (5.3.27)$$

где

$$\begin{aligned} J &= P, NO, NP, \\ R_P &= \{0 \leq v_1 \dots \leq v_N = 1\}, \\ R_{NO} &= \{0 \leq v_1 \dots \leq v_N = 2\}, \\ f_P(q^2) &= f_{NP}(q^2), \\ f_{NO}(q^2) &= f(-q^2), \\ q &= q_P = q_{NP} = q_{NO}^4 \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

и где неплоская область интегрирования отражает наличие двух непересекающихся областей.

Теперь, когда мы выписали явные представления для различных амплитуд открытых струн, выведем из этих амплитуд несколько весьма примечательных следствий.

(1) Замкнутые струны из открытых струн

Одна из замечательных особенностей неплоской однопетлевой диаграммы — то, что у нее больше полюсов, чем их можно найти разложением по обычным каналам открытых струн [16]. Рассмотрев множитель

$$\int_0^1 dq q^{-3-(1/4)s} \quad (5.3.29)$$

(где множитель $(1/4)s$ возникает из зависящей от импульсов части подынтегрального выражения), мы находим, что имеются дополнительные полюсы при $s/4 = -2, 0, 2, 4, 6, \dots$, совпадающие с местонахождением полюсов сектора замкнутых струн. Тем самым сектор открытых струн автоматически содержит в себе сектор замкнутых струн. Это легче всего продемонстрировать на примере дуальных диаграмм, представляя себе неплоскую диаграмму как цилиндр с двумя наборами внешних линий, которые могут вращаться, обходя вдоль верхнего или нижнего краев цилиндрической поверхности. Однако посредством факторизации мы можем разрезать цилиндрическую поверхность по горизонтали так, чтобы промежуточное состояние было замкнутой петлей. Тем самым замкнутая струна возникает как «связанное состояние» сектора открытых струн (см. рис. 5.6). Сектор замкнутых струн сам по себе является вполне унитарной теорией. Но сектор открытых струн сам по себе этим свойством не обладает. Мы видим, что

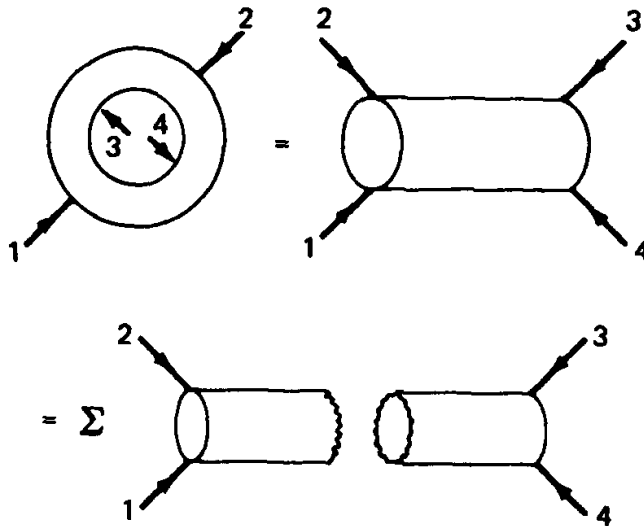


Рис. 5.6. Возникновение теории замкнутых струн из теории открытых струн. Забавное свойство теории открытых струн состоит в том, что уже на однопетлевом уровне она содержит теорию замкнутых струн в качестве «связанного состояния». Непланарная диаграмма для открытых струн может быть растянута так, что она превратится в цилиндр, который затем может быть разбит на два цилиндра меньшего размера. Поэтому промежуточное состояние должно быть замкнутой струной.

наличие открытых струн требует существования замкнутых струн в качестве промежуточных состояний; в противном случае теория не будет унитарной. В самом деле, как заметил Лавлейс [17], эта нежелательная расходимость в комплексной плоскости для неплоской диаграммы фактически является разрезом (что было бы ужасно), но именно в 26-мерии она превращается в полюс. Действительно, это было первым указанием на то, что струнная модель непротиворечива лишь в 26-мерном пространстве.

(2) Перенормировка угла наклона

Заметим, что расходимость плоской диаграммы возникает из интегралов вида

$$\int_0^1 \frac{dq}{q^3}; \quad \int_0^1 \frac{dq}{q}. \quad (5.3.30)$$

Эта расходимость при $q = 0$ соответствует отверстию в диске, стягивающемуся к нулю. Она возникает из-за того, что мы суммируем по бесконечному числу промежуточных состояний, распространяющихся во внутренности петли.

Но это не ультрафиолетовая расходимость, которую мы обычно связываем с фейнмановскими диаграммами. Для точечных частиц расходимости различных амплитуд возникают, когда мы деформируем локальную топологию конкретной диаграммы таким образом, что пропагатор стягивается в точку. *Итак, расходимости фейнмановских диаграмм связаны с деформациями локальной топологии этих диаграмм.*

В теории струн, однако, в силу конформной инвариантности мы не можем стянуть пропагатор в точку. *Поэтому конформная инвариантность на мировой поверхности исключает ультрафиолетовые расходимости.* Однако у нас по-прежнему остаются инфракрасные расходимости внутренних точек, стягивающихся к нулю.

Снова из конформной инвариантности следует, что мы всегда можем отобразить стягивающееся отверстие в дилатон или тахион, исчезающий в вакуум. Мы всегда можем «отщипнуть» это стягивающееся отверстие и извлечь резонанс замкнутой струны с вакуумными квантовыми числами, исчезающий в вакуум. Тем самым конформная инвариантность дает совершенно новую интерпретацию расходимостей струнной теории. Эта новая интерпретация связывает с каждой расходимостью состояние замкнутой струны, «отщипнутой» от этого отверстия. Указанное состояние имеет нулевой импульс и соответствует тахионам для расходимостей порядка q^{-3} или дилатонам для расходимостей порядка q^{-1} , исчезающим в вакуум (см. рис. 5.7).

После отщипывания стягивающегося отверстия и извлечения состояния замкнутой струны с обращающимся в нуль импульсом мы видим, что оставшаяся диаграмма выглядит совсем как дерево без отверстия. Итак, после извлечения вклада расходящегося полюса у нас останется конечное дерево. Это в свою очередь позволяет рассматривать расхо-

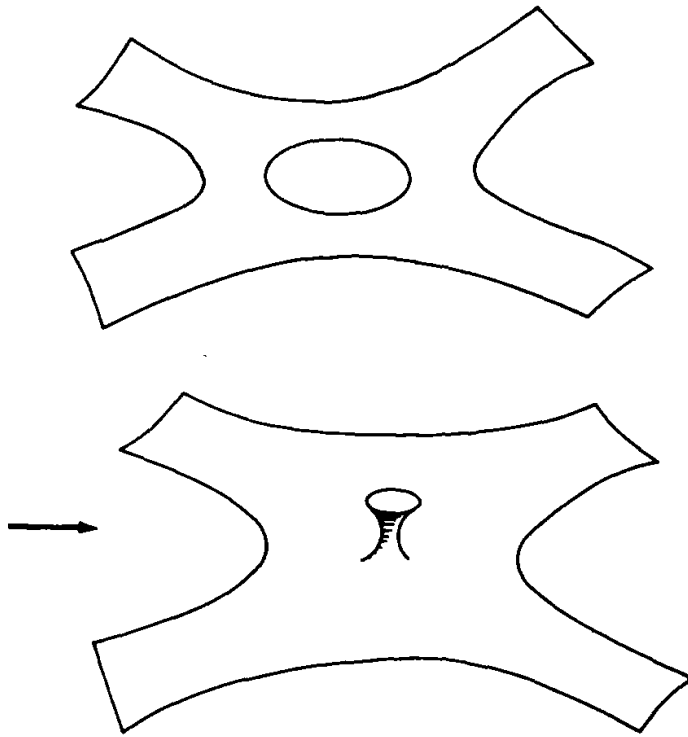


Рис. 5.7. Испускание дилатона. В силу конформной инвариантности мы можем деформировать однопетлевую диаграмму для открытой струны и «прищепить» внутреннюю петлю. Полученная диаграмма соответствует испусканию тахиона или дилатона в вакуум, что приводит к инфракрасной расходимости. Теория суперструн строится так, чтобы эти полюсы не могли существовать, так что формально эта теория является конечной.

димости как переопределение свободного параметра, наклона траектории Редже a' . Этот процесс, называемый «перенормировкой наклона», хорошо работает для дилатонного полюса q^{-1} , но непонятно, как справиться с вкладом тахионного полюса q^{-3} . Поэтому бозонная теория может оказаться не вполне свободной от расходимостей.

(3) Конечные суперструны

Опыт вычисления суперсимметричных петлевых диаграмм для теорий точечных частиц показал, что внутренняя бозонная линия сокращается с внутренней фермионной линией и в результате получаются амплитуды, значительно менее расходящиеся, чем ожидалось. То же самое происходит и с суперструнами. Обратимся теперь к суперструнным диаграммам, для которых эту «перенормировку наклона» можно выполнить явным образом [18, 19]. Мы обнаружим, что расходимость q^{-3} в теории открытых струн типа I сокращается сама с собой (это также ожидалось, поскольку в этой теории тахионов нет). Это оставляет только полюс q^{-1} , так что перенормировка угла наклона возможна. Действительно замечательный факт, однако, это то, что теория типа II конечна сама по себе, без всякой перенормировки угла наклона!

§ 5.4. ОДНОПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ СУПЕРСТРУН

Вычисление однопетлевых диаграмм для открытых суперструн можно проводить как в формализме GS, так и в формализме NS-R. В формализме GS приходится пользоваться координатами светового конуса, поскольку удовлетворительного ковариантного формализма не существует. Но у NS-R-формализма есть, однако, то преимущество, что соответствующие диаграммы обладают явной пространственно-временной суперсимметрией. В формализме NS-R мы должны либо применять оператор проектирования для удаления духов, либо метод BRST, позволяющий духам распространяться и сокращаться с духами с отрицательной метрикой. К сожалению, суперсимметрия будет неявной, пока мы не добавим по отдельности вклады бозонных и фермионных петель и не вставим оператор GSO-проекции в каждую петлю.

Используем формализм GS, развитый в разд. 3.9, в котором суперсимметрия является явной. Как и прежде, вертексная функция безмассового векторного бозона есть

$$V_B(\zeta, k, \tau) = \zeta^i B^i(\tau) : e^{ik \cdot X} :, \quad (5.4.1)$$

где

$$B^i(\tau) = P^i(\tau) + k^j R^{ij}(\tau),$$

$$R^{ij}(\tau) = \frac{1}{8} \bar{S}(\tau) \gamma^{ij} S(\tau), \quad (5.4.2)$$

$$S^a(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in\tau}.$$

Здесь мы также положили $\zeta^+ = 0$ для вектора поляризации безмассового бозона.

Фермионная вершинная функция есть

$$V_F(u, k, \tau) = \bar{F}(\tau) u : e^{ik \cdot X} :, \quad (5.4.3)$$

где

$$\bar{F}^a(\tau) = i(p^+)^{-1/2} \left(S(\tau) \gamma \cdot P(\tau) - \frac{1}{3} : R^{ij}(\tau) k^i \bar{S}(\tau) \gamma^j : \right)^a. \quad (5.4.4)$$

Будем рассматривать только след по внешним бозонам. Это приведет к значительным упрощениям. Например, след по операторам S_0 требует по меньшей мере восьми из этих операторов. Поэтому амплитуды с двумя или тремя внешними линиями обратятся в нуль автоматически. В результате в теории полностью отсутствуют энергия самодействия и вершинные поправки.

Первая ненулевая амплитуда появляется для диаграмм с четырьмя внешними линиями. Даже в этом случае амплитуда на самом деле нулевая, кроме вклада от члена

$$\zeta^i k^j R_0^{ij} : e^{ik \cdot X} :. \quad (5.4.5)$$

Действительно, единственный расходящийся вклад в след равен

$$\text{Tr}(w \sum \gamma^{(1/2)n} S_n \gamma^{-n} S_n) = f(w)^8. \quad (5.4.6)$$

Как и ожидалось, он погашается другим вкладом, происходящим из бозонной петли. Таким образом, окончательная однопетлевая амплитуда открытой суперструны есть

$$A_{\text{loop}} = K \int_0^1 \prod_{I=1}^3 \theta(v_{I+1} - v_I) dv_I \int_0^1 \frac{dq}{q} \prod_{I < J} (\psi_{IJ})^{k_I \cdot k_J}, \quad (5.4.7)$$

где K – тот же самый кинематический фактор (3.9.11), который был найден для древесных диаграмм с внешними линиями безмассовых бозонов. Как и ожидалось, порядок расходимости этой диаграммы есть всего лишь q^{-1} , поскольку теория не содержит тахионов, которые могли бы дать расходимости порядка q^{-3} .

Извлечем теперь бесконечную часть этой диаграммы. Тщательно выделив конечную часть в окрестности точки $q = 0$, находим, что ψ -функция сводится к обычной синусоиде, так что конечная часть A принимает вид

$$\bar{A}_{\text{loop}} = K \int_0^1 \prod_{I=1}^3 \theta(v_{I+1} - v_I) \prod_{I < J} [\sin \pi(v_J - v_I)]^{k_I \cdot k_J}. \quad (5.4.8)$$

Чтобы показать, что на этой диаграмме можно выполнить перенормировку угла наклона, действительно осуществим интегрирование по v_2 и v_3 . Определим

$$x = \frac{\sin \pi(v_2 - v_1) \sin \pi v_3}{\sin \pi(v_3 - v_1) \sin \pi v_2} \quad (5.4.9)$$

и после интегрирования получим

$$\bar{A}_{\text{loop}} \sim K \int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \right) x^{-\alpha' s} (1-x)^{\alpha' t} dx. \quad (5.4.10)$$

Легко проверяется, что это в свою очередь в точности совпадает с производной от борновского члена по углу наклона. Поэтому

$$\bar{A}_{\text{loop}} \sim \frac{1}{(\alpha')^2} \frac{\partial}{\partial \alpha'} A_{\text{tree}}. \quad (5.4.11)$$

Заметим, что эту расходимость можно устранить перенормировкой угла наклона. Это именно тот результат, который мы стремились получить: *переопределение угла наклона реджевской траектории может сделать теорию суперструн типа I перенормируемой для однопетлевых диаграмм.*

Рассмотрим теперь амплитуду замкнутой струны; в этом случае нас ждут еще более удивительные вещи.

§ 5.5. ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ДИАГРАММЫ ЗАМКНУТЫХ СТРУН

Вычисление однопетлевых амплитуд замкнутых бозонных струн также проводится непосредственно. Подчеркнем лишь различия.

(1) Мировая поверхность струны, которая для случая открытой струны была топологически эквивалентна верхней полуплоскости, теперь превращается в полную комплексную плоскость.

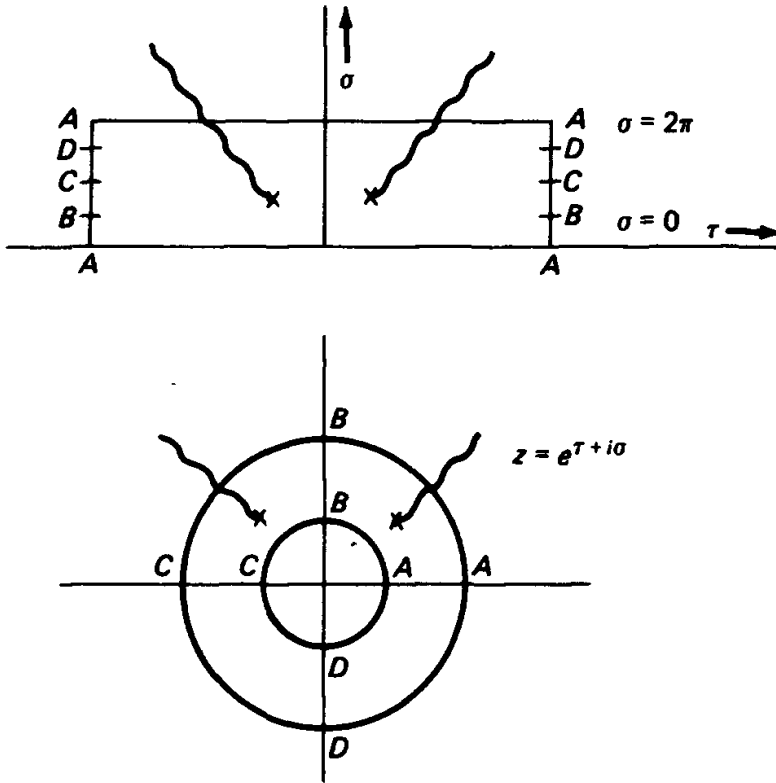


Рис. 5.8. Конформная поверхность для однопетлевой диаграммы замкнутой струны. В плоскости ρ поверхность является прямоугольником с шириной 2π и с произвольной длиной, противоположные стороны которого отождествлены. В плоскости z эта поверхность соответствует тору. Внешние линии могут прикрепляться к любой точке внутри поверхности.

- (2) Пропагатор должен содержать интегрирование по σ , чтобы он был независим от положения начала координат в σ -пространстве.
- (3) Мы должны просуммировать по различным упорядочениям вершинных функций.
- (4) Внешние линии, которые были прежде прикрепленными к границе полосы, теперь прикрепляются к внутренним точкам комплексной поверхности.

На рис. 5.8 показана горизонтальная полоса, простирающаяся от $\sigma = 0$ до $\sigma = 2\pi$, верхний и нижний края которой отождествлены. Чтобы получить однопетлевую диаграмму, мы должны теперь отождествить левый и правый края полосы. Экспоненциальное отображение тогда переводит конечную горизонтальную полосу во всю комплексную плоскость.

При помощи обычных методов когерентных состояний находим [20] (взяв угол наклона $\alpha' = 1/4$)

$$\begin{aligned}
 A &= \int d^D p \operatorname{Tr} (V_1 D V_2 \cdots V_N D) \\
 &= \int \prod_{i=1}^N d^2 z_i |w|^{-4} |f(w)|^{-48} \left(\frac{-4\pi}{\ln |w|} \right)^{13} \prod_{i < j} \chi_{ij}^{(1/2)k_i \cdot k_j},
 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

где

$$\begin{aligned} v_j &= (2\pi i)^{-1} \ln z_1 z_2 \dots z_j, \\ v_{ji} &= v_j - v_i, \\ \tau &= v_M = (2\pi i)^{-1} \ln w, \\ w &= z_1 z_2 \dots z_N, \\ C_{ji} &= z_{i+1} z_{i+2} \dots z_j \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

и

$$\begin{aligned} (z, w) &= \exp \frac{(\ln^2 |z|)}{2 \ln |w|} \left| z^{-1/2} (1-z) \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-w^m z)(1-w^m/z)}{(1-w^m)^2} \right\} \right|, \\ \chi_{ij} &= \chi(c_{ji}, w) \\ &= 2\pi \exp \left(\frac{-\pi (\operatorname{Im} v_{ji})^2}{\operatorname{Im} \tau} \right) \left| \frac{\Theta_1(v_{ji} | \tau)}{\Theta_1'(0 | \tau)} \right|. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Перепишем это в виде

$$A = \int d^2 \tau (\operatorname{Im} \tau)^{-2} C(\tau) F(\tau), \tag{5.5.4}$$

где

$$\begin{aligned} C(\tau) &= 4 \left(\frac{1}{2} \operatorname{Im} \tau \right)^{-12} e^{4\pi \operatorname{Im} \tau} |f(e^{2\pi i \tau})|^{-48}, \\ F(\tau) &= \pi^N \operatorname{Im} \tau \int \prod_{i=1}^{N-1} d^2 v_i \prod_{i < j} (\chi_{ij})^{(1/2)k_i \cdot k_j}. \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение – дважды периодическая функция:

$$\chi(v+1, \tau) = \chi(v+\tau, \tau) = \chi(v, \tau). \tag{5.5.5}$$

Это легко увидеть, потому что функция Θ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Theta_1(v+1 | \tau) &= \Theta_1(v, \tau), \\ \Theta_1(v+\tau | \tau) &= -e^{-i\pi(2+v)} \Theta_1(v | \tau). \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Это важно, так как показывает, что прямое интегрирование по переменным v привело бы к многократному повторному засчету подлинной области интегрирования. Рассмотрим параллелограмм, образованный началом координат и точками $0, 1, \tau$ и $1+\tau$. После отождествления противоположных сторон он становится топологически эквивалентным тору. Заметим, что двойная периодичность разбивает комплексную плоскость на бесконечное число таких параллелограммов. Поэтому мы хотим интегрировать только по одному параллелограмму, иначе одна и та же область будет засчитана бесконечно много раз. Стало быть, для фиксированного τ необходимо ограничить интегрирование по переменным v , чтобы не интегрировать по бесконечному множеству копий

одного и того же объекта. Выберем следующее ограничение:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Im} v_i \leq \operatorname{Im} \tau, \\ -\frac{1}{2} &\leq \operatorname{Re} v_i \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Как ни странно, кроме этого ограничения в пространстве v , нужно ввести еще одно ограничение в пространстве τ . Подынтегральное выражение для однопетлевой диаграммы замкнутой струны в действительности инвариантно относительно еще одного преобразования, даваемого формулой

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (5.5.8)$$

где a, b, c, d целые и $ad - bc = 1$. Это преобразование порождает так называемую *модулярную группу* $SL(2, Z)$. Покажем, что наш интеграл инвариантен относительно этого преобразования:

$$\begin{aligned} d^2 \tau &\rightarrow |c\tau + d|^{-4} d^2 \tau, \\ \operatorname{Im} \tau &\rightarrow |c\tau + d|^{-2} \operatorname{Im} \tau. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Следовательно, относительно этого модулярного преобразования инвариантны величины

$$\frac{d^2 \tau}{\operatorname{Im}^2 \tau} = \frac{d^2 \tilde{\tau}}{\operatorname{Im}^2 \tilde{\tau}}. \quad (5.5.10)$$

Теперь вычислим, как преобразуются модулярным отображением другие члены:

$$e^{-(\pi/4)\operatorname{Im} \tau} |f(e^{2\pi i \tau})|^3 \rightarrow |c\tau + d|^{3/2} e^{-(\pi/4)\operatorname{Im} \tau} |f(e^{2\pi i \tau})|^3. \quad (5.5.11)$$

Итак,

$$C(\tau) = C(\tilde{\tau}). \quad ; \quad (5.5.12)$$

Наконец, имеем также

$$\chi\left(\frac{v}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = |c\tau + d|^{-1} \chi(v, \tau). \quad (5.5.13)$$

Итак,

$$F(\tau) = F(\tilde{\tau}). \quad (5.5.14)$$

Поэтому подынтегральное выражение инвариантно относительно модулярного преобразования, что впервые было указано Шапиро [20]. Но каков наглядный смысл этой симметрии?

Из действия Полякова следует, что мы должны интегрировать по всем конформно неэквивалентным поверхностям. Сначала мы видим, что два параллелограмма с различными значениями τ конформно неэквивалентны после отождествления противоположных сторон. По-

этому мы простодушно ожидаем, что интегрирование по τ автоматически даст нам интеграл по всем конформно неэквивалентным поверхностям. Однако в действительности это не так.

На самом деле существуют два типа репараметризации поверхности, которые необходимо тщательно различать. К первому типу относятся такие репараметризации, которые можно гладким образом вернуть к тождественному отображению, т. е. множество гладких репараметризаций, содержащее тождественное преобразование. Ко второму типу относятся репараметризации, которые невозможно гладко перевести обратно к тождественному преобразованию. Глобальные диффеоморфизмы именно таковы. Возьмем, к примеру, один параллелограмм и отождествим лишь одну пару противоположных его краев. У нас получится трубка. Обычно мы свели бы друг с другом ее концы, чтобы получить тор. Теперь, однако, закрутим один из ее концов на 2π , прежде чем склеить их. Изучив эту поверхность, видим, что эта процедура порождает настоящую репараметризацию поверхности, но этим способом нельзя представить тождественное преобразование. Такое кручение («твист») называется твистом Дена, и он порождает некую дискретную группу. Можно показать, что для тора группа, порожденная твистами Дена, есть модулярная группа $Sp(2, \mathbb{Z})$.

Конкретизируя, мы видели, что интеграл инвариантен относительно преобразований $\tau \rightarrow -1/\tau$ и $\tau \rightarrow \tau + 1$. Можно показать, что последовательное применение этих двух преобразований порождает всю модулярную группу. Но тщательное рассмотрение действия этих преобразований показывает, что они просто меняют местами части границы параллелограмма, порождая твисты Дена.

Итак, эта вторая симметрия, называемая модулярной инвариантностью, возникает в силу того факта, что мы должны фиксировать калибровкой не только репараметризации, гладко сводимые к тождественному преобразованию, но и глобальные диффеоморфизмы, не связанные с последним. Поэтому мы должны разбить комплексную τ -плоскость таким образом, чтобы можно было интегрировать только по одной поверхности, инвариантной относительно преобразований $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -1/\tau$. Тем самым комплексная τ -плоскость разбивается на бесконечное число лишних копий. Чтобы устранить этот бесконечный повторный счет, выберем следующую фундаментальную область интегрирования (см. рис. 5.9):

$$\text{Фундаментальная область} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \tau \leq \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Im} \tau \geq 0, \\ |\tau| \geq 1. \end{cases} \quad (5.5.15)$$

Мы вскоре убедимся, что эта модулярная инвариантность является, вероятно, одним из самых мощных инструментов, которыми мы располагаем, для проверки непротиворечивости новых струнных компактификаций.

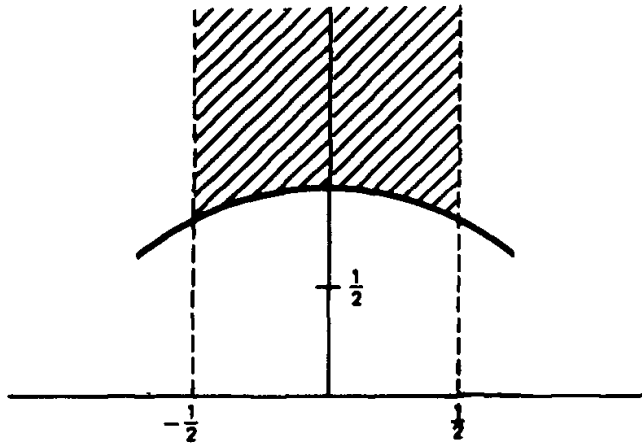


Рис. 5.9. Фундаментальная область для однопетлевой амплитуды замкнутых струн. Модулярная инвариантность амплитуды разбивает комплексную плоскость на бесконечное число эквивалентных областей. Поэтому мы должны выбрать только одну такую область, в противном случае амплитуда будет бесконечной. Наиболее удобная область лежит между прямыми $\text{Re } \tau = -1/2$ и $\text{Re } \tau = +1/2$, причем $|\tau| > 1$.

Как мы уже сказали, модулярное преобразование осуществляет твист Дена, т. е. перетасовку граничных условий для параллелограмма. Например, если у нас имеется струна, определенная на параллелограмме, маркированном $X(\sigma_1, \sigma_2)$, то модулярное преобразование заменит граничные условия согласно формуле

$$X(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow X(a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2). \quad (5.5.16)$$

В частности, можно проверить, что преобразования $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -1/\tau$ заменяют граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} \tau \rightarrow \tau + 1 \\ \tau \rightarrow -1/\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow X(\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2), \\ X(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow X(\sigma_2 - \sigma_1). \end{cases}; \quad (5.5.17)$$

Теперь проанализируем структуру расходимостей амплитуды замкнутой струны. Сначала заметим, что

$$X(v, \tau) \rightarrow 2\pi|v| \quad (5.5.18)$$

при $v \rightarrow 0$. Как и ожидалось, амплитуда имеет полюсы в тех точках, в которых внешние линии совпадают. Они встречаются при $s = -8, 0, 8, 16$ и т. д. Эту расходимость можно считать происходящей из диаграммы энергии самодействия на внешней линии, которая, к сожалению, оказалась лежащей на массовой поверхности.

Теперь обобщим это вычисление на суперструны типа II; его легко провести тем же методом. Все вершины имеют вид

$$W = V\bar{V}, \quad (5.5.19)$$

где все V соответствуют вершинам открытой струны (с половинным

импульсом) для двух наборов осцилляторов. Снова вклады двух- и трехточечных петель обращаются в нуль, так как след берется по модам S_0 . Этот след можно вычислить точно так же, как и в случае открытых струн, но теперь осцилляторов вдвое больше. Результат для амплитуды рассеяния бозонов дается формулой

$$A_{\text{loop}} = K \int_F d^2 \tau (\text{Im } \tau)^{-2} F_S(\tau), \quad (5.5.20)$$

где

$$F_S(\tau) = (\text{Im } \tau)^3 \int_{I=1}^3 d^2 v_1 \prod_{I < J} (\chi_{IJ})^{(1/2)k_I \cdot k_J}. \quad (5.5.21)$$

Заметим, что фактор $C(\tau)$ теперь отсутствует и степень, с которой входит τ , изменилась. Замечательный факт состоит в том, что *эта амплитуда вполне конечна!* Это объясняется несколькими причинами, перечисленными ниже.

- (1) Отсутствие двух- и трехточечных амплитуд делает невозможным помещение головастиков или вставок энергии самодействия на внешних линиях. Поэтому не будет полюсов, которые были обнаружены ранее для замкнутых бозонных струн.
- (2) Можно уменьшить расходимость диаграммы, выбирая фундаментальную область интегрирования, свободную от расходимостей.
- (3) Нет вкладов от тахионов, исчезающих в вакуум, поскольку нет тахионов.
- (4) Фермионные внутренние линии сокращаются с бозонными внутренними линиями, что уменьшает расходимость диаграммы.

§ 5.6. МНОГОПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ

Многопетлевую функцию также можно выписать в явном виде через континуальные интегралы по римановым поверхностям с отверстиями. Главная трудность при построении этих амплитуд — это выбор параметризации римановой поверхности. Для многопетлевых амплитуд было разработано четыре типа параметризаций.

- (1) *Группы Шоттки.* Многопетлевые амплитуды, первоначально вычисленные в этом формализме [2–8], обсуждаются в настоящем разделе. Такая параметризация римановой поверхности обладает несколькими преимуществами. Во-первых, она является явной. Не приходится гадать о выборе переменных интегрирования, они известны точно. Фактически эти переменные наглядно связаны с топологической структурой римановой поверхности. Во-вторых, амплитуды факторизуются (поскольку это представление исходно вычислялось сшиванием многорезонансных вершинных функций). Поэтому можно показать унитарность. Недостаток этого формализма тот же, что и у других, а именно неочевидность модулярной инвариантности. Область интегрирования приходится обрезать вручную.

- (2) *Метрики с постоянной кривизной.* Этот формализм, который будет рассмотрен в следующем разделе, основан на римановых поверхностях с постоянной гауссовой кривизной. Его преимущество в том, что он естественным образом возникает при квантовании действия Полякова. Другое его преимущество – наличие в математической литературе множества работ по римановым поверхностям постоянной кривизны. Его недостаток, как и представления Шоттки, в том, что модулярная инвариантность амплитуд для высших петель по-прежнему неочевидна. Область интегрирования приходится обрезать вручную. В отличие от представления Шоттки, однако, явные представления $6N-6$ модулярных параметров для произвольных поверхностей с постоянной метрикой встречаются редко. Кроме того, поскольку этот формализм не выведен сшиванием трехрезонансных вершинных функций, то факторизация, а следовательно, и унитарность неочевидны.
- (3) *Тэта-функции.* Это, по-видимому, наиболее естественный формализм, поскольку модулярная инвариантность встроена в него с самого начала. Мы рассмотрим его в разд. 5.11. Этот метод основан на обобщении тэта-функций, введенных в (5.2.11) для однопетлевой амплитуды, включающем квазипериодические функции нескольких переменных. Естественной переменной интегрирования служит сама матрица периодов Ω_{ij} , которую можно определить для всякой римановой поверхности. Этот формализм также легко обобщить, включив в него тэта-функции, определенные на различных спиновых структурах. Хотя этот формализм весьма перспективен и активно изучается, у него есть и серьезные недостатки. Например, если петель больше чем три, то пространство модулей становится очень неудобно параметризовать матрицей периодов. (Трудность параметризации пространства модулей матрицей периодов в случае большего, чем три, количества петель известна как «проблема Шоттки». Лишь недавно математикам удалось решить эту проблему. К сожалению, ее решение сильно нелинейно, и еще многое предстоит сделать, чтобы развить этот формализм для случая, когда петель больше трех.) Как и в предыдущем формализме, факторизация (а следовательно, и унитарность) неочевидна. Тэта-функции для высших петель строятся посредством умелого угадывания и обращения к единственности окончательного результата, а не сшиванием вершинных функций.
- (4) *Формализм светового конуса.* Поскольку метод конусных координат основан на использовании только физических переменных, без всяких духов, то этот формализм обладает явной унитарностью, и поэтому естественно ожидать, что он автоматически обеспечивает одно покрытие пространства модулей. Это предположение, которое никогда прежде не приходило в голову математикам, изучавшим пространства модулей, недавно было доказано во всех порядках. Мы лишь вкратце обсудим формализм светового конуса в конце этой главы, поскольку он будет подробнее развит в следующей главе при изложении полевой теории струн. Преимущество конусного форма-

лизма – его явная унитарность, факторизуемость, модулярная инвариантность и простота обобщения на настоящую вторично квантованную теорию поля. Недостаток – то, что он с очевидностью обладает фиксированной калибровкой.

Конечно, все эти четыре формализма должны в итоге привести к эквивалентным результатам.

Сначала обсудим группы Шоттки и перепишем однопетлевую амплитуду в форме, которую проще всего обобщить на многопетлевые диаграммы. (Мы рассмотрим метод Θ -функции в разд. 5.11.) Определим проективное преобразование (2.7.1), порождающее группу $SL(2R)$, способ, подчеркивающим его геометрические свойства. Определим неподвижные точки x_1 и x_2 проективного отображения как точки, которые это преобразование переводят в самих себя:

$$\text{Неподвижные точки: } \begin{cases} P(x_1) = x_1, \\ P(x_2) = x_2. \end{cases} \quad (5.6.1)$$

Тогда мы сможем выразить произвольное проективное отображение, имеющее три независимых параметра, через эти две неподвижные точки и множитель X :

$$P(z) = \frac{z(x_2 - Xx_1) - x_1x_2(1 - X)}{z(1 - X) + x_2X - x_1}. \quad (5.6.2)$$

Другая удобная форма записи проективных отображений – это

$$\frac{P(z) - x_2}{P(z) - x_1} = X \frac{z - x_2}{z - x_1}. \quad (5.6.3)$$

Преимущество записи проективного отображения с помощью множителя состоит в том, что множители для произведений проективных преобразований находятся просто:

$$\begin{aligned} (X_P)^n &= X_{(P)^n}, \\ X_{PQ} &= X_{QP}, \\ (X_P)^{-1} &= X_{(P)^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Посредством проективного преобразования любое P может быть приведено к виду

$$P \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{X} & 0 \\ 0 & \sqrt{X}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.6.5)$$

Заметим, что след отображения P можно записать как

$$\text{Tr } P(z) = \sqrt{X} + \frac{1}{\sqrt{X}}. \quad (5.6.6)$$

Это в свою очередь позволяет определить «смежные классы». Два проективных преобразования принадлежат одному и тому же смежному классу, если у них один и тот же множитель.

В зависимости от множителя можно определить несколько типов проективных преобразований:

- (1) P гиперболическое, если X веществен, положителен и не равен единице.
- (2) P параболическое, если X веществен и равен единице.
- (3) P эллиптическое, $|X|$ равен единице и X не равен единице.
- (4) P локсодромическое, если X комплексен и не относится ни к одному из перечисленных выше случаев.

Для вещественных проективных преобразований множитель может быть и меньше, и больше единицы в зависимости от того, выполняется ли условие $x_1 < x_2$ или же верно противоположное. Поэтому мы вольны выбрать все наши проективные преобразования гиперболическими, чтобы множитель был меньше единицы. Для одной петли мы получим, что проективное отображение равно

$$P(z) = wz,$$

$$P(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix}. \quad (5.6.7)$$

Таким образом, множитель однопетлевого преобразования — это просто само w .

Заметим, что с $3N$ проективными преобразованиями связано N параметров. Однако, как мы отметили ранее, 3 точки, лежащие на вещественной оси, всегда могут быть фиксированы вследствие проективной инвариантности. Поэтому у N -петлевой амплитуды будет $3N - 3$ параметра, описывающих соответствующую риманову поверхность. Они называются параметрами Тейхмюллера и составляют наименьшее число параметров, необходимых для задания неэквивалентных римановых поверхностей с краем. Для замкнутой струны у нас будут сферы и комплексные проективные операторы, так что число параметров будет равно $6N - 6$. Итак:

$$\text{Параметры Тейхмюллера} \begin{cases} \text{открытые струны } 6N - 6, \\ \text{замкнутые струны } 3N - 3. \end{cases} \quad (5.6.8)$$

(Для наглядности можно представить, что необходимы два параметра, чтобы задать положение центра отверстия, и еще один, чтобы задать его радиус. Всего потребуется $3N$ параметров для описания поверхности с N отверстиями. Из этого числа нужно вычесть 3, чтобы устранить конформно эквивалентные способы помещения внешних линий на вещественной оси. В итоге получим $3N - 3$ параметров.)

Теперь перепишем подынтегральное выражение для однопетлевой функции, выразив ее через явно инвариантные функции. Из (5.6.4) видно, что функцию распределения можно записать в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (X_P)^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X_{P^n}). \quad (5.6.9)$$

Таким образом, функция распределения теперь записана через набор проективных преобразований P^n .

Затем мы можем выразить через проективные преобразования подынтегральное выражение для импульсов. Ранее мы показали, что комбинация

$$d\mu \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{k_i \cdot k_j} \Delta \quad (5.6.10)$$

легко преобразуется под действием проективного отображения из-за сохранения импульса и того факта, что внешние линии лежат на массовой поверхности. Теперь нам надо показать, что однопетлевое подынтегральное выражение может быть записано как инвариантное:

$$d\mu \prod_{n=1, i < j} (z_i - w^n z_j)^{k_i \cdot k_j} \Delta = d\mu \prod_{n=1, i < j} (z'_i - P^n z'_j)^{k_i \cdot k_j} \Delta'. \quad (5.6.11)$$

Поэтому интеграл для однопетлевой диаграммы можно записать как

$$\int d\mu \prod_{n=1, i < j} (z_i - P^n z_j)^{k_i \cdot k_j} (1 - X_{P^n})^{-24} \Delta. \quad (5.6.12)$$

Совершенно обязательно нужно определить, по какой области комплексной плоскости производится интегрирование. На рис. 5.10 показано, как верхняя полуплоскость разбивается на эквивалентные секторы под действием оператора P . Заметим, что проективное преобразование отображает окружности в окружности. Поэтому точка, расположенная вблизи от одной неподвижной точки, в результате повторных действий на нее оператора P постепенно перемещается к другой неподвижной точке. В ходе этого процесса верхняя полуплоскость разбивается на

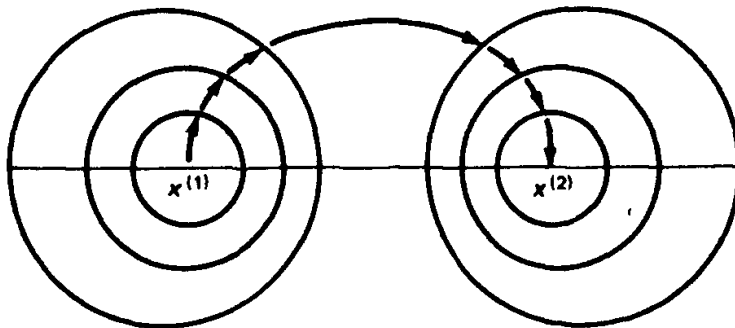


Рис. 5.10. Действие проективного преобразования. В результате последовательного применения одного и того же проективного преобразования окружности, окружающие одну неподвижную точку, отображаются в окружности, окружающие другую неподвижную точку. После бесконечного числа проективных преобразований произвольная точка любой из этих окружностей оказывается сколь угодно близкой к неподвижной точке.

непересекающиеся области. Мы можем выбрать в качестве области интегрирования любую из этих непересекающихся областей. На этом рисунке мы выбрали область, лежащую на полпути между двумя этими неподвижными точками. Стрелки показывают, как некая точка перемещается под действием P , т. е. мы видим идентификацию точек на поверхности. Если добавить внешние линии, они будут лежать только на оси x и смогут двигаться лишь к краю области, ограниченной этими окружностями.

Такая процедура легко обобщается на многопетлевые амплитуды. Мы потребуем выполнения следующих условий:

- (1) Проективной инвариантности относительно преобразований группы $SL(2, R)$. Для N -петлевой амплитуды должно быть N проективных операторов.
- (2) Модулярной инвариантности для замкнутой струны, чтобы интегрирование проводилось по одной фундаментальной области в пространстве параметров.

Одних этих соображений инвариантности почти достаточно, чтобы однозначно записать многопетлевую амплитуду.

Сначала найдем многопетлевую расходимость. Пусть набор

$$P_1, P_2, \dots, P_N \tag{5.6.13}$$

представляет N вещественных проективных отображений, таких что их неподвижные точки последовательно расположены на вещественной оси. Пусть $\{P\}$ обозначает множество всех несовпадающих между собой произведений различных преобразований P , возведенных в произвольные положительные или отрицательные степени. (На рис. 5.11 видно, что неподвижные точки все лежат на вещественной оси.) Множество $\{P\}$ образует группу. Наша область интегрирования представляет собой отрезок вещественной оси, находящийся между предельными точками элементов группы $\{P\}$. Если предельные точки всех элементов группы $\{P\}$ заполняют всю комплексную плоскость, то этот случай нам неин-

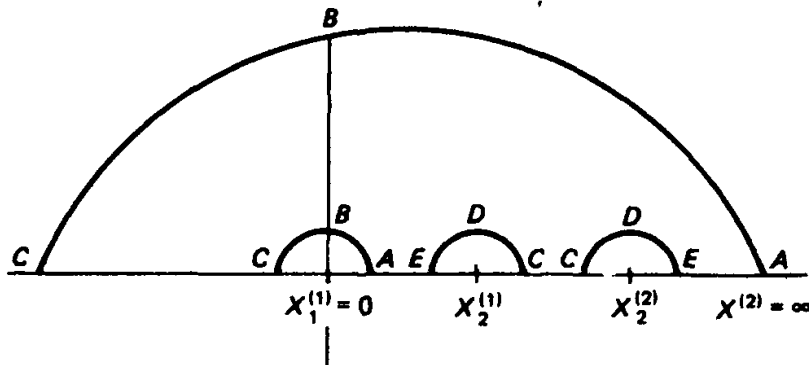


Рис. 5.11. Представление Шоттки двухпетлевой диаграммы открытой струны. Имеются два набора неподвижных точек, лежащих на вещественной оси, соответствующих каждому из двух проективных преобразований. Окружности, окружающие неподвижные точки, должны быть отождествлены между собой.

тересен. Тогда области интегрирования для наших переменных не существует.

Нас интересуют такие группы $\{P\}$, предельные точки которых образуют дискретное множество на вещественной оси, так что имеется конечная область интегрирования. Группы, обладающие таким свойством, называются *группами Шоттки*.

Пусть $\{\bar{P}\}$ представляет все различные произведения этих преобразований с точностью до циклических перестановок. Тогда расходящийся член для N -петлевой амплитуды есть произведение по множеству $\{\bar{P}\}$ [4, 5]:

$$\prod_{\{\bar{P}\}} (1 - X_{\{\bar{P}\}})^{-24}. \quad (5.6.14)$$

Зависящий от импульсов член дается произведением по множеству $\{P\}$:

$$\prod_{i < j, \{P\}} (z_i - \{P\} z_j)^{k_i k_j}. \quad (5.6.15)$$

Поэтому подынтегральное выражение для N -петлевой амплитуды выписывается удивительно просто. Единственная трудность состоит в том чтобы определить область интегрирования способом, сохраняющим проективную инвариантность. Окончательная формула для N -петлевой амплитуды с M внешними тахионными линиями есть [2–8]

$$\begin{aligned} A_N = & \int \prod_{\alpha=1}^N d^2 k_\alpha d\mu \prod_{\{P\}} \prod_{\{\bar{P}\}} (1 - X_{\{\bar{P}\}})^{-24} \\ & \times \prod_{1=i < j=M} (z_i - \{P\} z_j)^{k_i k_j} \prod_{\substack{\beta, \lambda=1 \\ \beta \neq \lambda}}^N dX_\beta X_\beta^{-a(k_\beta)-1} \\ & \times \prod_{i=1}^M \left(\frac{z_i - \{P\} x_\lambda^{(2)}}{z - \{P\} x_\lambda^{(1)}} \right)^{k_i k_\lambda} \\ & \times \left\{ \frac{x_\beta^{(1)} - \{P\} x_\lambda^{(1)} x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(1)} x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}} \right\}^{(1/2)k_\beta \cdot k_\lambda}, \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

где

$$d\mu = \prod_{i=1}^M dz_i dV_{abc}^{-1} \prod_{\alpha=1}^N dx_\alpha^{(1)} dx_\alpha^{(2)} (x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)})^{-2}. \quad (5.6.17)$$

Здесь латинские индексы i и j представляют внешние тахионные линии, а греческие индексы — только петлевые переменные. Каждое проективное преобразование P имеет две неподвижные точки и множитель:

$$x_\alpha^{(1)}; \quad x_\alpha^{(2)}; \quad X_\alpha. \quad (5.6.18)$$

Произведение по группе $\{P\}$ берется по всем неэквивалентным произведениям проективных операторов P_α . (Мы исключили те произведения,

которые содержат повторный счет, т. е. если некоторый элемент группы $\{P\}$ является произведением преобразований, приводящим к преобразованию P_α , то он не должен действовать на неподвижную точку преобразования P_α , иначе получится повторный счет.)

Важной стороной такой формы записи подынтегрального выражения является область интегрирования, которая должна учитывать *каждую конформно неэквивалентную конфигурацию один и только один раз.*

На вещественной оси мы всегда можем сделать такое проективное преобразование, которое соберет все внешние линии по одну сторону, а все неподвижные точки — по другую сторону от некой точки. (Если точка z лежит слева от неподвижных точек проективного преобразования P_α , то $P_\alpha(z)$ перемещает z через свои неподвижные точки направо. Таким образом, последовательными проективными преобразованиями мы можем сдвинуть все внешние линии на одну сторону вещественной оси, а все неподвижные точки — на другую ее сторону.) Нужно, однако, проявить осторожность, чтобы исключить такое проективное отображение, которое могло бы сдвинуть некую точку в обход всей диаграммы.

Преобразование

$$P = \prod_{\alpha=1}^N P_\alpha \quad (5.6.19)$$

обладает свойством сдвигать точки вдоль всей вещественной оси мимо всех неподвижных точек. Следовательно, необходимо извлечь периодичность, связанную с обходом вещественной оси произвольное число раз.

Пусть x^1 и x^2 означают неподвижные точки этого произведения. Тогда получаем следующие пределы интегрирования:

$$x^{(1)} < P(z_1) < z_M < z_{M-1} < \dots < z_1 < x^{(2)} < x_1^{(1)} < x_1^{(2)} < x_2^{(1)} < \dots < x_N^{(2)}. \quad (5.6.20)$$

Здесь наложено ограничение, что все множители для P_α , включая произведение P , остаются меньше или равны единице. Конечно, существуют другие эквивалентные выборы области интегрирования, поскольку мы приняли один конкретный способ обрезания этой области. В частности, можно было бы поместить внешние линии между неподвижными точками разных проективных операторов. Поскольку множество являлось группой Шоттки, мы можем быть уверены, что область интегрирования для наших переменных конечна. (Нужно отметить, что вычисление многопетлевых амплитуд было проведено в 1970 г. с применением проективных операторов, уничтожающих духи на ведущей траектории. Для духовых полей формализма BRST это вычисление можно проделать заново, чтобы устранить все возможные духи. В силу единственности функции Неймана на поверхности можно ожидать, что результат будет тем же.)

До сих пор мы обсудили лишь многопетлевые амплитуды для открытой струны. Теперь обобщим эти предыдущие выводы, непосредственно выписав функцию Неймана для сферы с N ручками или отверстиями применительно к сектору замкнутых струн [21].

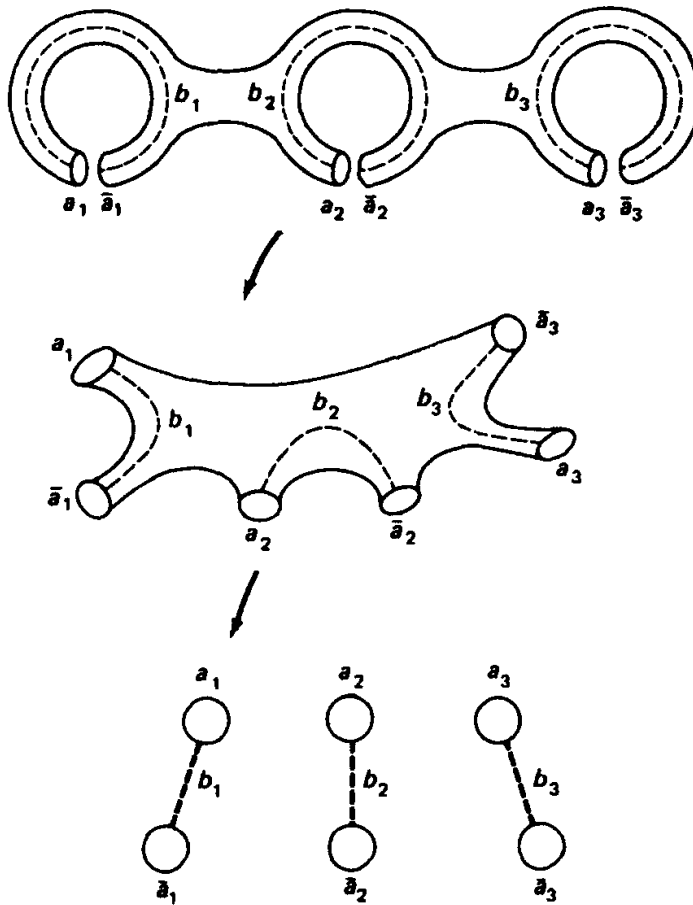


Рис. 5.12. Гомологические циклы на произвольной замкнутой римановой поверхности. Циклы a и b суть $2g$ замкнутых линий на поверхности рода g , которые невозможно непрерывными деформациями стянуть в точку. Разрезав поверхность вдоль a -циклов, можно развернуть ее в плоскость, на которой вырезано $2g$ отверстий. Заметим, что b -циклы переходят при этом в линии, соединяющие пары отверстий, определенные a -циклами.

Сначала рассмотрим комплексную плоскость с прорезанными в ней $2N$ отверстиями. Назовем область, лежащую вовне этих $2N$ отверстий, областью S . Назовем также эти пары отверстий a -циклами a_i и \bar{a}_i , где $i = 1$. Проективные преобразования, как мы видели, отображают окружности на окружности, поэтому можно определить N проективных преобразований P_i , переводящих каждый a -цикл в соответствующий ему \bar{a} -цикл (см. рис. 5.12):

$$P_i: a_i \rightarrow \bar{a}_i. \quad (5.6.21)$$

Эти проективные преобразования P_i , разумеется, могут в свою очередь быть параметризованы двумя неподвижными точками $z_i^{(1)}$ и $z_i^{(2)}$ и множителем X_i . Мы увидим, что эти неподвижные точки лежат внутри соответствующих a -циклов, так что они не принадлежат комплексной плоскости с вырезанными отверстиями. В общем случае точка, принадлежащая поверхности S (области, внешней относительно всех a -цик-

лов), переводится преобразованием P_i во внутренность одного из a -циклов.

Кроме a -циклов, у нас имеются также b -циклы, соответствующие разрезам по линии, соединяющей a_i с \bar{a}_i . Поэтому эти b -циклы суть окружности, окружающие i -е отверстие, если мы рассматриваем сферу с N отверстиями. Заметим, что проективное преобразование $z \rightarrow wz$ на однопетлевой диаграмме переводит внутренние радиусы соответствующего кольца в его внешние радиусы. Итак, проективные преобразования P_i порождают движение вдоль b -циклов. В общем случае проективные преобразования P_i отображают точки одного a -цикла в точки сопряженного ему \bar{a} -цикла, так что мы движемся вдоль некоторого b -цикла.

Теперь определим V_i как произведение всех различных произведений разных P_i . Заметим, что индекс i меняется от 1 до N , тогда как I пробегает по бесконечному набору индексов. Теперь определим функцию ψ :

$$\ln \psi(z, z') = \ln(z - z') + \sum_I' \ln \frac{(z - V_I z')(z' - V_I z)}{(z - V_I z)(z' - V_I z')} \quad (5.6.22)$$

Штрих у знака суммы означает, что мы включаем либо V_I , либо V_I^{-1} , но не оба этих оператора. Казалось бы, функцию Неймана естественно определить выражением

$$N(z, z') = \ln |\psi(z, z')|. \quad (5.6.23)$$

Однако такая функция не обладает правильными свойствами. Мы стремимся определить автоморфные функции, изменяющиеся лишь на константу при обходе различных петель в плоскости z . Вышеприведенное выражение не обладает этим свойством периодичности, которое являлось решающим критерием для функции Неймана. Поэтому такая функция не может быть автоморфной.

Однопетлевая функция, напротив, этим свойством обладает. Заметим, что функция z , например, изменяется на $2\pi i$ в результате обхода по a -циклу:

$$\ln(ze^{2\pi i}) = \ln z + 2\pi i. \quad (5.6.24)$$

При пересечении b -цикла она изменяется на w :

$$\ln wz = \ln w + \ln z. \quad (5.6.25)$$

Эти величины называются периодами функции z . Отношение этих периодов равно

$$\frac{\ln w}{2\pi i} = \tau \quad (5.6.26)$$

и называется *матрицей периодов*. Итак, τ есть матрица периодов для однопетлевой функции.

Этим способом можно показать, что вся однопетлевая функция

Неймана изменяется лишь на постоянную при обходе вокруг a - или b -циклов.

Можно показать, что предложенная выше функция N (в качестве возможной N -петлевой функции Неймана) при обходе вокруг r -го a -цикла остается неизменной:

$$\delta_{ar} \psi(z, z') = 0. \quad (5.6.27)$$

Однако можно показать, что при обходе вокруг b -цикла, задаваемого преобразованием $z \rightarrow P_r(z)$, она меняется. Она не является периодической, так как

$$\delta_{br} \ln \psi(z, z') = -v_r(z) + v_r(z') - \frac{1}{2} i\pi \tau_{rr} + \frac{1}{2} i\pi - \ln(c_r z + d_r), \quad (5.6.28)$$

где

$$v_r(z) = \sum_I^{(r)} \ln \frac{z - V_I z_r^{(1)}}{z - V_I z_r^{(2)}} \quad (5.6.29)$$

(знак (r) у суммы просто означает, что с целью избежать двойного счета в комбинации $V_I z_r^{(1,2)}$ необходимо опускать любое преобразование P_r , могущее подействовать на неподвижную точку $z_r^{(1,2)}$); c и d соответствуют коэффициентам в исходном определении проективного отображения. Если вычислить функцию $v_r(z)$ и переместить z вокруг a - или b -цикла, получим

$$\begin{aligned} \delta_{as} v_r(z) &= 2\pi i \delta_{rs}, \\ \delta_{bs} v_r(z) &= 2\pi i \tau_{rs}, \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

где

$$\tau_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \sum_I^{(rs)} \ln \frac{(z_s^{(1)} - V_I z_r^{(1)})(z_s^{(2)} - V_I z_r^{(2)})}{(z_s^{(1)} - V_I z_r^{(2)})(z_s^{(2)} - V_I z_r^{(1)})}. \quad (5.6.31)$$

Матрица τ_{rs} , полученная вычислением изменения v_r вследствие обхода s -го b -цикла, снова называется матрицей периодов и является естественным обобщением матрицы периодов τ , найденной ранее для однопетлевой диаграммы в (5.5.2) и (5.6.25).

С помощью этого обобщенного определения матрицы периодов можно выписать полную функцию Неймана, обладающую правильными свойствами периодичности. Изменим ψ так, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} \ln \bar{\psi}(z, z') &= \ln \psi(z, z') - \frac{1}{2\pi} \sum_{r,s} \operatorname{Re}(v_r(z) - v_r(z')) ((\operatorname{Im} \tau)^{-1})_{rs} \\ &\quad \times \operatorname{Re}(v_s(z) - v_s(z')). \end{aligned} \quad (5.6.32)$$

Тогда функция Неймана примет вид

$$N(z, z') = \ln |\bar{\psi}(z, z')|. \quad (5.6.33)$$

Собирая все вместе, мы можем записать N -петлевую амплитуду для замкнутой струны. По сравнению с однопетлевой амплитудой имеем следующие изменения:

(1) Однопетлевая функция распределения принимает вид

$$\prod_I |1 - X_I|^{-48}, \quad (5.6.34)$$

где мы взяли кратное от произведения по всем неэквивалентным смежным классам выражения V_I .

(2) Фактор $(\ln |w|)^{-1}$, который был связан с матрицей периодов, теперь заменяется на детерминант N -петлевой матрицы периодов:

$$\det |\operatorname{Im} \tau|_{rs}. \quad (5.6.35)$$

(3) Другой множитель, а именно

$$\prod_r |z_r^{(1)} - z_r^{(2)}|^4 \quad (5.6.36)$$

появляется в выражении для амплитуды.

Окончательный результат поэтому имеет вид [21]

$$A_{N\text{-loop}} = \int_F \prod_{rs} \frac{d^2 z_r d^2 z_s^{(1)} d^2 z_s^{(2)} d^2 X_s}{dV_{abc}} \prod_s |X_s(z_s^{(1)} - z_s^{(2)})|^{-4} \\ \times |\operatorname{Im} \tau|^{-13} \prod_I |1 - X_I|^{-48} \prod_{r>r'} |\bar{\psi}(z_r, z_{r'})|^{k_i \cdot k_j}. \quad (5.6.37)$$

Здесь интегрирование проводится по фундаментальной области F поверхности с N отверстиями.

§ 5.7. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

Хотя в результате предыдущих вычислений мы получили явную формулу, выражающую многопетлевые амплитуды через группы Шоттки, нам приходится быть осторожными при обрезании области интегрирования с целью избежать повторного счета. Это, по-видимому, трудность, внутренне присущая формализму Намбу–Гото, так как в нем континуальный интеграл не фиксирует область интегрирования однозначно.

Что же касается формализма Полякова, то он позволяет устранить повторный счет с самого начала, используя мощные теоремы для римановых поверхностей. Одно из крупных преимуществ этого формализма – возможность в полной мере воспользоваться богатством результатов математических исследований римановых поверхностей, которые проводились в прошлом столетии. Особенно важен будет тот факт, что найденный ранее детерминант, содержащий в себе структуру особенностей N -петлевой диаграммы, может быть выражен через дзета-функцию Зельберга.

Напомним, что действие Полякова дается формулой (2.1.35)

$$L = \frac{-1}{2\pi} \int d^2 z \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (5.7.1)$$

Порождающий функционал есть

$$Z = \sum_{\text{топология метрика}} \int Dg_{ab} \int_{\text{вложения}} DX^\mu e^{-S}, \quad (5.7.2)$$

и его нужно тщательно разделить на подходящий коэффициент, чтобы не учитывать многократно вклад конформно эквивалентных римановых поверхностей. Мы будем следовать выводу Альвареса [22] для замкнутых струн.

Функциональный интеграл по струнной переменной X гауссов и поэтому легко вычисляется (см. (1.7.10)):

$$DX \exp\left(-\int d^2z \sqrt{gg}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right) = \left(\frac{2\pi}{\int d^2z \sqrt{g}} \det'(-\nabla^2)\right)^{-(1/2)D}, \quad (5.7.3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{-1}{\sqrt{g}} \partial_m \sqrt{gg}^{mn} \partial_n, \quad (5.7.4)$$

а штрих у детерминанта означает, что нулевая мода всегда будет отбрасываться.

Функция распределения (5.2.14), содержащая расходимость одной петли, в этот детерминант не входит.

Однако выполнение континуального интегрирования по метрике оказывается намного более сложным из-за наличия калибровочных параметров и петель. Как было показано в (2.4.1), мера инвариантна относительно общековариантного преобразования в $2D$ -мерии и масштабного преобразования:

$$\delta g_{ab} = g_{ac} \partial_b \delta v^c + \partial_a \delta v^c g_{cb} - \partial_c \delta v^c g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab}. \quad (5.7.5)$$

Если ввести символы Кристоффеля, это выражение можно переписать в ковариантной форме:

$$\delta g_{ab} = \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a + 2\delta\sigma g_{ab}. \quad (5.7.6)$$

Здесь σ является параметром вейлевского масштабного преобразования, а δv_a определяет репараметризацию двумерной поверхности. В общем случае это означает, что мера интегрирования по g_{ab} на самом деле является бесконечной. Заметим, что g_{ab} имеет три независимые компоненты и что δv_a и $d\sigma$ также имеют три компоненты, так что интуитивно можно ожидать, что допустимо положить все компоненты метрического тензора равными дельта-функции:

$$g_{ab} = \delta_{ab}. \quad (5.7.7)$$

На интуитивном уровне выбор конформной калибровки эквивалентен факторизации континуального интеграла по бесконечному объему на факторы, отвечающие вейлевскому масштабному преобразованию, с одной стороны, и двумерной репараметризации поверхности, с другой. Фиксация калибровки тогда означает, что континуальный интеграл по

метрике заменяется согласно формуле

$$Dg_{ab} \rightarrow Dg_{ab} (\Omega_{\text{Diff}})^{-1} (\Omega_{\text{weyl}}), \quad (5.7.8)$$

где бесконечный объем пространства может быть представлен в виде (см. (1.6.7))

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{Diff}} &= \int Dv_a, \\ \Omega_{\text{weil}} &= \int D\sigma. \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

Для сфер и дисков без отверстий это действительно верно. Однако для поверхностей с большим числом петель или ручек это уже не так из-за осложнений, связанных с параметризацией петель.

В общем случае сфера с N отверстиями или ручками требует много параметров для описания расположения и размера каждого отверстия. В сущности, для диска с отверстиями нам нужны один параметр для задания радиуса каждого отверстия и еще два для задания координат центра каждого отверстия. Таким образом, для описания $3N$ отверстий нужно N параметров. (В случае сферы с ручками необходимо $3N$ комплексных параметров для описания N пар отверстий.) Как мы видели ранее, три параметра можно зафиксировать в качестве общих (и взять их равными, скажем, 0, 1 и бесконечности), так что диск с отверстиями может быть описан

$$3N - 3 \quad (5.7.10)$$

вещественными параметрами или вдвое большим их числом, если поверхность является сферой с N ручками. Итак, g_{ab} нельзя положить равным δ_{ab} для поверхностей с высоким родом (отверстиями). Однако всякая двумерная метрика конформно эквивалентна метрике с постоянной кривизной. Конформным преобразованием всегда можно сделать кривизну постоянной. Поэтому пространство метрик, по которому мы хотим интегрировать, это пространство метрик с постоянной кривизной, разбитое на классы с помощью диффеоморфизмов поверхности M . Пространство модулей есть пространство метрик с постоянной кривизной, в котором устранен повторный учет, порождаемый репараметризационной инвариантностью:

$$\text{Пространство модулей} = \frac{M_{\text{const}}}{\text{Diff}(M)}. \quad (5.7.11)$$

Однако, как было показано при обсуждении однопетлевых диаграмм в разд. 5.5, на самом деле существуют два класса репараметризаций: те, которые можно связать с тождественным преобразованием, и те, которые не могут быть с ним связаны. В предыдущем тождестве разбиение осуществлялось посредством множества всех диффеоморфизмов поверхности. Но мы также могли осуществить его посредством лишь таких диффеоморфизмов, которые связаны с тождественным преобразованием; назовем его $\text{Diff}_0(M)$. Полученное пространство называется *прост-*

пространством Тейхмюллера:

$$\text{Пространство Тейхмюллера} = \frac{M_{\text{const}}}{\text{Diff}_0(M)}. \quad (5.7.12)$$

Связь между пространством модулей и пространством Тейхмюллера, разумеется, должна быть очень тесной. В самом деле, фактически они эквивалентны с точностью до действия некоторой дискретной группы, называемой группой классов отображений (MCG):

$$\text{Пространство модулей} = \frac{\text{Пространство Тейхмюллера}}{\text{MCG}}. \quad (5.7.13)$$

Таким образом,

$$\text{MCG} = \frac{\text{Diff}(M)}{\text{Diff}_0(M)}. \quad (5.7.14)$$

Другими словами, пространство Тейхмюллера отличается от пространства модулей только *глобальными* диффеоморфизмами, которые не могут быть связаны с тождественным преобразованием. К примеру, представьте себе, что тор разрезан, как на рис. 5.13, один край разреза повернут на 2π и края разреза снова соединены. Эта операция называется твистом Дена. Обратите внимание, что такое преобразование порождает диффеоморфизм, который не может быть непрерывными преобразованиями переведен в тождественное преобразование. Это глобальный диффеоморфизм. Поэтому пространство Тейхмюллера «больше» пространства модулей, поскольку необходимо разбить его на блоки, отвечающие глобальным диффеоморфизмам, чтобы получить пространство модулей. Размерности обоих этих пространств

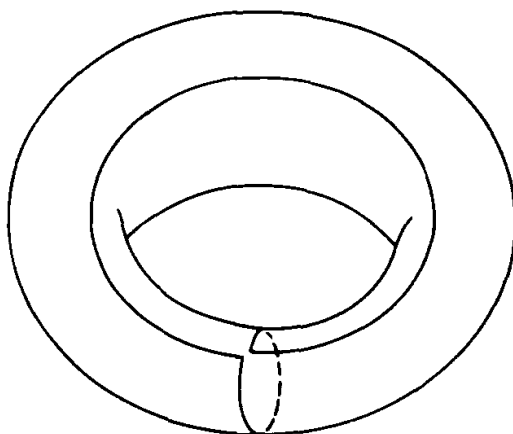


Рис. 5.13. Действие твиста Дена. Тор разрезан вдоль его a -цикла. Один из концов тора перекручивается на один полный оборот и снова склеивается с другим концом. Заметим, что исходный b -цикл теперь становится суммой a - и b -цикла. Такое отображение тора на себя не может быть непрерывно деформировано обратно к тождественному отображению. Множество всех твистов Дена порождает группу классов отображений.

даются формулой

$$\dim \text{Teich} = \dim \text{Moduli} = \begin{cases} 0, & \text{if } N = 0, \\ 2, & \text{if } N = 1, \\ 6N - 6, & \text{if } N \geq 2. \end{cases} \quad (5.7.15)$$

Это, конечно, в точности совпадает с числом параметров, необходимых для описания сферы с N отверстиями. Тем самым такое описание дает необходимые параметры для параметризации N -петлевой диаграммы. (Заметим, что модулярная группа и группа классов отображений совпадают, и мы будем использовать оба термина в одном и том же смысле.)

На практике объемный фактор, порождаемый группой классов отображений, можно устранить тривиально, так что для наших целей мы можем считать пространство Тейхмюллера и пространство модулей по существу совпадающими.

Пока что обсуждение касалось лишь общих вопросов. Чтобы действительно извлечь эти дополнительные параметры, необходимые для описания отверстий в римановой поверхности, нужно использовать теорию пространств Тейхмюллера.

Некоторые необходимые для этого вычисления довольно сложны, так что мы должны всегда помнить о нашей конечной цели: выразить функциональную меру Dg_{ab} через параметры $Dv_a D\sigma$ и $3N - 3$ параметров Тейхмюллера Dt_i . Итак, наша цель — найти соотношение

$$Dg_{ab} = \mu Dv_a D\sigma Dt_i. \quad (5.7.16)$$

Тогда, просто разделив на Dv_a и $V\sigma$, мы успешно устраним бесконечную избыточность, связанную с репараметризационной и масштабной инвариантностью.

Перепишем теперь вариацию метрического тензора (5.7.6) в более удобной форме, выражающей тот факт, что g_{ab} зависит также от t_i , т. е. от параметров Тейхмюллера. Используя правило дифференцирования сложной функции, можно формально представить зависимость метрического тензора от параметров Тейхмюллера с помощью $\delta t_i \delta / \delta t^i$:

$$\delta g_{ab} = [\nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - (\nabla_c \delta v^c) g_{ab}] + (\nabla_c \delta v^c) g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i T^i,$$

$$\text{где } T = \frac{\delta g_{ab}}{\delta t^i} - (\text{след}). \quad (5.7.17)$$

Здесь мы в явном виде выписали вариацию метрического тензора как функцию $3N - 3$ параметров (параметров Тейхмюллера), которые метят t^i , связанные с N петлями. Заметим, что мы вычли след в скобках и что на этой стадии вычислений нам нет необходимости задавать, как именно метрика зависит от разных t_i .

Вариацию можно переписать в виде

$$\delta g_{ab} = P_1(\delta v)_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i \partial_i g_{ab}, \quad (5.7.18)$$

где

$$P_1(\delta v)_{ab} = \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - g_{ab} \nabla_c \delta v^c. \quad (5.7.19)$$

Оператор P_1 играет ключевую роль в теории пространств Тейхмюллера. Заметим, что он является эллиптическим оператором, отображающим векторы в бесследовые симметричные тензоры. Пусть $\ker P_1$ представляет ядро этого оператора, т. е. множество векторов, которые отображаются в нуль оператором P_1 ; $\ker P_1$ называют множеством «конформных векторов Киллинга». Для поверхностей, имеющих род N , размерность ядра оператора определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dim \ker P_1 &= 6 \text{ для рода } 0, \\ \dim \ker P_1 &= 2 \text{ для рода } 1, \\ \dim \ker P_1 &= 0 \text{ для более высокого рода.} \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

Мы также определим оператор, сопряженный P_1 , и назовем его P_1^\dagger . Чтобы это сделать, нам, конечно, нужно сначала определить скалярное произведение. Определим

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int d^2 z \sqrt{g} g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd}, \quad (5.7.21)$$

$$\|\delta v_a\|^2 = \int d^2 z \sqrt{g} g_{ab} \delta v^a \delta v^b. \quad (5.7.22)$$

Это позволяет определить сопряженный оператор P_1^\dagger с помощью определения $\langle a | P b \rangle = \langle P^\dagger a | b \rangle$:

$$P_1^\dagger(\delta g)_a = -2\nabla^b \delta g_{ab}. \quad (5.7.23)$$

Рассмотрим теперь пространство $\ker P_1^\dagger$, т. е. пространство векторов, обращаемых в нуль действием оператора P_1^\dagger . Переписав все через переменные z и \bar{z} , видим, что элементы пространства $\ker P_1^\dagger$ удовлетворяют уравнению

$$\nabla^z \delta g_{zz} = \partial_z \delta g_{zz} = 0. \quad (5.7.24)$$

Базисом ядра оператора P_1^\dagger служат векторы, называемые *квадратичными дифференциалами*. К счастью, размерности пространств квадратичных дифференциалов для римановых поверхностей известны:

$$\begin{aligned} \dim \ker P_1^\dagger &= 0 \text{ для рода } 0, \\ \dim \ker P_1^\dagger &= 2 \text{ для рода } 1, \\ \dim \ker P_1^\dagger &= 6N - 6 \text{ для рода } N. \end{aligned} \quad (5.7.25)$$

Таким образом, число параметров, описывающих ядро оператора P_1^\dagger , равно числу параметров Тейхмюллера, необходимых для описания поверхности с N ручками или петлями. Символически мы можем теперь описать, как разбить меру интегрирования на части, из которых она

состоит, записав

$$\{\delta g_{ab}\} = \{\delta\sigma\} \oplus \{P_1 \delta v_a\} \oplus \{\ker P_1^\dagger\}. \quad (5.7.26)$$

Это уравнение имеет довольно простой смысл. Оно означает, что составляющие метрического тензора g_{ab} могут быть разбиты на три части; а именно на часть, отвечающую растяжению, на бесследовую часть и на скрытые параметры Тейхмюллера. Оно также означает, что мы почти достигли нашей цели, сформулированной в (5.7.16), но здесь имеются некоторые осложняющие тонкости.

Проведем явным образом замену переменных и вычислим якобиан этого преобразования. Сначала предположим, что нам не нужно беспокоиться о параметрах Тейхмюллера. Затем перейдем от переменных h_{ab} (т.е. бесследовой части метрического тензора) и τ (т.е. следа g_{ab}) к переменным δv_a и σ :

$$Dg_{ab} = \det \left[\frac{\partial(\tau, h)}{\partial(\sigma, v)} \right] D\sigma Dv_a, \quad (5.7.27)$$

где

$$\det \left[\frac{\partial(\tau, h)}{\partial(\sigma, v)} \right] = \det \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} = \det P_1 = [\det P_1 P_1^\dagger]^{1/2}, \quad (5.7.28)$$

причем значение X произвольно, поскольку оно не входит в детерминант.

Заметим, что квадратный корень из детерминанта матрицы $P_1 P_1^\dagger$ — это как раз детерминант Фаддеева–Попова для конформной калибровки и он может быть выражен через духи BRST. Итак, мы можем записать детерминант Фаддеева–Попова, впервые вычисленный в (2.4.3), как

$$\det^{1/2} P_1 P_1^\dagger = \Delta_{\text{FP}} = \int Db Dce^{-S_{\text{FP}}}. \quad (5.7.29)$$

Следующий шаг — вычисление множителя Якоби, отражающего тот факт, что мера на самом деле зависит от параметров Тейхмюллера t_i . Проблема состоит в том, что параметры Тейхмюллера не ортогональны $P_1 \delta v_a$, так что якобиан будет содержать *внедиагональные члены*, которые нужно вынести за знак определителя.

Начнем обсуждение с введения набора $3N - 3$ комплексных полей ψ^a , которые будут ортогональным базисом пространства P_1^\dagger . Теперь разложим на составляющие множитель [22, 23]

$$T_{ab}^i = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t_i} - (\text{след}), \quad (5.7.30)$$

записав следующее тождество:

$$T^i = \left(1 - P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger \right) T^i + P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T^i. \quad (5.7.31)$$

Важно отметить, что здесь мы пока ничего не изменили, а только добавили и вычли один и тот же член. Однако введенный нами член содержит оператор P_1 , действующий на другое состояние. Поэтому приведенное выше тождество полезно, поскольку оно позволяет выделить ту часть T^i , которая совпадает по направлению с P_1 :

$$T^i \equiv \psi^a (\psi^a, T^i) + P_1 v^i. \quad (5.7.32)$$

Здесь

$$v_i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T^i, \quad (5.7.33)$$

$$(\psi^a, T^i) = \int d^2 z \sqrt{g} g^{bc} g^{be} T_{bd}^i \psi_{ce}^a. \quad (5.7.34)$$

Как и ожидалось, T^i имеет составляющую, направленную вдоль P_1 , которую необходимо учитывать при выписывании якобиана. Обратно подставим это выражение в меру для δg_{ab} :

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \|\delta\sigma\|^2 + (T^i, \psi^a) (\psi_a, \psi_b)^{-1} (\psi^b, T^j) \sigma t_i \delta t_j + \|P_1 \delta v_a\|^2. \quad (5.7.35)$$

Это, наконец, дает якобиан, включающий вклад от параметров Тейхмюллера. Мы также явным образом учли тот факт, что T^i исходно содержал составляющую, лежащую вдоль P_1 :

$$Dg_{ab} = d\sigma Dv_a Dt_i \det^{1/2}(P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi_a, T_b)}{\det^{1/2}(\psi_a, \psi_b)}. \quad (5.7.36)$$

Это в свою очередь позволяет собрать вместе все элементы континуального интеграла в следующий фактор:

$$\begin{aligned} \int DX e^{-S} Dg_{ab} \Omega_{\text{Diff}}^{-1} \Omega_{\text{Weil}}^{-1} &= \int Dv_a \Omega_{\text{Diff}}^{-1} d\delta \Omega_{\text{Weil}}^{-1} \\ &\times Dt_i \det^{1/2}(P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \\ &\times \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det'(-\nabla^2) \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.7.37)$$

Мы, наконец, добились нашей цели (5.7.16), если оставить в стороне вопрос об аномалиях, которые могут нарушить масштабную инвариантность.

Хотя приведенные выше рассуждения могут показаться длинными и сложными, окончательный результат весьма прост. Он показывает, что мера интегрирования, включающая детерминант Фаддеева–Попова для духов, может быть полностью выражена через детерминанты оператора P_1 и сопряженного ему оператора. Эта мера состоит из трех частей: первая из них – это множитель Фаддеева–Попова, который записан как квадратный корень из детерминанта произведения $P_1 P_1^\dagger$; вторая часть – это множитель, содержащий T^i и возникающий из-за того, что модулярные параметры t_i не ортогональны базисным векторам ψ^a , образующим ортогональный базис пространства $\ker P_1^\dagger$; третья

часть – детерминант оператора Лапласа, который, как можно показать, также может быть записан через оператор P_1 .

Однако пока не удается устранить интегрирование по скалярному параметру σ в (5.7.37). К сожалению, этот скалярный параметр содержится в разных частях выражения для меры. Фактически мы убедимся, что в общем случае масштабный фактор вообще невозможно устранить из компонентов меры, что нарушает конформную инвариантность. В следующем разделе мы покажем, что масштабной инвариантности препятствует некая аномалия, называемая конформной аномалией, и она может быть устранена только в том случае, когда размерность пространства – времени равна 26. Этот факт фиксирует размерность пространства – времени.

Попутно мы покажем, как записать все детерминанты через один лишь оператор P_1 .

§ 5.8. КОНФОРМНАЯ АНОМАЛИЯ

Заметим, что мы можем избавиться от интегрирования по объему группы репараметризаций, поскольку

$$\Omega_{\text{Diff}}^{-1} \int Dv_a = 1. \quad (5.8.1)$$

Затем мы хотим устранить член, связанный с вейлевским изменением масштаба:

$$\Omega_{\text{Weyl}}^{-1} \int D\sigma = 1. \quad (5.8.2)$$

Однако интегрирование по масштабному параметру σ существенно сложнее, поскольку члены, содержащие σ , присутствуют и в других компонентах меры. Поэтому нам необходимо очень тщательно извлечь все зависящие от σ члены из каждого из оставшихся компонентов, прежде чем мы сможем устранить член, связанный с вейлевским изменением масштаба. Окажется, что вейлевский фактор также можно будет извлечь из компонентов меры, но лишь в том случае, когда размерность пространства – времени равна 26! Вычисление конформной аномалии довольно сложно, так что мы лишь наметим основные вехи этого вычисления.

Сначала заметим, что член (T^i, ψ^a) уже обладает вейлевской инвариантностью. В самом деле, осуществив масштабное преобразование по формулам

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab} &= e^\sigma g_{ab}, \\ \hat{T}^i &= e^\sigma T^i, \end{aligned} \quad (5.8.3)$$

мы видим, что в силу определения (T^i, ψ^a) этот член таким преобразованием не меняется. (Переменная ψ не изменяется под действием масштабного преобразования Вейля.)

Следовательно, единственный член, который должен нас беспокоить,

это

$$\left\{ \frac{\det' P_1^\dagger P_1}{\det(\psi^a, \psi^b)} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2z \sqrt{g}} \right\}^{-1/2} \quad (5.8.4)$$

(Штрих по-прежнему означает, что мы извлекли из этого выражения нулевую моду детерминанта.)

К счастью, извлечение вейлевского масштабного параметра можно выполнить одновременно для обоих членов, если воспользоваться некоторыми фактами теории римановых поверхностей. Для этого нужно переписать P_1 , P_1^\dagger и ∇^2 таким образом, чтобы все три этих оператора были выражены через один и тот же дифференциальный оператор.

Пусть

$$T_{abcdef\dots}^{ijklmn\dots} \quad (5.8.5)$$

представляет произвольный тензор, заданный на двумерной римановой поверхности. Конечно, мы всегда можем переписать этот тензор через комплексные переменные z и \bar{z} . Обозначим через K^n множество всех тензоров T , которые в этих переменных преобразуются определенным образом, а именно

$$K^n = \left\{ T: T \rightarrow \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^n T \right\} \quad (5.8.6)$$

(см., например, (2.7.6) и (4.1.7)). Ясно, что оператор

$$\nabla_z^q T = (g^{z\bar{z}})^q \partial_z [(g_{z\bar{z}})^q T] \quad (5.8.7)$$

отображает тензор T в другой тензор. Более точно, он отображает K^q в K^{q-1} :

$$(\nabla_z^q: K^q \rightarrow K^{q-1}). \quad (5.8.8)$$

Возможно также определить оператор, действующий в обратном направлении. Оператор

$$\nabla_{\bar{z}}^z T = g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T \quad (5.8.9)$$

отображает K^q в K^{q+1} :

$$\nabla_{\bar{z}}^z: K^q \rightarrow K^{q+1}. \quad (5.8.10)$$

Теперь определим операторы

$$P_q = \begin{pmatrix} \nabla_{\bar{z}}^z & 0 \\ 0 & \nabla_z^{-q} \end{pmatrix} \quad (5.8.11)$$

и

$$P_q^\dagger = \begin{pmatrix} -\nabla_z^{q+1} & 0 \\ 0 & -\nabla_{\bar{z}}^{-q-1} \end{pmatrix}. \quad (5.8.12)$$

Используя эти обозначения, можно показать, что

$$-P_1^\dagger P_1 = \begin{pmatrix} \nabla_z^2 \nabla_1^z & 0 \\ 0 & \nabla_{-2}^z \nabla_z^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.8.13)$$

Таким образом,

$$\det P_1^\dagger P_1 = \det (\nabla_z^2 \nabla_1^z) \det (\nabla_{-2}^z \nabla_z^{-1}) = \det \Delta_1^+ \det \Delta_{-1}^-. \quad (5.8.14)$$

Поскольку лапласиан с индексом «+» комплексно сопряжен лапласиану с индексом «-», то

$$\det^{1/2} P_1^\dagger P_1 = \det \Delta_1^+. \quad (5.8.15)$$

Наконец, мы можем определить также

$$\Delta_0^+ = \nabla_1^z \nabla_z^0. \quad (5.8.16)$$

Вооружась этими определениями, мы теперь выразим детерминант в виде

$$\left[\frac{\det P_1^\dagger P_1}{\det (\psi^a, \psi^b)} \right]^{1/2} \left[\frac{\det' (-\nabla^2)}{\int d^2 \sigma \sqrt{g}} \right]^{-(1/2)D} = \frac{\det \Delta_1^+}{\det^{1/2} (\psi^a, \psi^b)} (\det \Delta_0^+)^{-(1/2)D}. \quad (5.8.17)$$

Другими словами, обе части якобиана, которые на первый взгляд несхожи, представлены теперь *одним и тем же оператором* Δ_q^+ , где $q = 1$ и $q = 0$. Осталось вычислить вариацию предыдущего выражения при вейлевском изменении масштаба. Удобно записать соответствующее выражение через тепловое ядро детерминанта:

$$\log \det H = - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} \text{Tr}' e^{-tH}. \quad (5.8.18)$$

Здесь ε – малое число. С помощью этого уравнения мы можем выразить вариацию детерминанта, связанную с вейлевским изменением масштаба. Соответствующее вычисление довольно сложно, так что мы просто приведем окончательный результат [22–24]:

$$\delta \log \frac{\det \Delta_q^+}{\det^{1/2} (\psi^a, \psi^b)} = \frac{1 + 6q(1 + q)}{12\pi} \int d^2 z \sqrt{g} R \delta \sigma. \quad (5.8.19)$$

Здесь R – свернутый двумерный тензор кривизны. Итак, нам нужно вычислить этот фактор при $q = 1$ и при $q = 0$. Окончательный результат дается формулой

$$\begin{aligned} \delta \log \left[\frac{\det^{1/2} P_1^\dagger P_1}{\det^{1/2} (\psi^a, \psi^b)} \left(\frac{\det' (-\nabla^2)}{\int d^2 z \sqrt{g}} \right)^{-(1/2)D} \right] \\ = \frac{13 - \frac{1}{2}D}{12\pi} \int d^2 z \sqrt{g} R \delta \sigma. \end{aligned} \quad (5.8.20)$$

Заметим, что при $D = 26$ конформная аномалия исчезает. Итак, мы показали, что

$$D = 26: \Omega_{\text{Weyl}}^{-1} \int D\sigma = 1. \quad (5.8.21)$$

Итак, наш окончательный результат для функционала есть

$$Z = \int D t_i \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \det_{\hat{g}}^{1/2} P_1^\dagger P_2 \left(\frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2 z \sqrt{\hat{g}}} \right)^{-13}, \quad (5.8.22)$$

где все члены вычислены с использованием метрики \hat{g}_{ab} , в которой параметр σ был полностью устранен. Итак, наша цель получить (5.7.16) теперь достигнута, по крайней мере в 26-мерном пространстве-времени.

Теперь, когда мы разработали этот мощный формализм, удобно свести этот случай к проблеме однопетлевой амплитуды и снова вывести наш ранее полученный результат (5.3.12) в свете новых возможностей для римановых поверхностей [25].

Для однопетлевой диаграммы интересующая нас область есть поверхность тора. Метрика плоской поверхности \hat{g}_{ab} соответствует решетке в комплексной плоскости

$$\omega_1 \mathbf{Z} + \omega_2 \mathbf{Z}. \quad (5.8.23)$$

Здесь \mathbf{Z} – произвольное целое число. Таким образом, интересующая нас область полностью определяется отношением

$$\tau = \omega_2 / \omega_1 \quad (5.8.24)$$

и тем фактом, что фундаментальная область нормируется так, чтобы ее площадь равнялась единице. Тогда группа классов отображений есть просто $SL(2, \mathbf{Z})$, а фундаментальную область, как и прежде, можно взять следующей ($\tau = \tau_1 + i\tau_2$):

$$\begin{cases} |\tau| \geq 1, \\ -\frac{1}{2} \leq \tau_1 < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.8.25)$$

Меру

$$(\det'^{1/2} P_1^\dagger P_1) \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det' \Delta_0 \right)^{-13} \quad (5.8.26)$$

можно еще более упростить. Например, (5.8.26) равно

$$\frac{1}{2} (\det' \Delta)^{-12} (2\pi\tau_2^{-1})^{-13}, \quad (5.8.27)$$

где

$$\det' \Delta = e^{-\pi\tau_2/3} \tau_2^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^4. \quad (5.8.28)$$

Инвариантная мера, как и прежде, может быть записана в виде

$$d t_i = d^2 \tau / \tau_2^2. \quad (5.8.29)$$

Собирая все вместе, получаем в итоге

$$Z = \int_{\text{Фундаментальная область}} \frac{d\tau_1 d_2}{\tau_2^2} (2\pi\tau_2)^{-12} e^{4\pi\tau_2} \left| \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi in\tau}) \right|^{-48}. \quad (5.8.30)$$

как в (5.5.4).

§ 5.9. СУПЕРСТРУНЫ

К счастью, обобщение многопетлевых амплитуд на случай суперструн проводится довольно очевидным способом, за исключением осложнений, связанных с определением спиноров на римановых поверхностях рода g .

Рассмотрим тор, параметризованный двумя переменными σ_1, σ_2 и построенный отождествлением противоположных сторон параллелограмма. Струна X , определенная на параллелограмме, должна удовлетворять следующим условиям периодичности:

$$X(\sigma_1, \sigma_2) = X(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) = X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi). \quad (5.9.1)$$

Однако задание спиноров на этой поверхности увеличивает число возможных вариантов. Спинор может быть либо периодическим (+) и удовлетворяющим условиям Рамона, либо антипериодическим (-), удовлетворяющим условиям Навье–Шварца, причем по *любой* из переменных, как σ_1 , так и σ_2 . (До сих пор мы рассматривали только граничные условия по одному направлению в (3.2.16), а именно по σ , но не по τ .) Тем самым полное число различных комбинаций граничных условий равно четырем. Возможные варианты определения спинора на торе соответствуют комбинациям (\pm, \pm) . Будем говорить, что эти четыре возможных выбора граничных условий для тора определяют его *спиновую структуру*.

Кроме того, нам известно, что модулярные преобразования перемешивают граничные условия, а следовательно и спиновые структуры, так что все четыре комбинации будут давать вклад в окончательную амплитуду. Например, преобразование

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2) \quad (5.9.2)$$

меняет $(-, -)$ на $(+, -)$. Подобным образом преобразование

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\sigma_2, -\sigma_1) \quad (5.9.3)$$

заменяет $(+, -)$ на $(-, +)$ и наоборот. Тем самым модулярная инвариантность, переставляющая граничные условия, заставляет включить в амплитуду комбинации $(+, -)$, $(-, +)$ и $(-, -)$; комбинация $(+, +)$ инвариантна сама по себе.

Чтобы вычислить вклад каждой спиновой структуры в однопетлевую амплитуду, найдем след гамильтониана по всем четырем возможным

комбинациям. Гамильтонианы для секторов NS и R суть

$$H_{NS} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r \psi_{-r}^i \psi_r^i - \frac{1}{48}, \quad (5.9.4)$$

$$H_R = \sum_{n=1}^{\infty} n \psi_{-n}^i \psi_n^i + \frac{1}{24}. \quad (5.9.5)$$

(Здесь $1/24$ возникает из-за регуляризации дзета-функции; см. гл. 11.) Эти гамильтонианы принадлежат секторам NS и R в зависимости от их периодичности по направлению σ . Однако, когда мы вычисляем след по этим гамильтонианам, мы вставляем полный набор промежуточных состояний по направлению τ . Континуальный интеграл по τ выбирает лишь антипериодические граничные условия, поэтому он неполон. Необходимо видоизменить эту сумму, чтобы включить все возможные спиновые структуры, что достигается включением фактора $(-1)^F$, где F – фермионное число. Окончательная амплитуда представляет собой сумму амплитуд $A(\pm, \pm)$, определенных для всех четырех следов и умноженных на некоторые коэффициенты C :

$$A(\tau) = \sum_{\pm} C(\pm, \pm) A(\pm, \pm). \quad (5.9.6)$$

В явном виде каждый из следов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A(-, -) &= \text{Tr} e^{2\pi i \tau H_{NS}} = [\Theta_3(0|\tau)/\eta(\tau)]^4, \\ A(+, -) &= \text{Tr} e^{2\pi i \tau H_R} = [\Theta_2(0|\tau)/\eta(\tau)]^4, \\ A(-, +) &= \text{Tr}(e^{2\pi i \tau H_{NS}} (-1)^F) = [\Theta_4(0|\tau)/\eta(\tau)]^4, \\ A(+, +) &= \text{Tr}(e^{2\pi i \tau H_R} (-1)^F) = 0. \end{aligned} \quad (5.9.7)$$

Здесь η – эта-функция Дедекинда:

$$\eta(\tau) = e^{ni\tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \tau n}). \quad (5.9.8)$$

Заметим, что последний след обращается в нуль. (Все три первые тэта-функции $\Theta_{2,3,4}$ четны по переменной z , тогда как Θ_1 нечетна. Поэтому только четные спиновые структуры сохраняются в следе.)

Последствия этого таковы. В NS-сектор, например, мы включили как сектор $(-, +)$, так и сектор $(-, -)$, так что приходится включать их вклады в след:

$$\text{Tr}((1 + (-1)^F) e^{2\pi i \tau H}). \quad (5.9.9)$$

Но это как раз и есть GSO-проекция [26], которая проектирует в нуль состояния, четные относительно $(-1)^F$! Итак, мы получили новую, физическую интерпретацию оператора GSO-проекции, который был введен в (3.6.12) для устранения несуперсимметричных секторов теории NS–R. Удивительно, что модулярная инвариантность, суперсимметрия и GSO-проекция столь тесно связаны.

Когда мы вычисляем вакуумную амплитуду, у которой нет внешних линий (она входит в вычисления космологической постоянной), необходимо сложить все четыре вклада спиновых структур. Но у нас есть замечательный результат Якоби:

$$\Theta_2^4(0|\tau) + \Theta_4^4(0|\tau) - \Theta_3^4(0|\tau) = 0. \quad (5.9.10)$$

Это означает, что вакуумная энергия суперструны, т.е. однопетлевая поправка к космологической постоянной, в точности равна нулю!

Подводя итоги, мы доказали, что модулярная инвариантность и операция GSO-проектирования по существу совпадают для замкнутой суперструны. Модулярная инвариантность, перемешивающая граничные условия, требует, чтобы мы добавили к окончательной амплитуде вклады всех спиновых структур, что в свою очередь соответствует добавлению как раз отвечающих GSO вставок оператора $(-1)^F$ в след. Первоначально GSO-проекция была наложена на суперструну NS-R с целью получить суперсимметрию. Теперь мы знаем, что GSO-проекция также налагает условие модулярной инвариантности [27].

В качестве приза мы обнаружили, что однопетлевой вклад в космологический член в точности равен нулю. (Однако это не означает, что теория суперструн решает проблему обращения в нуль космологической постоянной. После нарушения суперсимметрии мы не можем больше ожидать, что вклад вакуума равен нулю, и следовательно, теория суперструн не объясняет, почему космологическая постоянная равна нулю *после* нарушения суперсимметрии.)

Эти утверждения укрепляют наше убеждение в том, что внутренняя самосогласованность теории суперструн весьма замечательна.

Теперь обобщим наши наблюдения для построения многопетлевых амплитуд с внешними линиями.

К счастью, математический аппарат, разработанный для римановых поверхностей, весьма просто переносится на случай суперструн, если воспользоваться формализмом модели NS-R.

Обобщая (5.7.2), корреляционные функции можно вычислить из [28]:

$$Z = \sum_{\text{топологии}} \sum_{\substack{\text{спиновые метрика} \\ \text{структуры}}} \int Dg_{ab} \int_{\text{вложения}} DX^M \int D\varphi^\mu \int D\chi_\alpha e^{-S}. \quad (5.9.11)$$

Новым здесь будет интегрирование по двум антикоммутирующим векторным полям ψ и χ , а также суммирование по всем спиновым структурам.

Ранее в (3.4.5) было показано, что в формализме NS-R действие инвариантно относительно преобразования

$$\delta\chi_\alpha = D_\alpha \varepsilon. \quad (5.9.12)$$

Теперь по аналогии с бозонной струной построим два оператора $P_{1/2}$ и $P_{1/2}^\dagger$, такие что

$$(P_{1/2} \varepsilon)_\alpha = 1 D_\alpha \varepsilon - \rho_\alpha \rho^\beta D_\beta \varepsilon. \quad (5.9.13)$$

В дополнение к интегрированию по модулям теперь нам придется интегрировать по *супермодулям*, которые определяются как пространство бесследовых χ_α , таких что их невозможно устранить локальным суперсимметричным калибровочным преобразованием. Поэтому они удовлетворяют уравнениям

$$P_{1/2}^\dagger \chi = -2D_\alpha \chi^\alpha = 0. \quad (5.9.14)$$

Для поверхности рода N размерность пространства супермодулей равна размерности пространства $P_{1/2}^\dagger$:

$$\dim \ker P_{1/2}^\dagger: \begin{cases} 0 & \text{при } N = 0, \\ 2 & \text{при } N = 1 \text{ (периодические дважды)}, \\ 0 & \text{при } N = 1 \text{ (прочие)}, \\ 4N - 4 & \text{при } n \geq 2. \end{cases} \quad (5.9.15)$$

(Здесь «периодические дважды» означает граничные условия NS-R-поля.) Мы хотим построить якобиан для

$$Dg_{ab} D\chi_\alpha. \quad (5.9.16)$$

Для фермионного поля этот якобиан вычисляется, как и прежде:

$$D\chi_\alpha = (\det \hat{P}_{1/2}^\dagger \hat{P}_{1/2})^{-1/2} e^{-(11/2)S(\sigma)} D\zeta D\lambda \prod_{i=1}^{4N-4} da_i. \quad (5.9.17)$$

Здесь a_i – супермодули, и они соответствуют параметрам Тейхмюллера, а интегрирование по фермионным параметрам λ и ζ представляет интегрирование по избыточности, вносимой суперсимметрией и суперпреобразованиями Вейля. Определим

$$S = \frac{1}{48\pi} \int d^2z \sqrt{\hat{g}} \left(\hat{g}^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma - \frac{1}{2} i\lambda \gamma^\alpha \hat{D}_\alpha \lambda + \mu^2 (e^\sigma - 1) + 2^{-3/2} \mu \lambda \lambda e^{(1/2)\sigma} + \frac{1}{2} R_g \sigma \right), \quad (5.9.18)$$

где R – тензор кривизны. Собирая все вместе, получаем

$$Dg_{ab} D\chi_\alpha = (\det^{1/2} \hat{P}_1^\dagger \hat{P}_1) (\det^{-1/2} \hat{P}_{1/2}^\dagger \hat{P}_{1/2}) \times e^{-13S_L} D\sigma Dv_a D\lambda D\zeta \prod_{i=1}^{4N-4} Da_i \prod_{j=1}^{6N-6} Dt_j. \quad (5.9.19)$$

Разделив на $D\sigma$, Dv_a , $D\lambda$ и $D\zeta$, извлекаем бесконечную избыточность, вносимую суперсимметрией действия суперструны. На практике, однако, параметризация модулей, в особенности при числе петель выше трех, весьма трудна. Природа супермодулей, к сожалению, изучена еще хуже. Это два главных препятствия для четкого понимания многопетлевых амплитуд, т. е. для выбора координат на римановой поверхности рода g , совместимого с модулярной и супермодулярной инвариантностью.

§ 5.10. ДЕТЕРМИНАНТЫ И СИНГУЛЯРНОСТИ

Преимущество метода римановой поверхности состоит в том, что по крайней мере формально возможно получить результаты об общей структуре сингулярностей N -петлевой амплитуды. Оказывается, что детерминант, содержащий эти сингулярности, есть дзета-функция Зельберга.

Выше мы видели, что проективные преобразования естественным образом разбиваются на классы сопряженных элементов. Два проективных преобразования считаются относящимися к одному и тому же сопряженному классу, если у них один и тот же множитель. Так, любые два элемента одного сопряженного класса могут быть приведены проективным преобразованием к виду

$$z \rightarrow e^l z. \quad (5.10.1)$$

Величину l иногда называют «длиной» замкнутой геодезической. Пусть z и z' суть две точки комплексной плоскости. Тогда мы определим «расстояние» между этими двумя точками формулой

$$d(z, z') = 1 + \frac{|z - z'|^2}{2\text{Im } z \text{ Im } z'}. \quad (5.10.2)$$

Преимущество этого определения «расстояния» в том, что оно одинаково для всех элементов одного смежного класса.

Мы видели на примере однопетлевой амплитуды, что умножение на множитель w перемещает точку по b -циклу. Топологически это просто означает обход по замкнутой геодезической на римановой поверхности. Итак, l есть длина простой замкнутой геодезической на этой поверхности. Мы будем называть преобразование *примитивным*, если оно не является степенью (большей или равной 2) какого-либо другого элемента из множества проективных преобразований. Итак, нас интересует множество примитивных геодезических. Определим дзета-функцию Зельберга как в [23]:

$$Z_\nu(s) = \prod_{l \text{ примитивное}} \prod_{p=0}^{\infty} [1 - \nu(\gamma) e^{-(s+p)l}]. \quad (5.10.3)$$

Здесь берутся произведения по длинам замкнутых примитивных геодезических γ на поверхности, $\nu(\gamma) = 1$ для бозонов и $\nu(\gamma) = \pm 1$ для фермионов, в зависимости от спиновой структуры.

Примечательно, что мы можем выписать различные детерминанты, найденные ранее при вычислениях многопетлевых амплитуд, с помощью дзета-функции Зельберга [28]:

$$\begin{aligned} \det' \Delta_0^+ &= Z'(1) e^{-c_0 \chi(M)}, \\ \det \Delta_1^+ &= Z_1(2) e^{-c_1 \chi(M)}. \end{aligned} \quad (5.10.4)$$

Фермионные детерминанты также можно выразить следующим образом:

$$(\det \hat{P}_{1/2}^\dagger \hat{P}_{1/2})_v^{1/2} = e^{-c_{1/2} \chi(M)} Z_\nu(3/2),$$

$$(\det' \gamma^\alpha D_\alpha \gamma^\beta D_\beta)_v^{1/2} = \frac{e^{-c-1/2\chi(M)}}{(2p)!} Z_v^{(2p)} \left(\frac{1}{2} \right). \quad (5.10.5)$$

Здесь χ — число Эйлера (p есть число нулевых мод для $\gamma^\alpha D_\alpha$). Числовая постоянная c определяется по формуле

$$2c_n = \sum_{0 \leq m < |n| - 1/2} (2|n| - 2m - 1) \log(2|n| - m) - \left(|n| + \frac{1}{2} \right)^2 + (n - [n])^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \log 2\pi + 2\zeta'(-1). \quad (5.10.6)$$

Тем самым, исследуя структуру некоей функции, мы получили структуру сингулярностей N -петлевой амплитуды!

Математикам известно, что дзета-функция Зельберга хорошо себя ведет, пока риманова поверхность не вырождается топологически. Например, мы обнаруживаем расходимость, при которой длина примитивной геодезической стремится к нулю. Это соответствует бесконечному растяжению «шейки» одной из ручек сферы. Тщательно исследуя поведение дзета-функции Зельберга при стремлении к нулю одной из длин примитивных геодезических, находим

$$\det^{1/2} P_1^+ P_1 \left(\frac{\det'(-\Delta_0^+)}{\int \sqrt{g} d^2 z} \right)^{-13} \sim l^{-2} e^{4\pi^2/l}, \quad (5.10.7)$$

т. е. полюс, соответствующий испусканию тахиона в вакуум.

Возможность выделить сингулярности многопетлевой амплитуды с помощью известной математической функции, а именно дзета-функции Зельберга, это крупный шаг вперед в разрешении главной проблемы, стоящей перед струнной теорией возмущений, — строгим доказательством конечности этой теории во всех порядках. Формально можно показать, что расходимости многопетлевой амплитуды могут возникнуть в том случае, когда интегрирование по пространству модулей меняет топологию римановой поверхности, скажем, когда два отверстия отделяются и образуют длинную «гусиную шею». Однако имеется много тонкостей, связанных с сокращением этих расходимостей и не вполне пока решенных. Хотя предварительные результаты обнадеживают, строгое доказательство сокращения расходимостей остается нерешенной проблемой.

§ 5.11. ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ И ГРАССМАНИАНЫ

Хотя в прояснении математической структуры многопетлевых амплитуд был достигнут огромный прогресс, в некотором смысле ощутимые результаты разочаровывают. Уже в 1970 г. было известно, что расходимости многопетлевой амплитуды, как показывают прямые вычисления, соответствуют деформациям топологии некоей римановой поверхности [4, 5]. Сложные математические методы, введенные нами, пока что не дали ответов на ключевые вопросы: можно ли строго показать,

что теория остается конечной во всех порядках теории возмущений? Если да, то как суммировать соответствующие ряды? Как вычленишь из этой теории непертурбативную информацию? Знание того, что расходимости теории могут быть выражены через дзета-функцию Зельберга [23, 29–32], – это хотя и важный результат, но он все же не решает указанных загадок. В итоге прогресс достигнут скорее в области математики, а не физики.

Начиная с этого места, можно продвигаться в одном из двух расходящихся направлений. Можно оставить в покое ряды теории возмущений и непосредственно приступить к построению *полевой теории струн*, в рамках которой можно было бы получить непертурбативную информацию. Этот традиционный подход, принятый в обычной теории точечных частиц, будет развит в нескольких последующих главах. Другой путь – попробовать найти некоторую симметрию, вроде модулярной инвариантности, которая могла бы позволить оперировать всей суммой по всем римановым поверхностям произвольного рода.

В случае обычных фейнмановских диаграмм для точечных частиц вторая из этих стратегий, по-видимому, невозможна. Симметрий здесь слишком мало, и к тому же фейнмановские диаграммы – это графы, а не многообразия. В случае же теории струн фейнмановские ряды суммируются по многообразиям, а именно по римановым поверхностям, для которых модулярная инвариантность играет ключевую роль. Поэтому допустимо предполагать, что *весь ряд теории возмущений* может оказаться математически постижимым объектом. Этот подход защищают Фридэн и Шенкер [33], которые предложили изучать свойства «универсального пространства модулей» всех римановых поверхностей, включая поверхности бесконечного рода.

Вплоть до недавнего времени эта программа была слишком амбициозной и сложной, чтобы дать значимые результаты. Однако два достижения последних лет придали ей дополнительный импульс:

- (1) Во-первых, Белявин и Книжник [34] недавно показали, что мера многопетлевой бозонной амплитуды – это просто абсолютное значение некоторой $(3g - 3)$ -формы. Это называется «голоморфной факторизацией». В принципе, она может позволить выписать многопетлевую меру простым рассмотрением полученного выражения! На практике, однако, существуют определенные трудности в задании параметризации матрицы периодов при числе петель свыше трех. Это называется проблемой Шоттки. Голоморфная факторизация сделала вычисления меры для двух- и трехпетлевых амплитуд почти тривиальным, но проблема Шоттки затрудняет выписывание многопетлевой меры.
- (2) Во-вторых, в 1984 г. математики наконец решили проблему Шоттки. Тем самым главное препятствие для применения голоморфной факторизации, по-видимому, устранено. Кроме того, решение проблемы Шоттки дает нам даже еще более мощный инструмент. Оно позволяет описать некое бесконечномерное пространство, названное

грассманианом Gg , в котором все римановы поверхности рода g рассматриваются как отдельные точки [35–37]. Тем самым изучение свойств точек грассманиана может позволить манипулировать набором всех диаграмм теории возмущений как одним объектом.

(Хотя грассманиан, наконец, обеспечивает концептуальную схему для трактовки всего ряда теории возмущений как единого целого, мы по-прежнему не знаем, как суммировать этот ряд. Например, фазовое пространство сводит множество всех возможных положений и импульсов частицы к набору точек. Так, фазовое пространство, в принципе, содержит все возможные движения всех возможных частиц во Вселенной. Однако это говорит все и не говорит ничего. Нам по-прежнему приходится налагать уравнения движения и граничные условия для извлечения любой значимой информации из фазового пространства. То же самое относится и к грассманиану.)

Для выполнения этой грандиозной программы необходимо в полной мере использовать модулярные преобразования римановых поверхностей рода g . Особенно важна группа классов отображений MCG , сводящаяся к модулярной группе $SL(2, Z)$ для тора. Нам нужен способ изучения группы классов отображений для поверхностей произвольного рода. Ключом к нему послужит построение тэта-функций, определенных на римановых поверхностях произвольного рода. Этот подход отличается от метода Шоттки, который рассматривался в разд. 5.6: там модулярная инвариантность не была столь очевидна.

На рис. 5.12 были показаны a - и b -циклы для произвольной замкнутой римановой поверхности, которые мы назвали каноническим гомологическим базисом. Пусть антисимметрический символ (a, b) обозначает, пересекаются ли эти циклы или нет. Он равен 0, если они не пересекаются, и равен ± 1 в противном случае. Рассмотрим к примеру тор, у которого есть только один a -цикл и один b -цикл. Заметим, что (a, b) равен 1, поскольку эти циклы пересекаются, но (a, a) равен 0. Итак, четыре возможных комбинации для тора образуют следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} (a, a) = (b, b) = 0, \\ (a, b) = -(b, a) = 1. \end{cases} \quad (5.11.1)$$

Элементы группы классов отображений не изменяют эту матрицу пересечений. Однако нам известно, что группа, относительно действия которой эта матрица инвариантна, есть $Sp(2, Z)$. (См. Приложение.) Для описания элементов группы $Sp(2, Z)$ рассмотрим твист Дена D_a , порожденный разрезом поверхности вдоль a -цикла, поворотом разреза на 2π и склеиванием поверхности заново. Под действием твиста Дена b -цикл превращается в сумму a - и b -цикла (см. рис. 5.13). Итак,

$$D_a(a) = a; \quad D_a(b) = a + b. \quad (5.11.2)$$

Представим теперь это на матричном языке. Пусть твист Дена действует на вектор-столбец $[a, b]$. Тогда твист Дена можно символически пред-

ставить как

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11.3)$$

Аналогично мы можем описать группу классов отображений для двухпетлевой поверхности, взяв твисты Дена вдоль циклов a_1, a_2, b_1, b_2 , а также вдоль цикла $a_1^{-1}a_2$, являющегося окружностью, окружающей оба отверстия. С помощью тех же рассуждений можно показать, что твисты Дена, действующие на вектор-столбец $[a_1, b_1, a_2, b_2]$ могут быть представлены в следующем виде [38]:

$$\begin{aligned} D_{a_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & D_{b_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ D_{a_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & D_{b_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ D_{a_1^{-1}a_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11.4)$$

Теперь рассмотрим замкнутую риманову поверхность произвольного рода. Ее матрица пересечений может быть представлена в виде

$$\begin{cases} (a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0, \\ (a_i, b_j) = -(b_i, a_j) = \delta_{ij}. \end{cases} \quad (5.11.5)$$

Это не что иное, как блочно-диагональная матрица, каждый блок которой имеет вид (5.1.11). Группа, сохраняющая эту матрицу неизменной, есть $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Поэтому можно было бы подумать, что группа классов отображений совпадает с группой $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Это не совсем так. Существуют также твисты Дена D_c вокруг циклов, которые гомологически тривиальны и не преобразуют ни a -, ни b -циклов. Поэтому они представляются в используемом нами базисе единичной матрицей. Тем не менее эти твисты Дена являются законными глобальными диффеоморфизмами, которые должны быть включены в группу классов отображений. Эта подгруппа называется группой Торелли T , и, следовательно, мы получаем окончательно желаемый результат:

$$\frac{\text{MCG}}{T} = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}). \quad (5.11.6)$$

(К счастью, действие группы Торелли на спиновые структуры тривиально, так что мы опускаем дальнейшее обсуждение этой темы.)

Далее мы намерены описать матрицу периодов для римановой поверхности и ее преобразования под действием $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. В дополнение к $2g$ циклам, которые мы можем найти для римановой поверхности, мы можем выписать для нее $2g$ независимых гармонических 1-форм ω_i и $\bar{\omega}_i$, (см. Приложение). Поскольку число циклов совпадает с числом 1-форм (в силу теоремы Ходжа – де Рама), то мы всегда можем нормировать интегрирование по a -циклам таким образом, чтобы

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \quad (5.11.7)$$

В общем случае интегрирование по b -циклам даст квадратную матрицу размера

$$\int_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij}, \quad (5.11.8)$$

называемую матрицей периодов и обобщающую переменную τ , введенную для однопетлевой амплитуды в (5.5.2); она совпадает с матрицей периодов, введенной в (5.6.31) для многопетлевой амплитуды. Весьма просто показывается, что матрица периодов симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. В общем случае $(1/2)g(g+1)$ элементов симметричной $(g \times g)$ -матрицы (с положительно определенной мнимой частью) порождают пространство, называемое *верхней полуплоскостью Зигеля*.

Преимущество введения матрицы периодов состоит в том, что две неэквивалентные римановы поверхности могут иметь одну и ту же Ω_{ij} ; это называется теоремой Торелли. Поэтому с точностью до преобразований группы $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ матрица периодов дает удобный способ охарактеризовать различные римановы поверхности. Под действием преобразований группы $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ матрица периодов преобразуется как

$$\Omega' = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}, \quad (5.11.9)$$

где A, B, C, D суть симплектические $(g \times g)$ -матрицы. Итак, две разные матрицы периодов могут описывать одну и ту же риманову поверхность, если они связаны преобразованием из группы $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.

Теперь, когда мы располагаем математическим описанием группы классов отображений через группу $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, определенную на твистах Дена, наша следующая задача – выписать функции, определенные на римановой поверхности с g ручками. Выше мы показали, что однопетлевая амплитуда описывается через квазидваждыпериодическую тэта-функцию Θ . Теперь мы намерены выписать обобщенные тэта-функции, обладающие определенными свойствами периодичности и заданные на поверхности с g ручками.

Если взять однопетлевую тэта-функцию и потребовать, чтобы она обладала этими свойствами периодичности на римановой поверхности с g ручками, мы естественным образом добавляем дополнительный набор бесконечных членов к суммированию. В конечном счете эта сумма

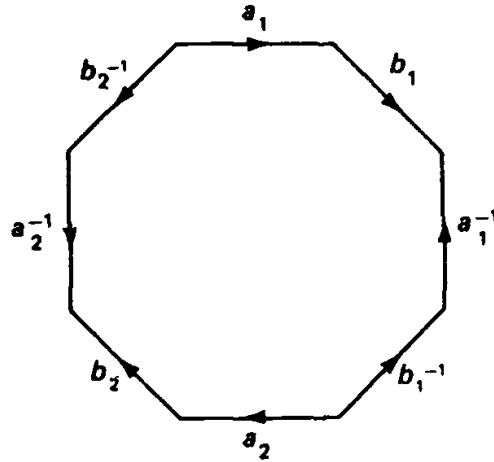


Рис. 5.14. Канонические гомологические циклы римановой поверхности рода 2. Чтобы получить эту фигуру, нужно нарисовать на сфере с двумя ручками или двумя дырками гомологические циклы a и b , сделать разрезы по линиям, образующим циклы, а затем развернуть поверхность на плоскость. Преимущество такого базиса состоит в том, что гомологические циклы поверхности произвольного рода можно представить в виде многоугольника.

принимает вид [39, 40]

$$\Theta(\mathbf{z}|\Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi \mathbf{n} \cdot \Omega \cdot \mathbf{n} + 2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}}, \quad (5.11.10)$$

где суммирование по вектору \mathbf{n} производится на g -мерной решетке. Тэта-функция определяется не на плоскости комплексной переменной z , а на векторах \mathbf{z} , определенных выражением

$$\mathbf{z} = \int_{p_0}^z \omega, \quad (5.11.11)$$

где p_0 — произвольная точка нашей поверхности. Поскольку у ω имеется g компонент ω_i , то \mathbf{z} также является вектором с g компонентами z_i .

Тэта-функции со спиновыми структурами тоже могут быть построены. В случае тора мы убедились, что в результате параллельного переноса спинора вдоль прямоугольного контура он приобретает фазу, равную $+1$ или -1 , в зависимости от того, был ли он периодическим или антипериодическим. Подобным образом, риманова поверхность рода g может быть представлена многоугольником с $4g$ сторонами (рис. 5.14). Для описания параллельного переноса спинора вдоль периметра этого многоугольника разными способами теперь потребуется 2^{2g} фаз. Набор характеристик $[\alpha] = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ определяет спиновую структуру этого многообразия.

Теперь можно определить обобщенную тэта-функцию со спиновой

структурой:

$$\begin{aligned}\Theta[\alpha](z|\Omega) &= \sum_{n \in Z^g} e^{i\pi(n+a)\Omega(n+a) + 2\pi i(n+a)(z+b)} \\ &= e^{i\pi a\Omega a + 2\pi i a(z+b)} \Theta(z + \Omega a + b|\Omega).\end{aligned}\quad (5.11.12)$$

Оказывается, что эта функция периодична с точностью до фазы при сдвиге по решетке:

$$\Theta[\alpha](z + \Omega \cdot n + m|\Omega) = e^{2\pi i a m - i\pi n \Omega n - 2\pi i n(z+b)} \Theta[\alpha](z|\Omega). \quad (5.11.13)$$

При замене $z \rightarrow -z$ тэта-функция преобразуется по формуле

$$\Theta[\alpha](-z|\Omega) = (-1)^{4a \cdot b} \Theta[\alpha](z|\Omega). \quad (5.11.14)$$

Поэтому, как мы это сделали для однопетлевой функции в (5.9.7), спиновые структуры можно разбить на четные и нечетные в зависимости от их поведения при замене $z \rightarrow -z$. Оказывается, что на римановой поверхности рода g имеется $2^{g-1}(2^g - 1)$ нечетных и $2^{g-1}(2^g + 1)$ четных спиновых структур.

Теперь можно непосредственно вычислить, как эти обобщенные тэта-функции преобразуются отображением (5.11.9) из группы классов отображений. Под действием $\text{Sp}(2g, Z)$, как нетрудно убедиться,

$$\Theta[\alpha](z'|\Omega') = \varepsilon e^{i\pi\varphi} \det(C\Omega + D)^{1/2} \Theta[\alpha](z|\Omega), \quad (5.11.15)$$

где

$$z' = (C\Omega + D)^{-1} \cdot z, \quad (5.11.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (CD^T)_d \\ (AB^T)_d \end{bmatrix}, \quad (5.11.17)$$

а фазовый множитель дается формулой

$$\varphi = \mathbf{a}D^T \mathbf{b}a + \mathbf{b}C^T \mathbf{a}b - 2\mathbf{a}B^T \mathbf{c}b - (\mathbf{a}D^T - \mathbf{b}C^T)(AB^T)_d.$$

Здесь T обозначает транспонирование, а d -взятие диагонального элемента. Символ ε обозначает корень восьмой степени из единицы (с одним ограничением, которое здесь несущественно).

После того как мы определили на римановой поверхности тэта-функции с требуемыми свойствами периодичности, следующая задача состоит в том, чтобы действительно найти меру для многопетлевой амплитуды. В этом нам очень поможет замечательный результат Белявина и Книжника [34], состоящий в том, что мерой многопетлевой амплитуды служит просто квадрат некоторой голоморфной функции (с точностью до нулевых мод):

$$\text{Голоморфная факторизация: } z = \int_F \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{(\det \text{Im } \Omega)^{13}}. \quad (5.11.18)$$

Здесь F -фундаментальная область римановой поверхности, η -это

($3g - 3$)-форма

$$\eta = \prod_{i=1}^{3g-3} dy_i F(y). \quad (5.11.19)$$

В последнем выражении y_i представляет некоторую параметризацию параметров Тейхмюллера, а $F(y)$ – голоморфная функция, не имеющая нулей и имеющая полюсы второго порядка в точках границы, в которых поверхность вырождается. Легко проверить, например, что однопетлевая функция (5.5.4) обладает этими свойствами (с точностью до членов, отвечающих нулевым модам).

На однопетлевом уровне утверждение о голоморфной факторизации интуитивно очевидно. Оно просто означает, что замкнутая петля является произведением мод струны, движущихся налево и направо, если пренебречь нулевыми модами. Однако доказательство этого мощного результата довольно сложно, хотя его можно вкратце изложить следующим образом. Использование методов, выведенных в предыдущих разделах, показывает, как формально записать меру многопетлевой амплитуды через параметры Тейхмюллера и сложные детерминанты. Затем можно показать, что

$$\delta \bar{\delta} \log W = (D - 26) \dots, \quad (5.11.20)$$

где W – мера с точностью до множителя, возведенная в 13-ю степень. Заметим, что правая часть – это конформная аномалия, которая обращается в нуль в 26-мерии. Поэтому в 26-мерном пространстве $\delta \bar{\delta} \log W = 0$, а в этом случае мера может быть записана как абсолютное значение некоторой голоморфной функции $|F|^2$. При любой другой размерности существует препятствие для голоморфной факторизации. Тогда мы будем говорить, что имеется аналитическая аномалия.

Замечателен тот факт, что условия, налагаемые на F , по-видимому, достаточно сильны, чтобы однозначно фиксировать меру для всех многопетлевых амплитуд [41–61]. Этот результат необычайно мощный, и он может позволить нам выписать меру многопетлевой амплитуды непосредственным рассмотрением соответствующих выражений.

Например, рассмотрим двухпетлевую функцию. Выберем в качестве параметров Тейхмюллера саму матрицу периодов, поскольку она также определяется тремя независимыми комплексными переменными. Тогда модулярной инвариантностью обладает следующая комбинация:

$$\frac{d\Omega}{(\det \operatorname{Im} \Omega)^3}. \quad (5.11.21)$$

Нам нужно найти выражение для $|F|^2 (\det \operatorname{Im} \Omega)^{-10}$. Используя результаты из теории римановых поверхностей, находим, что единственно возможный ответ дается выражением

$$\text{Двухпетлевая функция: } F = \left\{ \prod_{a, b} \Theta [d] (0 | \Omega) \right\}^{-2}. \quad (5.11.22)$$

Произведение берется по 10 четным характеристикам, таким что $4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \pmod{2}$.

Подобным образом, используя аналогичные рассуждения о голоморфных функциях, можно представить функцию F для трехпетлевой амплитуды в виде

$$\text{Трехпетлевая функция: } F = \left\{ \prod_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \Theta[\mathbf{a}](0|\Omega) \right\}^{-1/2}. \quad (5.11.23)$$

Здесь снова в качестве параметров Тейхмюллера dy_i взяты элементы матрицы периодов $d\Omega_{ij}$.

Эта простая процедура, однако, внезапно обрывается на уровне четырех петель. В общем случае симметричная матрица, определенная в верхней полуплоскости Зигеля, содержит $\frac{1}{2}g(g+1)$ элементов, тогда как число параметров Тейхмюллера равно $3g-3$. Поэтому они содержат одинаковое число элементов лишь при $g=2, 3$, что делает задание матрицы периодов для большего числа петель все более трудной задачей. Отсюда и возникает проблема Шоттки — из того факта, что набор элементов верхней полуплоскости Зигеля согласуется с набором элементов матрицы периодов лишь при $g=2, 3$. Вопрос теперь ставится так: какие условия нужно наложить на наши функции, определенные на верхней полуплоскости Зигеля, чтобы они были функциями матрицы периодов?

К счастью, математикам недавно удалось решить проблему Шоттки, что сделало возможным просто задавать матрицы периодов для произвольного g и, следовательно, описывать голоморфные функции, определенные на римановых многообразиях произвольного рода. Фактически это позволяет нам представить себе бесконечномерное пространство, называемое грассманианом, в котором римановы поверхности произвольного рода представляются точками.

То, что мы хотим получить, — это некое обобщение *операторного формализма конформной теории поля, которое было бы определено на римановом многообразии произвольного рода*. Нам нужно построить операторы, действующие на порождающую функцию [35–37], которые позволили бы нам вывести все корреляционные функции, определенные на поверхностях рода g . Начнем с определения фермионных операторов

$$\psi(z) = \sum_n \psi_n z^{-n-1/2} \quad (5.11.24)$$

с обычными антикоммутиационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m} \quad (5.11.25)$$

и билокального тока

$$J(z, w) = :\psi(z)\psi^*(w):. \quad (5.11.26)$$

Оператор тока – это диагональный элемент

$$J(z, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}. \quad (5.11.27)$$

Теперь определим порождающую функцию

$$\tau(x) = \langle 0 | e^{H(x)} g | 0 \rangle, \quad (5.11.28)$$

где

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n J_n, \quad (5.11.29)$$

а g есть элемент группы Клиффорда, задаваемый формулой

$$g = \exp \left\{ \oint_{z=\infty} dz \oint_{w=\infty} dw f(z, w) J(z, w) \right\}, \quad (5.11.30)$$

где интеграл берется по окружности бесконечного радиуса. Важно знать, что функция g зависит и от матрицы периодов Ω , и от спиновой структуры, определенной на поверхности и параметризованной характеристиками \mathbf{a} и \mathbf{b} . Таким образом, вся информация, связанная с природой римановой поверхности, содержится в функции g .

Из теории обычных континуальных интегралов для точечных частиц известно, что действие оператора $\delta/\delta J$ на генератор функции Грина порождает вставку некоего поля в функциональный интеграл. Аналогом этого служит вершинный оператор

$$v(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \log z d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^{-n} \partial_n}, \quad (5.11.31)$$

где x_n и ∂_m обладают теми же коммутационными соотношениями, что и обычные гармонические осцилляторы. По построению мы имеем тождество

$$\frac{\langle 0 | \psi(z) \psi^*(w) g | 0 \rangle}{\langle 0 | g | 0 \rangle} = \tau^{-1}(x) v(z) v^*(w) \tau(x) |_{x=0}. \quad (5.11.32)$$

Таким образом, действие вершинного оператора состоит в порождении корреляционной функции для конформной теории поля, подобно действию оператора $\delta/\delta J$ на порождающую функцию в обычной теории поля.

Теперь наложим условия, называемые уравнениями Хироты:

$$\oint_{z=\infty} dz v(z) \tau(x) v^*(z) \tau(y) = 0. \quad (5.11.33)$$

Можно показать, что уравнения Хироты тесно связаны с уравнениями иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП).

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы выписать явное выражение для $\tau(x)$ [35–37]:

$$\tau(x) = e^{\sum_{n, m \geq 0} x_n Q_{nm} x_m} \Theta[\alpha] \left(- \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n | \Omega \right), \quad (5.11.34)$$

где A_n – коэффициенты разложения матрицы периодов в степенной ряд,

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n-1} dz, \quad (5.11.35)$$

а

$$Q_{nm} = \frac{1}{2} [(m-1)! n(i-1)!]^{-1} \partial_i^m \partial_y^n \log \frac{E(t, y)}{(t-y)} \Big|_{t=y=0}. \quad (5.11.36)$$

Здесь $E(t, y)$ называется «первой формой» и является непосредственным обобщением функции $z-w$ из конформной теории поля для сферы. Фактически для z , близких к w , она ведет себя как $z-w$ даже на поверхности рода g . В явном виде она выражается формулой

$$E(z, w) = \Theta[\alpha] \left(\int_w^z \omega | \Omega \right) (h_\alpha(z) h_\alpha(w))^{1/2}, \quad (5.11.37)$$

где

$$h_\alpha(z) = \sum_i \partial_i \Theta[\alpha](0 | \Omega) \omega_i(z). \quad (5.11.38)$$

Теперь мы приходим к основному результату настоящего обсуждения. Мы нашли, что функция τ удовлетворяет уравнениям Хироты для иерархии КП тогда и только тогда, когда Ω действительно является матрицей периодов римановой поверхности рода g . Это именно то ограничение, которое мы искали. Функция Ω , имевшая размерность $1/2 g(g+1)$, теперь может быть ограничена размерностью $3g-3$ и приравнена к матрице периодов римановой поверхности рода g . Это в принципе решает проблему Шоттки (хотя результат сильно нелинеен).

В качестве дополнительного преимущества, поскольку $\tau(z)$ можно рассматривать как порождающую функцию для конформной теории поля, определенную на римановой поверхности рода g , мы можем вычислять любые корреляционные функции. Матричный элемент для двух фермионов на этой римановой поверхности дается выражением

$$\frac{\langle 0 | \psi(z) \psi^*(w) g | 0 \rangle}{\langle 0 | g | 0 \rangle} = \frac{\Theta[\alpha] \left(\int_w^z \omega | \Omega \right)}{\Theta[\alpha](0 | \Omega) E(z, w)} = P_\alpha[z, w]. \quad (5.11.39)$$

Математикам оно известно как ядро Сегё, и оно является единственным мероморфным полудифференциалом по переменным z и w с одиночным полюсом, вычет в котором равен 1 при $z=w$. Физики называют его просто двухточечной функцией. N -точечное обобщение этой функции есть

$$\begin{aligned} & \frac{\langle 0 | \psi(z_1) \psi^*(w_1) \dots \psi(z_n) \psi^*(w_n) g | 0 \rangle}{\langle 0 | g | 0 \rangle} \\ &= \prod_{i < j} E(z_i, z_j) \prod_{k < l} E(w_k, w_l) \Theta^{-1}[\alpha](0 | \Omega) \\ & \quad \times \prod_{i, k} E^{-1}(z_i, w_k) \Theta[\alpha] \left(\sum_i z_i - \sum_k w_k | \Omega \right). \end{aligned} \quad (5.11.40)$$

Существует способ проверки согласованности этих уравнений. Известно, что есть два способа вычисления N -точечной функции: или через фермионные осцилляторы, или посредством бозонизации через бозонные осцилляторы вида $e^{i\varphi}$. Например, применяя виковское разложение к N -точечной функции, можно записать ее через двухточечную в виде

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \psi(z_i) \prod_{j=1}^N \psi^*(w_j) g | 0 \rangle = \det_{i,j} P_a(z_i, w_j). \quad (5.11.41)$$

Выражение (5.11.40) можно получить с помощью бозонного представления, тогда как (5.11.41) – с помощью фермионного. К счастью, эквивалентность этих двух разных выражений была доказана Фэем [39]; это называется теоремой трисекции для сложения тэта-функций. Математическая эквивалентность указанных выражений служит еще одной проверкой нашей процедуры бозонизации.

Итак, нами развит операторный формализм для конформной теории поля, определенной на произвольной римановой поверхности. Кет-вектор $g | 0 \rangle$ представляет конкретную риманову поверхность, а применение к нему разных полевых операторов соответствует взятию матричных элементов по этой поверхности. Важно заметить, что каждый элемент $\tau(x)$, если он удовлетворяет условию Хироты для иерархии КП, теперь корректно характеризует некую риманову поверхность рода g . Тем самым каждый $\tau(x)$ определяет некоторую точку нашего грассманова многообразия, чего мы и стремились добиться.

Заметим, что мы все еще очень далеки от нашей конечной цели, т. е. от суммирования ряда теории возмущений и извлечения из него непертурбативной информации. Однако мы сделали существенный шаг в этом направлении, так как теперь мы можем описать любую риманову поверхность произвольного рода, включая ее спиновую структуру, как некую точку грассманова многообразия. Посредством этого операторного формализма мы можем по желанию порождать точки этого грассманова многообразия. Будущее покажет, насколько полезным окажется грассманово многообразие.

Необходимо, однако, отметить некоторые трудности, связанные с этим формализмом. Хотя проблема Шоттки теперь формально решена, на практике уравнения Хироты довольно сильно нелинейны, так что остается конкретно разобраться, насколько полезным будет это решение для явного построения многопетлевых амплитуд с помощью тэта-функций. Кроме того, следует отметить, что в литературе имеется некоторая путаница в вопросе об определении пространства супермодулей для амплитуд суперструн. Хотя суперсимметричное обобщение теоремы Римана – Роха отвечает на вопрос о количестве имеющихся супермодулей, но по-прежнему остается нерешенной трудная проблема явного построения этих супермодулей посредством корректно определенной процедуры. Введение в теорию супермодулей и связанные с ними вопросы можно найти в [62].

В нескольких следующих главах будет обсуждаться другой подход к теории возмущений, отличный от использования грассманова много-

образия и не требующий какой-либо информации о роде поверхности g . Фактически в этом подходе единственно возможной аппроксимацией является весь ряд теории возмущений на римановых поверхностях. Этот подход есть полевая теория струн.

Прежде чем завершить эту главу, мы должны упомянуть, что из всех до сих пор обсуждавшихся многопетлевых формализмов только формализм светового конуса может быть естественным образом выведен из полевой теории струн. Поэтому мы интуитивно предполагаем, что построение фейнмановских диаграмм в конусных координатах посредством объединения вершинных функций в S -матрицу должно дать некоторую «триангуляцию» пространства модулей. Этот результат, который был доказан в [63–64], никогда ранее не рассматривался математиками. (Вкратце, доказательство основано на построении некоторых интегралов на римановой поверхности рода g и вычислении их периодов при обходе вдоль каждой петли или ручки. Тогда можно показать, что соответствующие периоды являются чисто мнимыми, что дает модулярно инвариантное описание этой поверхности.)

Для примера на рис. 5.15 показано, как параметризовать многопетлевую поверхность посредством конусных координат, причем τ_i представляют различные времена взаимодействия при расщеплении или слиянии струны, а θ_i – «твисты» каждой струны на один полный оборот. Чтобы дополнить число параметров до требуемой для поверхности рода g величины $6g - 6$, нужно также проинтегрировать по экваториальной окружности каждого цилиндра. Итак, все $6g - 6$ параметров пространства модулей имеют естественную интерпретацию на языке физических

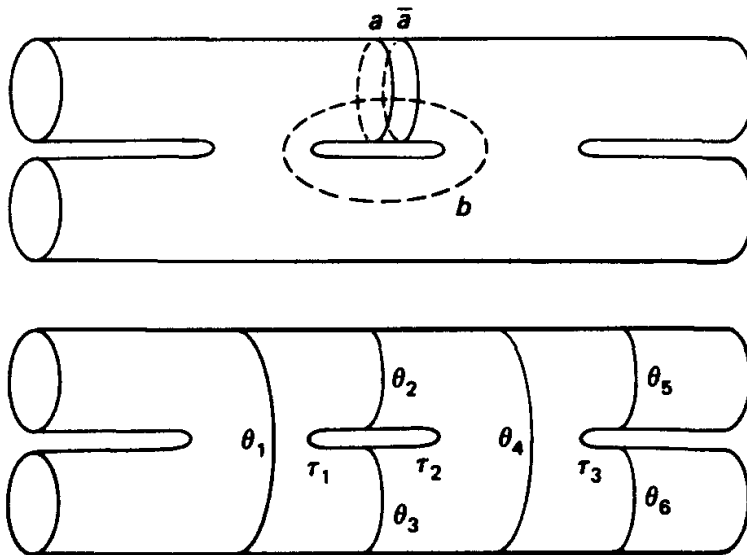


Рис. 5.15. На этом последнем рисунке показаны углы, длины и «времена», параметризующие поверхность в калибровке светового конуса. Эти параметры образуют пространство Тейхмюллера, и для параметризации каждой внутренней петли требуется шесть таких параметров. (Эти параметры автоматически дают покрытие фундаментальной модулярной области.)

параметров фейнмановской диаграммы. У формализма светового конуса есть несколько преимуществ перед описанными ранее формализмами. Во-первых, нет необходимости обрезать область интегрирования, что было обязательным для модулярной инвариантности в случае метода Шоттки и метода постоянной кривизны. Во-вторых, он легко обобщается на случай произвольного числа петель (чего нельзя сказать про метод тэта-функций). В-третьих, он унитарен и основан на физических переменных. И в-четвертых, он естественно выводится из полевой теории. Вместо того чтобы обсуждать его здесь, мы рассмотрим метод светового конуса в контексте полевой теории струн. Этой важной теме будет посвящен ряд последующих глав.

§ 5.12. РЕЗЮМЕ

Итак, мы показали, что приведение струны к унитарному виду может быть реализовано посредством уравнения унитарности, в котором N -точечная амплитуда фигурирует в качестве борновского члена:

$$\text{Im } T_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_n \langle i | T | n \rangle \langle n | T^\dagger | j \rangle. \quad (5.12.1)$$

Континуальный интеграл при этом принимает вид

$$A = \int_S DX d\mu e^{iS} \prod_{i=1}^N e^{ik_i X_i}. \quad (5.12.2)$$

Здесь проводится суммирование по всем конформно неэквивалентным поверхностям S , являющимся дисками или сферами с N отверстиями. В частности, диаграммы для открытых струн бывают трех типов: плоские, неплоские и неориентируемые (вроде листа Мёбиуса). Диаграммы для замкнутых струн бывают только двух типов – плоские и неориентируемые (вроде бутылки Клейна).

К счастью, математики уже вычислили функции Неймана для этих поверхностей. Это частные случаи автоморфных функций.

Для однопетлевой диаграммы функция Неймана выражается через

$$\begin{aligned} \ln \psi(x, w) = & \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \ln w} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(1-w^n x) + \ln(1-w^n/x) - 2 \ln(1-w^n)]. \end{aligned} \quad (5.12.3)$$

Собирая все вместе, получаем однопетлевую плоскую амплитуду

$$\begin{aligned} A_N = & \pi^{-1} \int \prod_{i=1}^{N-1} \theta(v_{i+1} - v_i) dv_i \\ & \times \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q} \right)^N f(q^2)^{-24} \prod_{i < j} (\psi_{P, ij})^{k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \quad (5.12.4)$$

Мы нашли, что у струнных диаграмм никогда не бывает ультрафиолетовых расходимостей. Бесконечное суммирование по промежуточным реджевским траекториям делает диаграммы финитными в ультрафиолетовой области. Однако в теории фейнмановских диаграмм расходимость некой диаграммы выражается локальным изменением топологии этой поверхности. Однопетлевая диаграмма открытой струны расходится, когда внутреннее отверстие стягивается в точку. Согласно конформной инвариантности, это соответствует удалению замкнутой петли с нулевым импульсом. Тем самым расходимостям соответствует испускание в вакуум тахиона или дилатона.

Структура расходимостей этих диаграмм следующая.

- (1) Открытая струна Намбу–Гото расходится как q^{-3} и q^{-1} . Последняя из этих расходимостей связана с дилатоном и, вероятно, может быть устранена перенормировкой угла наклона реджевской траектории во всех порядках. Тахионная расходимость вызывает большие трудности. При анализе непланарных графов в комплексной плоскости переменных s и t на этих диаграммах на самом деле появляются разрезы, которые сводятся к полюсам в 26-мерии. Эти полюсы соответствуют замкнутым струнам. Поэтому теория открытых струн сама по себе неполна. Замкнутые струны возникают в ней как «связанные состояния» на однопетлевом уровне.
- (2) Амплитуды замкнутых струн расходятся из-за вставок «головастиков», или энергии самодействия, на внешних линиях, лежащих на массовой поверхности.
- (3) Суперструна типа I имеет лишь полюсы порядка q^{-1} , и поэтому мы можем устранить эту расходимость посредством перенормировки угла наклона. Расходимость порядка q^{-3} никогда не возникает, поскольку бозонные и фермионные внутренние линии взаимно уничтожаются.
- (4) Суперструна типа II на самом деле конечна. Здесь отсутствуют двух- и трехточечные однопетлевые диаграммы, поэтому вставки головастиков или энергий самодействия на внешних линиях попросту запрещены.

Эти результаты легко обобщаются на N -петлевые амплитуды с использованием теории автоморфных функций. При этом можно применять несколько разных параметризаций. Первая из них дается методом группы Шоттки. Она обладает тем преимуществом, что выбор переменных осуществляется в явном виде и выводится явно факторизуемым образом посредством сшивания мультiredжевских вершин. Однако модулярная инвариантность при этом не столь очевидна. Другой способ параметризации дается методом τ -функции. В нем модулярная инвариантность встроена с самого начала. Он также легко обобщается на спиновые структуры. Недостатком этого метода является неочевидность выбора переменных. К тому же факторизация, а значит, и унитарность тоже неочевидны. Эти амплитуды просто постулируются вручную с целью удовлетворить граничные условия, а не строятся сши-

ванием вершин. В конечном счете эти методы, возможно, тождественны.

Начнем с комплексной плоскости, в которой произвольным образом вырезано $2N$ отверстий. Объединим эти отверстия в N пар и пометим их символами a_i и \bar{a}_i . Эти отверстия назовем a -циклами. Сделав разрезы вдоль линий, соединяющих между собой каждую пару a -циклов, получим b -циклы. Определим проективные операторы P_i , отображающие один из a -циклов a_i в соответствующий ему a -цикл \bar{a}_i . Теперь эти проективные операторы можно параметризовать двумя неподвижными точками z_1 и z_2 и множителем X , таким что

$$\frac{P(z) - z_1}{P(z) - z_2} = X \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (5.12.5)$$

Для открытой струны центры a -циклов лежат на вещественной оси, так же как и неподвижные точки проективных преобразований. Окончательно N -петлевая амплитуда открытой струны дается выражением

$$\begin{aligned} A_N = & \int \prod_{\alpha=1}^N d^{26} k_\alpha d\mu \prod_{\{P\}} \prod_{\{\bar{P}\}} (1 - X_{\{\bar{P}\}})^{-24} \\ & \times \prod_{1=i < j=M} (z_i - \{P\} z_j)^{k_i k_j} \prod_{\substack{\beta, \lambda=1 \\ \beta \neq \lambda}}^N dX X_\beta^{-\alpha(k_\beta) - 1} \\ & \times \prod_{i=1}^M \left(\frac{z_i - \{P\} x_\lambda^{(2)}}{z_i - \{P\} x_\lambda^{(1)}} \right)^{k_i k_\lambda} \\ & \times \left\{ \frac{x_\beta^{(1)} - \{P\} x_\lambda^{(1)} x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(1)} x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}} \right\}^{(1/2) k_\beta k_\lambda}, \end{aligned} \quad (5.12.6)$$

где

$$d\mu = \prod_{i=1}^M dz_i dV_{abc}^{-1} \prod_{\alpha=1}^N dx_\alpha^{(1)} dx_\alpha^{(2)} (x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)})^{-2}. \quad (5.12.7)$$

Здесь латинскими буквами обозначены внешние линии, а греческими — петли. Заметим, что область интегрирования лежит между предельными точками множества $\{P\}$. Необходимо, чтобы эти предельные точки образовывали дискретную область на вещественной оси. Итак, нам необходимы группы Шоттки.

N -петлевую амплитуду можно непосредственно переформулировать на языке римановых поверхностей, если вместо действия Намбу–Гото воспользоваться действием Полякова. В интеграл войдут несколько новых членов:

(1) Множитель Δ_{FP} , возникающий из детерминанта Фаддеева–Попова, который можно переписать в виде

$$\det^{1/2} P_1^\dagger P_1. \quad (5.12.8)$$

(2) Множитель, возникающий из интегрирования по переменной X :

$$\int DX \exp \left(- \int d^2 z \sqrt{gg^{ab}} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right) = \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det'(-\nabla^2) \right)^{-(1/2)D}. \quad (5.12.9)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{-1}{\sqrt{g}} \partial_m \sqrt{gg^{mn}} \partial_n. \quad (5.12.10)$$

(3) В интеграл нужно добавить параметры Тейхмюллера t_i . Чтобы вычислить этот последний фактор, запишем

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} = & [\nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - (\nabla_c \delta v^c) g_{ab}] \\ & + (\nabla_c \delta v^c) g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t_i T^i, \end{aligned} \quad (5.12.11)$$

где t_i – параметры Тейхмюллера, а

$$T^i = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t^i} - (\text{след}). \quad (5.12.12)$$

Это можно записать в виде

$$\delta g_{ab} = P_1 (\delta v)_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i \partial_i g_{ab}, \quad (5.12.13)$$

где

$$P_1 (\delta v)_{ab} = \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - g_{ab} \nabla_c \delta v^c. \quad (5.12.14)$$

Произведем замену переменных:

$$T^i = \psi^a (\psi^a, T^i) + P_1 v^i, \quad (5.12.15)$$

где

$$v^i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T^i, \quad (5.12.16)$$

$$(\psi^a, T^i) = \int d^2 z \sqrt{gg^{bc}} g^{de} T_{ba}^i \psi_{ce}^a. \quad (5.12.17)$$

Наш окончательный результат для меры таков:

$$\begin{aligned} Dg_{ab} \Omega_{\text{Diff}}^{-1} \Omega_{\text{Weyl}}^{-1} &= Dv_a \Omega_{\text{Diff}}^{-1} D\sigma \Omega_{\text{Weyl}}^{-1} \\ &\times D t^i \det^{1/2} (P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \\ &\times \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det'(-\nabla^2) \right)^{-(1/2)D}. \end{aligned} \quad (5.12.18)$$

Огромное преимущество этого подхода к многопетлевым амплитудам состоит в том, что мы можем использовать мощь методов анализа римановых поверхностей для исследования расходимостей

амплитуды. В частности, мы можем исследовать особенности дзета-функции Сельберга:

$$z(s) = \prod_{\substack{\text{примитивные } p \\ p=0}}^{\infty} [1 - v(\gamma) e^{-(s+p)l}]. \quad (5.12.19)$$

Исследование функций Сельберга подтверждает вывод о том, что наша мера имеет особенности в тех точках, в которых топология поверхности рода g вырождается.

К счастью, построение меры на многопетлевых поверхностях очень сильно облегчается теоремой о голоморфной факторизации, которая утверждает, что мера равна

$$z = \int_F \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{(\det \operatorname{Im} \Omega)^{13}}, \quad (5.12.20)$$

где η – голоморфная $(3g - 3)$ -форма. Эта формула станет интуитивно понятной, если считать равными вклады мод, движущихся налево и направо (кроме нулевых мод.) Единственная трудность доказательства заключается в наличии некой аномалии (называемой аналитической аномалией), исчезающей в 26-мерном случае. Используя этот результат, мы можем, в сущности, угадать ответ для подынтегрального выражения, отвечающего многопетлевой амплитуде, поскольку функция с правильной периодичностью и структурой голоморфных особенностей должна быть единственной.

Другой метод, основанный на тэта-функциях, использует модулярность этих периодических функций с самого начала. Для поверхностей рода g имеется 2^{2g} спиновых структур, соответствующих всем возможным периодическим и антипериодическим граничным условиям на этой поверхности. Наша задача тем самым состоит в том, чтобы построить функции Неймана на этой поверхности со спиновой структурой, обладающие нужными особенностями и периодичностью! Ответ выражен в виде двух функций, а именно обобщенной тэта-функции и простой формы. Тэта-функция дается выражением :

$$\Theta[\alpha](z|\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi(n+\alpha) \cdot \Omega \cdot (n+\alpha) + 2\pi i(n+\alpha) \cdot (z+b)}, \quad (5.12.21)$$

где α представляет спиновую структуру, а простая форма (которая является голоморфным обобщением выражения $z-w$, отвечающего сфере) дается выражением

$$E(z, w) = \Theta[\alpha] \left(\int_w^z \omega | \Omega \right) (h_\alpha(z) h_\alpha(w))^{-1/2}, \quad (5.12.22)$$

где

$$h_\alpha = \sum_i \partial_i \Theta[\alpha](0|\Omega) \omega_i(z). \quad (5.12.23)$$

Располагая тэта-функцией и простой формой, мы можем вычислить все возможные функции Грина для бозонных и фермионных операторов на

римановых поверхностях. Поэтому мы можем построить новую конформную теорию поля на римановых поверхностях, а не просто на сфере. Например, двухточечная функция двух фермионов дается ядром Сегё:

$$\frac{\Theta[\alpha] \left(\int_w^z \omega | \Omega \right)}{\Theta[\alpha](0 | \Omega) E(z, w)} \quad (5.12.24)$$

Одна из трудностей решения многопетлевой задачи состоит в выборе правильных переменных. Идеальным был бы, например, выбор в качестве переменной матрицы периодов Ω . Трудность, однако, состоит в том, что у квадратной матрицы, такой как матрица периодов, есть $(1/2)g(g+1)$ независимых координат, тогда как число параметров Тейхмюллера равно всего лишь $3g-3$ комплексных чисел. В двух- и трехпетлевом случае эти числа совпадают, но для высших петель это не так. В этом и состоит проблема Шоттки, которая была решена лишь недавно. Ее решение позволило использовать грассманианы для описания всего ряда теории возмущений. Каждая многопетлевая амплитуда со спиновой структурой представляет одну точку грассмана многообразия, так что мы можем (по крайней мере, в принципе) манипулировать *всем* рядом теории возмущений на римановых поверхностях как единым объектом. Это, в свою очередь, может в конечном счете дать нам непertурбативную информацию о теории суперструн.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kikkawa K., Sakita B., Virasoro M. B. Phys. Rev. 184, 1701 (1969).
- [2] Kaku M., Yu L. P. Phys. Lett. 33B, 166 (1970).
- [3] Kaku M., Yu L. P. Phys. Rev. D3, 2992, 3007 (1971).
- [4] Kaku M., Scherk J. Phys. Rev. D3, 430 (1971).
- [5] Kaku M., Scherk J. Phys. Rev. D3, 2000 (1971).
- [6] Alessandrini V. Nuovo Cim. 2A, 321 (1971).
- [7] Lovelace C. Phys. Lett. 32B, 703 (1970).
- [8] Lovelace C. Phys. Lett. 32B, 203 (1971).
- [9] Hsue C. S., Sakita B., Virasoro M. A. Phys. Rev. D2, 2857 (1970).
- [10] Gervais J.-L., Sakita B. D4, 2291 (1971); Nucl. Phys. B34, 632 (1971); Phys. Rev. Lett. 30, 716 (1973).
- [11] Fairlie D. B., Nielsen H. B. Nucl. Phys. B20, 637 (1970).
- [12] Burnside W. Proc. London Math. Soc. 23, 49 (1981).
- [13] Amati D., Bouchiat C., Gervais J.-L. Nuovo Cim. Lett. 2, 399 (1969).
- [14] Bardakci K., Halpern M. W., Shapiro J. A. Phys. Rev. 185, 1910 (1969).
- [15] Kaku M., Thorn C. B. Phys. Rev. 1D, 2860 (1970).
- [16] Cremer E., Scherk J. Nucl. Phys. B50, 222 (1972).
- [17] Lovelace C. Phys. Lett. 34B, 500 (1971).
- [18] Neveu A., Scherk J. Phys. Rev. D1, 2355 (1970).
- [19] Schwarz J. Phys. Rep. 13C, 259 (1974).
- [20] Shapiro J. A. Phys. Rev. D5, 1945 (1973).
- [21] Mandelstam S. In: Unified String Theories (edited by M. B. Green and D. Gross). World Scientific, Singapore, 1986.

- [22] Alvarez O. Nucl. Phys. **B216**, 125 (1983).
- [23] D'Hoker E., Phong D. H. Nucl. Phys. **B269**, 205 (1986).
- [24] Polykov A. M. Phys. Lett. **103B**, 207, 211 (1981).
- [25] Polchinski J. Comm. Math. Phys. **104**, 37 (1986).
- [26] Gliozzi F., Scherk J., Olive D. Nucl. Phys. **B122**, 253 (1977).
- [27] Seiberg N., Witten E. Nucl. Phys. **B276**, 272 (1986).
- [28] D'Hoker E., Phong D. H. Nucl. Phys. **B278**, 225 (1986); Comm. Math. Phys. **104**, 537 (1986).
- [29] Gilbert G. Nucl. Phys. **B277**, 102 (1986).
- [30] Namazie M. A., Rajeev S. Nucl. Phys. **B277**, 332 (1986).
- [31] Steiner F., Phys. Lett. **188B**, 447 (1987).
- [32] Selberg A. J. Indian Math. Soc. **20**, 47 (1956).
- [33] Friedan D., Schenker S. Phys. Lett. **B175**, 287 (1986); Nucl. Phys. **B281**, 509 (1987).
- [34] Belavin A. A., Knizhnik V. G. Phys. Lett. **168B**, 201 (1986).
- [35] Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H. Mod. Phys. Lett **A2**, 119 (1987).
- [36] Alvarez-Gaumé L., Gomez C., Reina C. Phys. Lett. **55B**, 55 (1987).
- [37] Vafa C. Phys. Lett. **190B**, 47 (1987).
- [38] Alvarez-Gaumé L., Moore G., Vafa C. Comm. Math. Phys. **106**, 1 (1986).
- [39] Fay J. Theta Funktionen on Riemann Surfaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 352, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [40] Mumford D. Tata Lectures on Theta, Birkhauser, Basel, 1983.
- [41] Moore G., Nelson P. Nucl. Phys. **B266**, 58 (1986).
- [42] Nelson P. Harvard preprint HUTP-86 A047 (1986).
- [43] Manin Yu. Phys. Lett. **172B**, 184 (1986).
- [44] Verlinde E., Verlinde H. Nucl. Phys. **B288**, 357 (1987).
- [45] Miki K. Nucl. Phys. **B291**, 349 (1987).
- [46] Moore G., Harris P., Nelson P., Singer I. Phys. Lett **178B**, 167 (1986).
- [47] Namazie M. A., Narain K. S., Sarmadi M. H. Phys. Lett. **177B**, 329 (1986).
- [48] Belavin A., Knizhnik V., Morosov A., Perelomov A. Phys. Lett **177B**, 324 (1986).
- [49] Moore G. Phys. Lett. **176B**, 369 (1986).
- [50] Kato A., Matso Y., Odake S. Phys. Lett **179B**, 241 (1986).
- [51] Sonoda H. Phys. Lett **178B**, 390 (1986).
- [52] Lechtenfeld O. CCNY preprint (1987).
- [53] Verlinde E., Verlinde H. Phys. Lett **192B**, (1987).
- [54] Morozov A. Phys. Lett. **184B**, 171, 177 (1987). ;
- [55] Gliozzi F. Phys. Lett. **194B**, 30 (1987).
- [56] Bonini M., Iengo R. Phys. Lett. **191B**, 56 (1987).
- [57] Restuccia A., Taylor J. G. Phys. Lett. **187B**, 267, 273 (1987).
- [58] Steiner F. Phys. Lett **188B**, 447 (1987).
- [59] Sonoda H. Phys. Lett. **184B**, 336 (1987).
- [60] Parkes A. Phys. Lett. **184B**, 19 (1987).
- [61] Morozov A., Perelomov A. Phys. Lett. **183B**, 296 (1987).
- [62] Attkick J. J., Moore G., Sen A. Nucl. Phys. **B308**, 1 (1988).
- [63] Giddings S., Wolpert S. Comm. Math. Phys. **109**, 177 (1987).
- [64] D'Hoker E., Giddings S. B. Nucl. Phys. **B291**, 90 (1987).

Часть II

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ПОИСКИ ГЕОМЕТРИИ

Глава 6

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

§ 6.1. ПОЧЕМУ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ СТРУН?

В части I мы неоднократно видели, что первично квантованная теория представляется довольно разобщенной и является набором правил, которые часто выглядят очень произвольными. Выбор вершинных функций, меры интегрирования, счет диаграмм и т. д. – все это было, по существу, введено в теорию «руками». В итоге первично квантованная теория страдает следующими явными недостатками:

- (1) Взаимодействия должны быть введены *ad hoc*, без какого-либо строгого общего обоснования.
- (2) Нелегко показать унитарность теории. Не существует эрмитова гамильтониана, из которого можно вывести теорию взаимодействий.
- (3) Теория формулируется в рамках теории возмущений и дает ответы только на «массовой поверхности», что делает затруднительным вычисление непертурбативных эффектов.

Однако самое важное заключается в том, что первично квантованная струнная теория не подходит для вычисления динамического нарушения симметрии. К сожалению, во всех порядках теории возмущений по константе связи размерность пространства – времени, по-видимому, является стабильной, а поэтому надежды, связанные с возможностью динамического нарушения симметрии от 26-мерного или 10-мерного пространства – времени к четырехмерному, очень малы. Таким образом, последовательное получение феноменологических следствий в рамках первично квантованного подхода представляется весьма сомнительным. Первично квантованная теория не может также выделить истинный вакуум среди набора классических вакуумов, допустимых для данной модели, несмотря на то, что она фактически способна воспроизвести десятки тысяч классических решений.

Таким образом, в части II мы обращаемся к *полевой теории струн* [1–5] как наиболее перспективной с точки зрения построения непертурбативного формализма, который позволит обнаружить истинный вакуум.

На первый взгляд метод вторичного квантования кажется совершенно излишним при наличии первично квантованного подхода. С точки

зрения теории возмущений мы просто воспроизводим те же диаграммы, что и при первичном квантовании. Однако вторично квантованная полевая теория обладает несколькими важными преимуществами:

- (1) Взаимодействия вводятся через новую калибровочную группу, т. е. имеется теоретико-групповое обоснование для введения взаимодействия в струнную теорию.
- (2) Теория явно унитарна благодаря эрмитовости гамильтониана. Все веса диаграмм фиксируются с самого начала.
- (3) И наконец, мы в принципе имеем метод для вычисления динамических эффектов в теории.

Некоторое время были серьезные опасения, что полевая теория струн не имеет права на существование как противоречащая фундаментальным принципам квантовой механики. Аргументы сводились в основном к следующим:

- (1) Полевая теория струн как нелокальная теория должна была бы изобиловать непреодолимыми трудностями, такими, как нарушение принципа причинности.
- (2) Полевая теория струн с необходимостью формулируется вне «массовой поверхности», в то время как важнейшие свойства модели Венециано, вроде циклической симметрии, справедливы только на массовой поверхности. Поэтому казалось, что полевая теория не способна воспроизвести дуальную модель.
- (3) Полевая теория не могла бы быть одновременно лоренц-инвариантной и унитарной, поскольку процедура квантования, которая обеспечила бы как лоренц-инвариантность, так и унитарность вне массовой поверхности, отсутствует. Для первично квантованной теории такой проблемы не возникает, так как эта теория формулируется на «массовой поверхности». Напротив, полевая теория струн представляет собой теорию вне массовой поверхности и, следовательно, должна нарушать либо лоренц-инвариантность, либо унитарность.
- (4) И, наконец, самое важное. Полевая теория струн страдала бы от нарушений унитарности, вызванных двойным счетом диаграмм. В полевых теориях суммы по s - и t -полюсам вычисляются отдельно, что нарушает дуальность.

К счастью, полевая теория струн, отвечающая на каждое из этих четырех возражений, на самом деле возможна.

Во-первых, полевая теория струн не нарушает принцип причинности, потому что взаимодействия, такие как распад струны, происходят мгновенно. Кроме того, информация, касающаяся топологии струны, распространяется вдоль нее со скоростью, не превышающей скорости света. Другими словами, струнная теория мультилокальна. *Таким образом, полевая теория струн является единственной известной нелокальной полевой теорией, согласующейся с принципами квантовой механики.*

Во-вторых, полевая теория струн приводит к функциям Грина, которые обязательно нарушают некоторые важные свойства модели

Венециано. Но это несущественно, так как любой матричный элемент может быть измерен только на массовой поверхности, а на ней эти функции Грина правильно воспроизводят модель Венециано.

В-третьих, BRST-метод явно разрушает унитарность теории с духами Фаддеева–Попова вне массовой поверхности. Это, однако, не имеет значения, потому что на массовой поверхности духи Фаддеева–Попова сокращаются с унитарными духами. Подобная ситуация имеет место в формализме светового конуса, который вне массовой поверхности сохраняет унитарность, но нарушает лоренц-инвариантность. На массовой поверхности такая теория как лоренц-инвариантна, так и унитарна, а поэтому вполне корректна.

Что касается четвертого возражения, то струнная теория действительно нарушает дуальность вне массовой поверхности, однако на массовой поверхности дуальность восстанавливается. Например, для полевой теории струн в калибровке светового конуса мы суммируем отдельно по s - и t -канальным полюсам фейнмановский ряд

$$A = \sum_I \frac{A_I}{s - M_I^2} + \sum_t \frac{A_t}{t - M_t^2} + \dots \quad (6.1.1)$$

Такое разбиение амплитуды рассеяния на две отдельные s - и t -канальные части, согласующиеся со струнной интерпретацией (см. рис. 6.1), решает проблему унитарности. При этом явная дуальность оказывается нарушенной. Восстанавливается она только на уровне s -матрицы, т. е. после суммирования по всем фейнмановским диаграммам. Такой подход обеспечивает унитарность струнной полевой теории ценой нарушения ее явной дуальности.

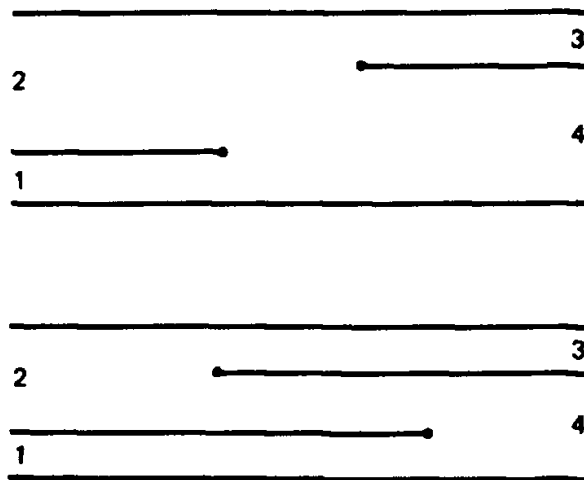


Рис. 6.1. Поверхности полевой теории в калибровке светового конуса. Как и в любой теории поля, мы сейчас суммируем по s - и t -канальным графам отдельно, нарушая дуальность. Только сумма этих двух графов является дуальной. Следовательно, полевая теория струн в калибровке светового конуса решает проблему «двойного учета»: для каждой диаграммы дуальность явно нарушается. Дуальна только сумма (S -матрица).

Для замкнутых струн мы также обнаруживаем, что индивидуальные фейнмановские диаграммы нарушают явную модулярную инвариантность. Модулярно-инвариантной оказывается только их сумма. Таким образом, полевая теория в калибровке светового конуса явно унитарна (потому что гамильтониан явно эрмитов), но цена, которую мы платим за это, есть отсутствие явной модулярной инвариантности:

Первичное квантование (модулярная инвариантность) → Вторичное квантование (унитарность).

Мы начнем обсуждение вторичного квантования, отправляясь от формализма светового конуса [1], так как этот формализм разработан наиболее плотно. К тому же это позволит проследить историческое развитие теории. Однако так как в данном подходе калибровка фиксирована и все локальные калибровочные степени свободы полностью устранены, то в нем нет и следа от элегантного теоретико-группового формализма, из которого можно было бы вывести струнную теорию. Начиная в педагогических целях изложение с полевой теории в калибровке светового конуса, мы будем помнить о том, что только точная геометрическая теория, подобная предложенной в гл. 8, может вывести всю теорию целиком из основных постулатов.

Мы вновь начнем с полевой теории точечных частиц и проследим, как Фейнман вывел уравнение Шрёдингера из первично квантованной теории.

§ 6.2 ВЫВОД ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ

В гл. 1 мы начали с континуального интеграла для точечной частицы, движущейся из точки x_i в x_j . Каждому пути, соединяющему эти две точки, был поставлен в соответствие фазовый фактор e^{iS} . Фундаментальный постулат квантовой механики состоит в том, что амплитуда вероятности перехода частицы между этими двумя точками представляет собой сумму фаз, связанных с каждым возможным путем. После виковского поворота мы имеем

$$\Delta_{ij} = \int_{x_i}^{x_j} Dx e^{-S}, \quad (6.2.1)$$

где

$$S = \int_{t_i}^{t_j} dt \left(\frac{1}{2} m v_t^2 - V(x) \right). \quad (6.2.2)$$

Эволюция квантовомеханической волны по предположению подчиняется принципу Гюйгенса:

$$\psi(x_j, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x_j, t_j; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i. \quad (6.2.3)$$

Сейчас нам бы хотелось вычислить вариацию этой волновой функции

при малом смещении ε во времени. Ранее мы нашли, что пропагатор равен

$$\Delta_{ij} = \left[\frac{m}{2\pi(t_j - t_i)} \right] \exp \frac{\frac{1}{2} im(x_j - x_i)^2}{t_j - t_i}. \quad (6.2.4)$$

Для малого временного интервала $\varepsilon = t_j - t_i$, следовательно, получаем

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} \exp \left\{ \frac{im(x - y)^2}{2\varepsilon} \right\} \psi(y, t) dy, \quad (6.2.5)$$

где A — нормировочная константа. Напомним, что временной интервал ε очень мал, в то время как расстояние между x и y необязательно является малым.

Мы хотим сохранить только члены первого порядка по ε . Если мы полагаем $y = x + \eta$, где η необязательно малое число, то интеграл принимает вид

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} e^{im\eta^2/2\varepsilon} \psi(x + \eta, t) d\eta. \quad (6.2.6)$$

Важно отметить, что в принципе на величину η нет никаких ограничений. Однако функциональный интеграл, сохраняя члены порядка ε , заставит нас ограничиться только членами второго порядка по η . Разложим в степенной ряд левую часть по ε , а правую по η :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} e^{im\eta^2/2\varepsilon} \\ &\times \left\{ \psi(x, t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Этот интеграл может быть взят точно. Во-первых, константу интегрирования можно положить равной

$$A = \left(\frac{2\pi i \varepsilon}{m} \right)^{1/2}. \quad (6.2.8)$$

Выписывая правую часть, замечаем, что в результате гауссова интегрирования выживают только те члены, которые содержат η в четной степени. В итоге у нас остается

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (6.2.9)$$

Итак, сейчас мы вывели уравнение Шрёдингера, исходя только из предположения, что $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2$, и основных принципов квантовой механики. Если мы включаем эффект, обусловленный потенциальным членом,

и обобщаем выражение на случай всех трех пространственных измерений, то вывод в основном не изменяется, и мы приходим к выражению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi + V(x) \psi. \quad (6.2.10)$$

Мы можем также совсем отказаться от внешнего потенциала и ввести взаимодействия типа ψ^3 или ψ^4 прямо в действие. Это есть вторично квантованный аналог суммирования по Y- и X-образным топологиям в первично квантованной теории точечной частицы.

Мы следовали первоначальному фейнмановскому выводу уравнения Шрёдингера, основанному на вычислении временной эволюции волновой функции. Однако существует еще один способ, который позволяет осуществить переход от первично ко вторично квантованному формализму и вывести уравнение Шрёдингера более непосредственно. На этот раз мы обратимся к функциональному интегралу действия и покажем, что можно перейти ко вторично квантованному формализму, начиная с самих функций Грина и вовсе не прибегая к уравнениям движения.

В гл. I, выполняя переход от гамильтонова к лагранжеву формализму, мы подставляли бесконечный ряд промежуточных состояний, т. е. собственных векторов оператора координаты из формулы

$$1 = |x_i, t_i\rangle \int Dx_i \langle x_i, t_i| \quad (6.2.11)$$

в выражение

$$\Delta_{ij} = \langle x_i, t_i | x_j, t_j \rangle \quad (6.2.12)$$

в каждой промежуточной точке между x_i и x_j . Это позволило нам осуществить переход между гамильтоновым и лагранжевым методами.

Сейчас мы хотим проделать то же самое с интегралом по полному набору вторично квантованных полей:

$$1 = |\psi\rangle \int D^2 \psi e^{-\langle \psi | \psi \rangle} \langle \psi|. \quad (6.2.13)$$

Следуя (1.8.21), мы определяем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle x | \psi \rangle, \\ \psi^*(x) &= \langle \psi | x \rangle, \end{aligned} \quad ; \quad (6.2.14)$$

$$D^2 \psi = \prod_x d\psi(x) d\psi^*(x).$$

Далее мы собираемся подставить в каждую промежуточную точку между начальным и конечным состояниями точечной частицы вместо собственных векторов $|x\rangle$ оператора координаты бесконечный набор функциональных состояний $|\psi\rangle$. Простейший способ проверить справедливость (6.2.13) – это взять следующий матричный элемент и подставить в него полный ряд промежуточных струнных состояний:

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \langle x | y \rangle \\ &= \langle x | 1 | y \rangle \\ &= \langle x | \psi \rangle \int D^2 \psi \exp \left\{ -\int \langle \psi | z \rangle \int Dz \langle z | \psi \rangle \right\} \langle \psi | y \rangle \\ &= \int D^2 \psi \psi^*(x) \psi(y) \exp - \left\{ \int Dz \psi^*(z) \psi(z) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Здесь, как обычно, мы опускаем в континуальном интеграле нормировочный множитель. Мы обращаемся с $\psi(x)$ как с элементом вектор-столбца, помеченным дискретным индексом x . Дискретизируя выражение, находим

$$\delta_{xy} \sim \int \prod_z d\psi_z^* d\psi_z \psi_x^* \psi_y \exp - \left\{ \sum_z \psi_z^* \psi_z \right\}. \quad (6.2.16)$$

Это в точности совпадает с (1.7.11). Таким образом, мы показали, что можно перейти от первично квантованных базисных элементов $|x\rangle$ к эквивалентным вторично квантованным базисным элементам $|\psi\rangle$, таким что $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$.

Давайте теперь перейдем к выводу функции Грина для уравнения Шрёдингера полностью на языке вторично квантованных полевых функционалов, не прибегая к уравнениям движения и принципу Гюйгенса. Подставим следующее тождество в каждую промежуточную точку вдоль пути:

$$1 = |\psi_1\rangle \int D^2\psi_1 D^2\psi_2 \exp \{ -\psi_1^*(\psi_2 - \psi_1) - \psi_2^*\psi_1 \} \langle \psi_2|. \quad (6.2.17)$$

(Это тождество можно доказать, выполняя функциональное интегрирование по ψ_1^* , и тогда оно сведется к условию полноты, записанному через поле ψ_2 .)

Мы вставляем данное выражение между двумя инфинитезимально близкими собственными векторами оператора координаты в формуле (6.2.12):

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \langle x_1 | e^{-iH\delta t} | x_2 \rangle \\ &= \langle x_1 | x_2 \rangle - i \langle x_1 | H\delta t | x_2 \rangle + \dots \\ &= \int D^2\psi_{12} \langle x_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | x_2 \rangle \exp [-\psi_1^*(\psi_2 - \psi_1) - \psi_2^*\psi_1] \\ &\quad - i \int D^2\psi_{1234} \langle x_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | H\delta t | \psi_3 \rangle \langle \psi_4 | x_2 \rangle \\ &\quad \times \exp [-\psi_1^*(\psi_2 - \psi_1) - \psi_2^*\psi_1 - \psi_3^*(\psi_4 - \psi_3) - \psi_4^*\psi_3] + \dots \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Здесь индекс 12 или 1234 просто обозначает произведение двух или четырех таких функциональных дифференциалов. Теперь возьмем предел малых временных интервалов:

$$\sum_{i=1}^N \psi_i^* (\psi_{i+1} - \psi_i) \rightarrow \int_{t_1}^{t_N} \psi^* \dot{\psi} dt. \quad (6.2.19)$$

После перехода к пределу находим

$$\Delta_{1N} = \int D^2\psi \psi(x_1) \psi^*(x_N) \exp i \int dt \psi^* (i\partial_t - H) \psi. \quad (6.2.20)$$

Отсюда наш новый лагранжиан есть

$$L = \psi^* \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - H \right\} \psi. \quad (6.2.21)$$

Он служит лагранжианом для шрёдингеровского волнового уравнения. Итак, имея постулаты квантовой механики и классический первично

квантованный формализм для точечной частицы, мы вывели уравнение Шрёдингера, не используя уравнения движения и принцип Гюйгенса.

Основная причина, по которой мы проделали этот анализ для точечной частицы, заключается в том, что мы сейчас собираемся повторить те же самые шаги для полевой теории BRST и полевой теории в калибровке светового конуса. Как ни странно, мы обнаружили, что весь этот функциональный аппарат переносится непосредственно в полевую теорию струн для действий в формализме BRST и в калибровке светового конуса. И только когда мы наконец достигнем геометрической полевой теории в гл. 8, мы начнем с фундаментальных аксиом и постулируем совершенно новую калибровочную группу.

§ 6.3. ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

Теперь, как и в случае точечной частицы, мы хотим осуществить переход от первично квантованного ко вторично квантованному струнному формализму, используя (1.8.21):

$$\langle X | \Phi \rangle = \Phi(X). \quad (6.3.1)$$

Мы должны здесь напомнить, что полевой функционал не является локальной функцией от значения $X(\sigma)$ в фиксированной точке σ на струне. Напротив, это — *мультилокальный* функционал, определенный для всех точек струны. Если мы дискретизируем струну рядом точек

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N, \quad (6.3.2)$$

то полевой функционал примет вид

$$\Phi(X) = \Phi[X_i(\sigma_1), X_i(\sigma_2), X_i(\sigma_3), \dots, X_i(\sigma_N)], \quad (6.3.3)$$

и мы переходим к пределу $N \rightarrow \infty$. Таким образом, *струнный функционал есть одновременно функция каждой точки струны* [1].

Начнем с определения гильбертова пространства струнных возмущений. Удобно разложить поле по гармоническим осцилляторам. В этом случае имеем

$$|\Phi\rangle = \varphi(x)|0\rangle + A_i a_{-1}^i |0\rangle + h_{ij} a_{-1}^i a_{-1}^j |0\rangle + \dots \quad (6.3.4)$$

Сразу видна разница между первично и вторично квантованными формализмами даже для свободного поля. В первом случае основным объектом является X_μ , что представляет только одну возможную конфигурацию струны. Во втором мы имеем дело с *полевым функционалом Φ , который одновременно представляет суперпозицию всех возможных струнных конфигураций.*

Чтобы сделать обсуждение более конкретным, введем специальное представление собственных векторов $|X\rangle$ на языке гармонических осцилляторов. Мы хотим, чтобы результат действия струнной переменной X на собственный вектор $|X\rangle$ воспроизводил (2.2.9):

$$X_{i,n} |X\rangle = \frac{i}{2} (a_{i,n} - a_{i,-n}) |X\rangle. \quad (6.3.5)$$

Предположим на минуту, что собственный вектор $|X\rangle$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} |X\rangle &= \Omega |0\rangle \\ &= k \prod_{i,n} \exp(a X_{i,n}^2 + b X_{i,n} a_{i,n}^\dagger + c a_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger) |0\rangle, \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

где a , b , c и k — произвольные константы.

Определим эти константы a , b и c , действуя на вектор состояния оператором X :

$$\begin{aligned} X_{i,n} |X\rangle &= \Omega \Omega^{-1} \frac{1}{2} (a_{i,n} - a_{i,n}^\dagger) \Omega |0\rangle \\ &= \Omega \left(\frac{1}{2} i (b X_{i,n} + 2 c a_{i,n}^\dagger - a_{i,n}^\dagger) \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} b &= -2i, \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Далее, мы хотим, чтобы оператор δ_X имел правильные коммутационные соотношения с X . Применяя δ_X к вектору состояния, находим

$$\frac{\delta}{\delta X_{i,n}} |X\rangle = (2a X_{i,n} + b a_{i,n}^\dagger) |X\rangle, \quad (6.3.9)$$

так как

$$\frac{\delta}{\delta X_{i,n}} |X\rangle = -i(a_{i,n} + a_{i,n}^\dagger) |X\rangle, \quad (6.3.10)$$

то это фиксирует коэффициент $a = -1$. Итак, наш окончательный результат для вектора состояния есть

$$|X\rangle = k \prod_{i,n} \exp(-X_{i,n}^2 - 2i X_{i,n} a_{i,n}^\dagger + \frac{1}{2} a_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger) |0\rangle, \quad (6.3.11)$$

где k — нормировочная константа. Это выражение в свою очередь позволяет представить полевую функцию в виде ряда по полиномам Эрмита. В качестве примера, можно вычислить

$$\begin{aligned} \langle 0|X\rangle &= k \prod_{i,n} e^{-x_{i,n}^2}, \\ \langle 0|a_{i,n}|X\rangle &= k(-2i X_{i,n}) \prod_{j,m} e^{-X_{j,m}^2}. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Последние выражения дают возможность переписать первоначальный полевой функционал с помощью полиномов Эрмита, используя (6.3.11):

$$\langle X|\Phi\rangle = \varphi(t) \prod_{i,n} H_0(X_{i,n}) + A_i(x) H_1(X_{i,1}) \prod_{\substack{i,n \\ n \neq 1}} H_0(X_{i,n}) + \dots \quad (6.3.13)$$

(Здесь мы взяли нормировку полиномов Эрмита, отличную от обычной.)

Проквантуем этот полевой функционал, придерживаясь процедуры, использованной в обычной полевой теории точечной частицы (1.8.9)–(1.8.12). В общем случае мы можем разложить полевую функцию в ряд по любым ортогональным полиномам. Выберем произвольный элемент фоковского пространства, являющийся произведением некоторого числа операторов рождения, возведенных в некую степень. Пусть ряд целых чисел n_i^l , где i – лоренцевский индекс, а l – номер уровня, обозначает количество операторов рождения в данном состоянии. Таким образом, любое состояние гильбертового пространства можно представить как

$$|\{n\}\rangle = c \prod_{i,l} (a_{i,-l})^{n_i^l} |0\rangle. \quad (6.3.14)$$

Это состояние есть произведение произвольной последовательности операторов рождения. Выберем нормировочную константу равной

$$c = (\langle \{n\} | \{n\} \rangle)^{-1/2}. \quad (6.3.15)$$

Тогда

$$\langle \{n\} | \{m\} \rangle = \delta_{\{n\},\{m\}}. \quad (6.3.16)$$

Следовательно, эти состояния могут быть нормированы так, что будут образовывать ортонормированный базис. На самом деле этот базис является полным:

$$1 = \sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle \{n\}|. \quad (6.3.17)$$

Матричный элемент $|\{n\}\rangle$ в (6.3.14) и струнного собственного вектора $|X\rangle$ в (6.3.11) есть в точности произведение полиномов Эрмита:

$$\langle X | \{n\} \rangle = H_{\{n\}}(X) e^{-\sum_i X_i^2}. \quad (6.3.18)$$

Исследуем некоторые полезные свойства $|\{n\}\rangle$. Разлагая полевой функционал по ортогональному базису, можно обобщить выражение (1.8.12), которое имело вид

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}} \varphi_{\{n\}} |\{n\}\rangle, \quad (6.3.19)$$

и получить следующее:

$$\langle X | \Phi \rangle = \sum_{\{n\}} \varphi_{\{n\}} H_{\{n\}}(X) e^{-\sum_i X_i^2}.$$

Легко вычисляется внутреннее произведение двух таких полевых функционалов:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_{\{n\}} \psi_{\{n\}}^* \varphi_{\{n\}}. \quad (6.3.20)$$

Можно также показать, что

$$\delta_{\{n\},\{m\}} = \int \varphi_{\{n\}}^* \varphi_{\{m\}} \exp\left(-\sum_{\{n\}} |\varphi_{\{n\}}|^2\right) D^2 \varphi, \quad (6.3.21)$$

где мера интегрирования для такого пространства дается формулой

$$D^2 \varphi = \prod_{\{n\}} d\varphi_{\{n\}} d\varphi_{\{n\}}^*. \quad (6.3.22)$$

Используя эти тождества, можно показать, что число 1 представимо в форме, аналогичной (6.2.13):

$$1 = \int |\Phi\rangle D^2 \Phi \langle \Phi | \exp(-\langle \Phi | \Phi \rangle). \quad (6.3.23)$$

Для доказательства этой формулы разложим полевые функционалы по ортогональному базису и выполним точное интегрирование по коэффициентам. Имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\sum_{\{n\}} \int \varphi_{\{n\}} |\{n\}\rangle \right] \prod_{\{m\}} d^2 \varphi_{\{m\}} \left[\sum_{\{p\}} \varphi_{\{p\}}^* \langle \{p\} | \right] e^{-\langle \Phi | \Phi \rangle} \\ &= \sum_{\{n\}, \{p\}, \{m\}} \varphi_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle \{p\} | \varphi_{\{p\}}^* \int d^2 \varphi_{\{m\}} e^{-\sum_{\{q\}} |\varphi_{\{q\}}|^2} \\ &= \sum_{\{n\}, \{p\}} |\{n\}\rangle \langle \{p\} | \delta_{\{n\}, \{p\}}, \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

что и оправдывает такое представление 1 в виде (6.3.23).

Матричный элемент между двумя струнными состояниями $|X\rangle$ и $|Y\rangle$ также можно выразить через $|\Phi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle X | Y \rangle &= \prod_{i=1}^{24} \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi} \delta(X_i(\sigma) - Y_i(\sigma)) \\ &= \langle X | \Phi \rangle \int D^2 \Phi \langle \Phi | Y \rangle \exp(-\langle \Phi | Z \rangle \int DZ \langle Z | \Phi \rangle) \\ &= \int D^2 \Phi \Phi^*(X) \Phi(Y) e^{-\int DZ \Phi^*(Z) \Phi(Z)}. \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Наконец, перед выводом уравнения Шрёдингера для струн необходимо обобщить (6.2.17):

$$1 = \int |\Phi_1\rangle D^2 \Phi_1 D^2 \Phi_2 e^{-\langle \Phi_1 | \Phi_2 - \Phi_1 \rangle - \langle \Phi_2 | \Phi_1 \rangle} \langle \Phi_2 |. \quad (6.3.26)$$

Как и выше, наиболее легко это тождество доказывается функциональным интегрированием по Φ_1^* .

Теперь, имея в своем распоряжении все нужные тождества, рассмотрим матричный элемент между двумя инфинитезимальными струнными состояниями:

$$\langle X_1 | e^{-iHdt} | X_2 \rangle. \quad (6.3.27)$$

Этот матричный элемент можно выразить в виде первично квантованной картины, в которой мы пользуемся полным набором собственных состояний оператора импульса, либо на языке вторичного квантования, подставляя в него полный набор полевых функционалов.

Таким образом,

$$\begin{cases} \text{первичное квантование: } 1 = |P\rangle \int DP \langle P|, \\ \text{вторичное квантование: } 1 = |\Phi\rangle \int D^2\Phi e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle} \langle\Phi|. \end{cases} \quad (6.3.28)$$

Повторяя проделанное в разд. 1.3, мы подставили в матричный элемент полный набор собственных состояний оператора импульса и затем вывели инфинитезимальную функцию Грина для первично квантованного формализма:

$$\begin{aligned} \langle X_1 | e^{-iHdt} | X_2 \rangle &\equiv \langle X_1 | P \rangle \int dP \langle P | e^{-iHdt} | X_2 \rangle \\ &= \int DP e^{-iH(X,P)dt} e^{i\int d\sigma P(X_1 - X_2)} \\ &= \int DP e^{i\int d\sigma PX dt} e^{-iH(X,P)dt}. \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

Здесь был использован тот факт, что $\langle P | X \rangle \sim e^{i\int d\sigma P_\mu X^\mu}$.

Подставив затем бесконечное число этих первично квантованных струнных состояний между любыми двумя интервалами, разделяющими начальную и конечную точки, нашли, что

$$\begin{aligned} \langle X_1 | e^{-iHt} | X_N \rangle &= \int_{X_1}^{X_N} DX DP e^{i \int_{\tau_1}^{\tau_N} dt d\sigma (P\dot{X} - H)} \\ &= \int_{X_1}^{X_N} DX DP e^{i \int_{\tau_1}^{\tau_N} dt d\sigma L}, \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

где $L = PX - H$.

Итак, в первично квантованной струнной теории мы могли свободно переходить от гамильтонова к лагранжевому формализму и обратно.

Повторим все наши рассуждения, подставляя в действие полный набор вторично квантованных полевых функционалов. Инфинитезимальная амплитуда перехода есть

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \langle X_1 | e^{-iHdt} | X_2 \rangle \\ &= \langle X_1 | X_2 \rangle - i \langle X_1 | H dt | X_2 \rangle + \dots; \\ &= \int D^2\Phi_{12} \langle X_1 | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 | X_2 \rangle \exp \{ - \langle \Phi_1 | \Phi_2 - \Phi_1 \rangle - \langle \Phi_2 | \Phi_1 \rangle \} \\ &\quad - i \int D^2\Phi_{1234} \langle X_1 | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 | H dt | \Phi_3 \rangle \langle \Phi_4 | X_2 \rangle \\ &\quad \times \exp \{ - \sum_{i=1,3} \langle \Phi_i | \Phi_{i+1} - \Phi_i \rangle - \langle \Phi_{i+1} | \Phi_i \rangle \} + \dots \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

Теперь, как и прежде, переходим к пределу:

$$\sum \langle \Phi_i | \Phi_{i+1} - \Phi_i \rangle \rightarrow \int dt \langle \Phi | \Phi \rangle.$$

Далее вставляем полный набор промежуточных полевых состояний между всеми инфинитезимальными интервалами, соединяющими начальную и конечную струнные конфигурации. Тогда матричный элемент принимает вид

$$\Delta_{1N} = \int \Phi^*(X_1) \Phi(X_N) D^2\Phi \exp i \int dt (\langle \Phi | i\partial_\tau - H | \Phi \rangle), \quad (6.3.32)$$

выражающий основной результат этого раздела. Отсюда вторично квантованное действие равно [1]

$$L = \Phi^* (i \partial_\tau - H) \Phi. \quad (6.3.33)$$

Таким образом, эквивалентность первично и вторично квантованных формализмов для свободной струнной теории в калибровке светового конуса доказана. Используя (6.3.28), мы можем написать функцию Грина либо в первично квантованном, либо во вторично квантованном формализме:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j} &= \int_{x_i}^{x_j} DX \exp i \int_{\tau_i}^{\tau_j} d\tau L(\tau) \\ &= \int D^2 \Phi \Phi^*(X_i) \Phi(X_j) \exp i \int_{x_i}^{x_j} d\tau \int L(\Phi) DX, \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

где

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau d\sigma \{X_i'^2 - X_i'^2\} \quad (6.3.35)$$

и

$$H = \frac{\pi}{2} \int_0^\tau d\sigma \left(P_i^2 + \frac{X_i'^2}{\pi^2} \right). \quad (6.3.36)$$

Мы вывели действие вторично квантованной полевой теории из требования, что оно воспроизводит функцию Грина для распространения струны. Это показывает наличие сильной аналогии между первичным и вторичным квантованием в случае свободных струн. (Эта аналогия будет, однако, резко нарушена, когда мы рассмотрим взаимодействие.)

Теперь проквантуем наше действие. Из него следует уравнение движения:

$$(i \partial_\tau - H) \Phi(X) = 0. \quad (6.3.37)$$

Энергия, соответствующая конкретному базисному состоянию, дается формулами

$$\begin{aligned} H | \{n\} \rangle &= E_{\{n\}} | \{n\} \rangle, \\ E_{\{n\}} &= \frac{1}{2p^+} \sum \ln_i + \alpha' p_i^2. \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

Удобно сделать фурье-преобразование коэффициентов $\varphi_{\{n\}}$ по переменной x^- :

$$\varphi_{\{n\}}(x^+, x^-, X_i) \rightarrow \varphi_{p^+, \{n\}}(\tau, X_i). \quad (6.3.39)$$

Следовательно, эти коэффициенты должны удовлетворять уравнениям движения:

$$\varphi_{p^+, \{n\}}(\tau, X_i) = \int dp_i e^{i(p \cdot x - E_{\{n\}} \tau)} A_{p^+, p_i, \{n\}}. \quad (6.3.40)$$

Здесь мы ввели новый оператор A , который является оператором рождения или уничтожения, связанным с состоянием $\{n\}$. Важное замечание состоит в том, что A – это совсем не то же, что a_n^\dagger , введенный в гл. 1. Оператор a_n^\dagger создает отдельную колебательную моду струны, в то время как A рождает или уничтожает элемент гильбертова пространства, построенный из всевозможных произведений a_n^\dagger . Это есть оператор, создающий или уничтожающий состояния бесконечнокомпонентной полевой теории. Он удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[A_{p^+, p_i, \{n\}}, A_{q^+, q_j, \{m\}}] = \delta(p^+ - q^+) \delta_{(p_i - q_j)} \delta_{\{n\}, \{m\}}. \quad (6.3.41)$$

Объединяя все вместе, имеем разложение полевого функционала по плоским волнам:

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}} \int \prod_i dp_i A_{p^+, p_i, \{n\}} e^{i(p \cdot x - E_{\{n\}} \tau)} |\{n\}\rangle. \quad (6.3.42)$$

Можно также переписать это разложение в базисе X (см. (1.8.21)):

$$\begin{aligned} \langle X | \Phi \rangle &= \Phi_{p^+}(X) = \\ &= \sum_{\{n\}} \int \prod_i dp_i A_{p^+, p_i, \{n\}} H_{\{n\}}(X) \exp[-\sum_{i,n} x_{i,n}^2 e^{i(p \cdot x - E_{\{n\}} \tau)}]. \end{aligned} \quad (6.3.43)$$

Мы сейчас в состоянии вывести канонические коммутационные соотношения для вторично квантованной полевой теории струн. Имея разложение по ортогональным полиномам, легко показать, что

$$[\Phi_{p^+}(X, \tau), \Phi_{q^+}^\dagger(Y, \tau)] = \delta(p^+ - q^+) \prod_i \delta(X_i(\sigma) - Y_i(\sigma)). \quad (6.3.44)$$

Обозначим вакуум осцилляторов A через $|0\rangle\rangle$. Отметим, что это вакуумное состояние является произведением вакуумов всех полей высших спинов, содержащихся внутри Φ . Поскольку A – вакуум бесконечнокомпонентной полевой теории, то он не имеет ничего общего с $|0\rangle$. Используя предыдущие тождества, мы находим выражение для функций Грина на языке полевых функционалов:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \langle\langle 0 | \Phi_{p^+}(X_1, \tau_1) \Phi_{q^+}^*(X_2, \tau_2) | 0 \rangle\rangle \\ &= \delta(p^+ - q^+) \int DX e^{i \int L d\sigma d\tau} \prod_\sigma \delta(X(\delta, \tau_1) - X_1(\sigma)) \\ &\quad \times \prod_{\sigma'} \delta(X(\sigma', \tau_2) - X_2(\sigma')), \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

где $X(\sigma, \tau_1)$ и $X(\sigma', \tau_2)$ – начальное и конечное состояния.

Здесь важно отметить, что мы выразили функцию Грина распространения свободной струны как на первично, так и на вторично квантованном языке. Значит, по крайней мере на свободном уровне, можно переходить от одного формализма к другому и обратно. Сейчас в наших руках находятся орудия, позволяющие написать точное выражение для функции Грина свободной струны, обобщающее выражение (6.2.4) для

точечных частиц:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} = & \delta(p^+ - q^+) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k}{\pi \sinh(kT/\alpha)} \right]^{1/2 (D-2)} \\ & \times \left(\frac{\alpha}{4\pi T} \right)^{1/2 (D-2)} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4T} (X_1^2 - X_2^2) \right\} \\ & \times \exp \left\{ k \sinh^{-1} \frac{kT}{\alpha} \left[\cosh \frac{kT}{\alpha} (X_1^2 + X_2^2) - 2X_1 \cdot X_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

где T – временной интервал. Заметим, что вывод амплитуды перехода полностью выполнен на языке вторично квантованных полевых функционалов.

Итак, мы вывели действие полевой теории струн в калибровке светового конуса прямой подстановкой полного набора промежуточных струнных состояний в каждую струнную конфигурацию между ее начальным и конечным положениями.

§ 6.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Теперь мы обратимся к вопросу о взаимодействиях. Оказывается, что выделение вершинной функции во вторично квантованной полевой теории можно проделать, обобщая вывод свободного действия из первично квантованного формализма. Для этого мы вновь подставим важное тождество

$$1 = |\Phi\rangle \int D^2 \Phi e^{-\langle \Phi | \Phi \rangle} \langle \Phi | \quad (6.4.1)$$

в континуальный интеграл.

Исторически вопрос о нелокальных полевых теориях рассматривался еще первооткрывателями квантовой физики Гейзенбергом и Юкавой. Они обнаружили, что такие теории нарушают причинность, т. е. взаимодействия могут распространяться быстрее скорости света. Нелокальные взаимодействия, затрагивающие две отдаленные точки x_1 и x_2 , могут передавать информацию быстрее скорости света, что запрещается.

Полевая теория струн чудесным образом решает эту проблему. Решение просто и элегантно: полевая теория струн не нарушает причинность, поскольку она на самом деле не нелокальная, а мультилокальная теория. Взаимодействия струн, в которых струны могут распадаться и образовываться, таковы, что эти процессы происходят мгновенно, а затем колебания распространяются по струне со скоростью, равной или меньшей скорости света. Таким образом, нарушения принципа причинности не происходит.

Удаление всех симметрий в калибровке светового конуса приводит к отсутствию какого-либо общего руководящего принципа для построения теории. Поэтому мы просто постулируем следующее:

В действии допускаются только такие конфигурации взаимодействующих струн, которые мгновенно изменяют локальную топологию струны.

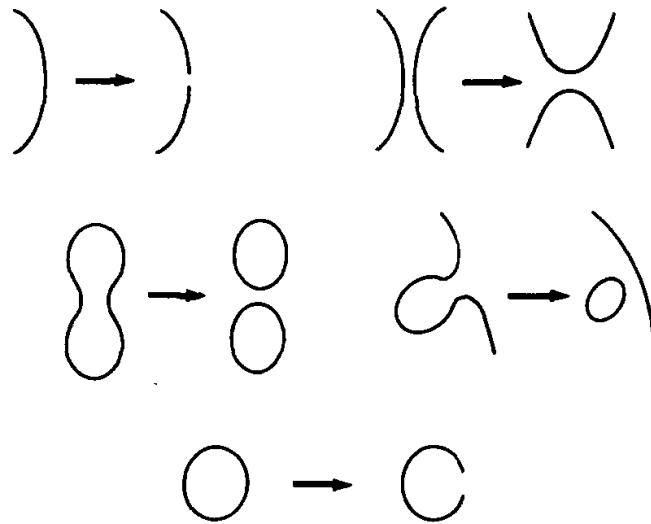


Рис. 6.2. Пять взаимодействий полевой теории в калибровке светового конуса. Открытые и замкнутые струны могут разрываться, расщепляться и делиться. Отметим, что взаимодействия каждого типа происходят на струне локально. В этом — решение проблемы причинности, которая нарушается во всех нелокальных теориях точечных частиц. Таким образом, струнная полевая теория является единственной известной полевой теорией, основанной на протяженных объектах, которая сохраняет причинность.

Хотя этот принцип определен только в калибровке светового конуса, мы найдем, что его вполне достаточно для нахождения всех возможных взаимодействий полевой теории. Имеется только пять таких локальных взаимодействий (см. рис. 6.2), согласующихся с этим новым определением локальности, а также с законом сохранения импульса. (Выберем параметризационную длину струны в калибровке светового конуса пропорциональной p^+ , т.е. $\alpha = 2p^+$, и тогда сохранение импульса означает, что сохраняется сумма длин всех струн). Итак, мы постулируем

$$L_I = \sum_{i=1}^5 L_i, \quad (6.4.2)$$

где каждый член соответствует специальным взаимодействиям поля открытой струны Φ и поля замкнутой струны Ψ . Образно говоря, эти пять взаимодействий можно представить в виде

$$L_I = \Phi^3 + \Phi^4 + \Psi^3 + \Phi^2\Psi + \Phi\Psi. \quad (6.4.3)$$

Мы выпишем в явном виде некоторые из этих взаимодействий, согласующихся с условием локальности. После того как специальные представления для этих пяти взаимодействий будут выписаны, мы должны проверить, что они воспроизводят известные результаты для первично квантованной теории.

Простейшее взаимодействие представляет собой распад струны на две меньшие части. В соответствии с условием локальности ее разрыв

может произойти только в одной внутренней точке. Последствия этого разрыва должны распространяться по струне позже, со скоростью, равной или меньшей скорости света. Таким образом, мы приходим к требованию, чтобы струнная конфигурация до взаимодействия непрерывным образом примыкала к струнной конфигурации после взаимодействия; иными словами, точки струны были бы «непрерывны» через границу взаимодействия. Единственной формой вершинной функции, согласующейся с сохранением импульса и локальностью, является произведение дираковских дельта-функций, которое обеспечивает непрерывность трех струн. Наша вершина есть [1]

$$S_3 = \int dp_r^i \delta \left(\sum_{i=1}^3 p^{(+n)} \right) \int DX_{123} \Phi^+(X_3) \Phi^+(X_1) \Phi(X_2) \delta_{123} + \text{h.c.}, \quad (6.4.4)$$

где

$$\delta_{123} = \prod_{\sigma_i} \delta [X_3(\sigma_3) - \theta(\pi d_1 - \sigma) X_1(\sigma_1) - \theta(\sigma - \pi d_1) X_2(\sigma_2)],$$

$$DX_{123} = DX_1 DX_2 DX_3 \quad (6.4.5)$$

(см. рис. 6.3). Мы будем использовать обозначения

$$0 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\sigma_1 = \sigma \quad \text{для } 0 \leq \sigma \leq \pi\alpha_1,$$

$$\sigma_2 = \sigma - \pi\alpha_1 \quad \text{для } \pi\alpha_1 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2), \quad (6.4.6)$$

$$\sigma_3 = \pi(\alpha_1 + \alpha_2) - \sigma \quad \text{для } 0 \leq \sigma \leq \pi(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 0,$$

где параметризационная длина каждой струны дается $\pi\alpha_i$, а переменная X представляет только трансверсальные моды струны.

Замечательно, что в написанной выше вершинной функции мы действительно можем выполнить интегрирование по DX , потому что это просто гауссов интеграл. Определим

$$\Phi_i(X) = \langle X | \Phi_i \rangle. \quad (6.4.7)$$

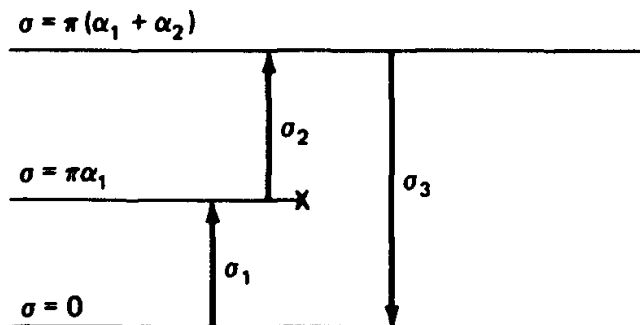


Рис. 6.3. Параметризация трехструнной вершины. Параметризационная длина каждой струны равна $\pi\alpha_i$. Сумма всех трех $\pi\alpha_i$ равна нулю.

Тогда (6.4.4) можно переписать в виде

$$S_3 = \int dp^{+r} \delta \left(\sum_{r=1}^3 p^{+r} \right) \langle \Phi_1 | \langle \Phi_2 | \langle \Phi_3 | V_{123}, \quad (6.4.8)$$

где мы ввели вершинную функцию

$$|V_{123}\rangle = \int DX_{123} |X_1\rangle |X_2\rangle |X_3\rangle \delta_{123}. \quad (6.4.9)$$

Так как вектор в (6.3.11) имеет простую гауссовскую зависимость от X , мы можем вычислить интеграл по DX_{123} в явном виде и получить точную формулу для вершинной функции, записанную через гармонические осцилляторы.

Более удобно выполнить эти вычисления в импульсном представлении. Беря фурье-преобразование, мы легко превращаем формулу (6.3.11) для собственных состояний X в формулу для собственных состояний P :

$$|P\rangle = k \prod_{i,n} \exp \left(-\frac{1}{4} P_{i,n}^2 + P_{i,n} a_{i,n}^\dagger - \frac{1}{2} a_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (6.4.10)$$

Мы легко проверяем, что это выражение правильно воспроизводит уравнение на собственные значения (2.2.9):

$$P_{i,n} |P\rangle = (a_{i,n} + a_{i,n}^\dagger) |P\rangle. \quad (6.4.11)$$

Выпишем фурье-разложения для всех трех струнных состояний в вершине в X - и P -представлениях:

$$P_i^r = \frac{1}{\pi |\alpha_r|} \left(p_i^r + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{np_{i,n}^r} \cos \frac{n\sigma_r}{\alpha_r} \right) \theta_r,$$

$$X = \left(x_i^r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x_{i,n}^r \cos \frac{n\sigma_r}{\alpha_r} \right) \theta_r, \quad (6.4.12)$$

где

$$\theta_1 = \theta(\pi\alpha_1 - \sigma), \quad \theta_2 = \theta(\sigma - \pi\alpha_1), \quad \theta_3 \stackrel{\dot{=}}{=} \theta_1 + \theta_2 = 1. \quad (6.4.13)$$

Интеграл, который нам бы хотелось взять, имеет вид

$$|V_{123}\rangle = \int DP_{123} \prod_{i=1}^3 |P_i\rangle \delta_{123}$$

$$= \int DP_{123} \delta \left(\sum_{r=1}^3 \theta_r(\sigma_r) P_i^{(r)}(\sigma) \prod_{r=1}^3 \exp \left(-\frac{1}{4} P_{i,n}^{(r)2} + P_{i,n}^{(r)} a_{i,n}^{(r)\dagger} - \frac{1}{2} a_{i,n}^{(r)\dagger} a_{i,n}^{(r)\dagger} \right) \right) |0\rangle. \quad (6.4.14)$$

Это гауссов интеграл. Единственная сложность, с которой мы столкнемся, — это явная форма дельта-функционала δ_{123} в (6.4.5), записанная через гармонические осцилляторы. Для выполнения функционального интегрирования выделим фурье-коэффициенты функционала δ_{123} с помощью

косинус-преобразования уравнения связи для различных P . Обычно такое фурье-преобразование синуса или косинуса представляет собой дельта-функцию. Здесь из-за различной параметризационной длины всех трех струн вместо дельта-функций мы получаем матричные уравнения. В частности, условие

$$\sum_{r=1}^3 \theta_r(\sigma_r) P_i^{(r)}(\sigma_r) = P_i^{(3)}(\sigma_3) + P_i^{(2)}(\sigma_2)\theta_2 + P_i^{(1)}(\sigma_1)\theta_1 = 0 \quad (6.4.15)$$

после выполнения косинус-преобразования принимает вид

$$p_{im}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}^{(1)} p_{n,i}^{(1)} + A_{mn}^{(2)} p_{n,i}^{(2)}) + B_m^{(1)} p_i^{(1)} + B_m^{(2)} p_i^{(2)} = 0, \quad (6.4.16)$$

где A и B – различные интегралы от произведения косинусов.

Вместо того чтобы рассматривать (6.4.16) как точное операторное уравнение, достаточно потребовать его выполнения только на вершинной функции. Другими словами, мы хотим, чтобы вершинная функция обращалась в нуль под действием δ_{123} . Это означает, что [1, 6, 7]

$$\left(\sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{(r)} (a_n^{(r)} + a_{-n}^{(r)} + B_m \mathbf{P}) \right) |V_{123}\rangle = 0, \\ \left(a_m^{(r)} + a_{-m}^{(r)} - \frac{\alpha_r}{\alpha_3} \sum_{n=1}^{\infty} (C^{-1} A^{(r)T} C)_{mn} (a_n^{(3)} + a_{-n}^{(3)}) \right) |V_{123}\rangle = 0, \quad (6.4.17)$$

где

$$(C)_{mn} = m \sigma_{mn}, \quad \mathbf{P} = 2p_1^+ p_2^i - 2p_2^+ p_1^i. \quad (6.4.18)$$

Фурье-коэффициенты определяются фурье-преобразованием различных косинусоидальных гармоник. Так как все три струны имеют разные длины, фурье-коэффициенты будут, вообще говоря, нетривиальными. Явным построением получаем следующие фурье-коэффициенты:

$$A_{mn}^{(1)} = 2(n/m)^{1/2} (-1)^m \frac{1}{\pi \alpha_1} \int_0^{\pi \alpha_1} \cos \frac{n\sigma}{\alpha_1} \cos \frac{m\sigma}{\alpha_3} d\sigma \\ = (-2/\pi)(mn)^{1/2} (-1)^{m+n} \frac{\beta \sin(m\pi\beta)}{n^2 - m^2 \beta^2}, \quad (6.4.19)$$

$$A_{mn}^{(2)} = 2(n/m)^{1/2} (-1)^n \frac{1}{\pi \alpha_2} \int_{\pi \alpha_1}^{\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos \frac{n(\sigma - \pi \alpha_1)}{\alpha_2} \cos \frac{m\sigma}{\alpha_3} \\ = (2/\pi)(mn)^{1/2} (-1)^m \frac{(\beta + 1) \sin(mn\beta)}{n^2 - m^2 (\beta + 1)^2}, \quad (6.4.20)$$

$$A_{mn}^{(3)} = \delta_{mn},$$

$$B_m^{(1)} = 2(m)^{1/2} (-1)^m \frac{1}{\pi \alpha_1} \int_0^{\pi \alpha_1} \cos \frac{m\sigma}{\alpha_3} d\sigma \\ = 2\alpha_3 (\pi \alpha_1)^{-1} (-1)^m (m)^{-3/2} \sin(m\pi\beta), \quad (6.4.21)$$

$$B_m^{(2)} = 2(m)^{-1/2} (-1)^m \frac{1}{\pi \alpha_2} \int_{\pi \alpha_1}^{\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos \frac{m \sigma}{\alpha_3} d\sigma$$

$$= -2 \alpha_3 (\pi \alpha_2)^{-1} (-1)^m (m)^{-3/2} \sin(m \pi \beta), \quad (6.4.22)$$

$$\beta = \alpha_1 \alpha_3, \quad \beta_m^{(1)} = -\alpha_2 \beta_m, \quad \beta_m^{(2)} = \alpha_1 \beta_m,$$

$$\text{где } \beta = \alpha_1 / \alpha_3, \quad B_m^{(1)} = -\alpha_2 B_m, \quad B_m^{(2)} = \alpha_1 B_m.$$

Хотя выражения могут показаться сложными, непосредственное вычисление интеграла оказывается простым, поскольку он гауссов. Выполняя интегрирование, находим явную форму вершинной функции. Сначала мы берем тривиальный интеграл по $P^{(3)}$. Благодаря наличию дельта-функции, он становится комбинацией импульсов двух других струн. Тогда по $P^{(1,2)}$ получаем простые гауссовы интегралы. Объединяя члены, находим компактное выражение вершинной функции через гармонические осцилляторы [1, 6]:

$$|V_{123}\rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{(r)} N_{mn}^{rs} \alpha_{-n}^{(s)} \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{(r)} \alpha_{-m}^{(r)} \mathbf{P} + K \mathbf{P}^2 \right\} |0\rangle, \quad (6.4.23)$$

где

$$N_{mn}^{rs} = (C^{-1})_{mn} \delta_{rs} - 2(mn)^{-1/2} (A^{(r)T} \Gamma^{-1} A^{(s)}) \quad (6.4.24)$$

и

$$N_m^r = -(m)^{-1/2} (A^{(r)T} \Gamma^{-1} B)_m,$$

$$K = -\frac{1}{4} B \Gamma^{-1} B,$$

$$\mathbf{P} = \alpha_1 P_2^i - \alpha_2 P_1^i, \quad (6.4.25)$$

$$\Gamma = \sum_{r=1}^3 A^{(r)} A^{(r)T}.$$

Подведем итоги. Мы постулировали, что единственно возможные взаимодействия между струнами – это локальные взаимодействия, т. е. мгновенные локальные деформации топологии струны. Таким способом мы избежали проблем нарушения причинности, десятилетиями блокировавших попытки создания нелокальных полевых теорий. Как ни странно, одного этого принципа оказывается достаточно для определения всех пяти струнных взаимодействий в калибровке светового конуса.

Отметим, что все матрицы Неймана единственным образом определяются из условия перекрытия струн (6.14.15). Условия локальности и сохранения импульса достаточно для того, чтобы построить точное осцилляторное представление вершины.

Далее мы хотим проверить, что такой подход воспроизводит обычную формулу Венециано. Для этого нужно убедиться в следующем:

- (1) Нужно показать, что мы воспроизводим функцию Неймана для модели Венециано.
- (2) Нужно показать, что якобиан преобразования координат от струнной конфигурации τ к обычной верхней полуплоскости переменной оказывается правильным.

Сейчас мы получим обычные струнные амплитуды, демонстрируя тем самым эквивалентность первично и вторично квантованных теорий со взаимодействиями на уровне теории возмущений.

§ 6.5. МЕТОД ФУНКЦИЙ НЕЙМАНА

В гл. 2 мы убедились в возможности вычисления функционального интеграла по диску с L ручками:

$$A_N = \sum_L \int_{T_L} d\mu M_{N,L} \exp \sum_{i>j} k_i N(i, j) k_j. \quad (6.5.1)$$

Здесь $N(i, j)$ – функция Неймана между точками i и j на краях диска или верхней полуплоскости с ручками, а $M_{N,L}$ включает все члены меры.

Недостаток этого подхода, однако, заключается в том, что функциональный интеграл определяется на диске или в верхней полуплоскости, в то время как струнная интерпретация конформного диска неясна. Для того чтобы найти связь между струнным подходом и конформным диском, сначала сделаем конформное преобразование $\rho = \ln z$. Такое конформное преобразование превращает верхнюю z -полуплоскость в горизонтальную полосу ρ -плоскости шириной π . Эта горизонтальная полоса в свою очередь может быть интерпретирована как поверхность, заматаемая одной свободной струной. Мы стремимся обобщить это преобразование на N -точечную функцию.

Мы следуем Манделстаму [8] и делаем следующее конформное преобразование верхней полуплоскости:

$$\rho = \sum_i \alpha_i \log(z - z_i); \quad \sum_i \alpha_i = 0, \quad (6.5.2)$$

где параметризационная длина каждой струны есть $\pi \alpha_i$. Это конформное преобразование растягивают верхнюю полуплоскость в длинные горизонтальные полосы, которые соответствуют движению расщепляющихся струн.

Аналитически на качественном уровне мы можем видеть, что это преобразование отображает верхнюю полуплоскость в правильную диаграмму в калибровке светового конуса. Отправим нашу переменную на положительную бесконечность и затем начнем медленно двигать ее налево. Когда мы приближаемся к одной из сингулярностей, лежащих на вещественной оси, ρ быстро уходит в отрицательную бесконечность. Но мы проходим над сингулярностью z_i , в результате чего логарифм приобретает мнимую часть:

$$\rho \sim \alpha_i \log(e^{i\pi} z) = i\pi \alpha_i + \alpha_i \log z. \quad (6.5.3)$$

Таким образом, мы перепрыгиваем в ρ -плоскости вертикально вверх на πa_i . Это соответствует движению от начала с струны длины πa_i к ее концу на бесконечности. Если мы продолжаем движение в z -плоскости влево, то точка в ρ -плоскости начинает двигаться вправо (оставаясь смещенной на расстояние πa_i вверх).

Когда мы подходим к следующей сингулярности в точке z_{i-1} на вещественной оси, происходит нечто странное. Движение переменной в ρ -плоскости начинает замедляться, в определенной точке она вообще может остановиться, а затем начать движение в обратном направлении, т. е. двинуться влево в комплексной плоскости к отрицательной бесконечности. Точку поворота в ρ -плоскости можно найти, взяв производную и решив относительно z следующее уравнение:

$$\text{Точка поворота: } \frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (6.5.4)$$

Когда мы достигаем в z -плоскости z_{i-1} , точка в ρ -плоскости устремляется в отрицательную бесконечность. Проход над сингулярностью в точке z_{i-1} приводит к сдвигу в ρ -плоскости на еще один отрезок πa_{i-1} вертикально вверх. Осторожно двигаясь таким образом по вещественной оси в z -плоскости, мы очерчиваем струнную конфигурацию в калибровке светового конуса, показанную на рис. 6.4.

К счастью, из (2.5.7) известно, что функция Неймана в верхней полуплоскости есть сумма двух логарифмов. Далее мы хотим разложить эту же самую функцию Неймана в степенной ряд по переменным, определенным в z -плоскости. Для свободной струны, например, можно выбрать координату ξ для направления τ и координату η для направления σ . Тогда

$$z = e^\zeta = e^{\xi + i\eta}.$$

Теперь разложение функции Неймана по переменным ζ и η получается без труда:

$$\begin{aligned} N(z, z') &= \ln |e^\zeta - e^{\zeta'}| + \ln |e^\zeta - e^{\bar{\zeta}'}| \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-n|\xi - \xi'|} \cos n\eta \cos n\eta' + 2 \max(\xi, \xi'). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Доказательство того, что это выражение воспроизводит функцию Неймана, достаточно просто. Во-первых, отметим, что σ -производная функции $\cos n\eta$ на концах струны равна нулю, в соответствии с тем, что $X' = 0$ на концах струны. Во-вторых, результат действия оператора ∇^2 на это разложение равен нулю всюду, кроме точки $z = z'$. Член $2 \max(\xi, \xi')$, выделяющий максимум из двух значений, дает правильную асимптотику при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Следовательно, в силу единственности такое выражение должно быть правильным.

Решение для функции Неймана взаимодействующей струны получается таким же способом. Сначала предположим, что функция Неймана

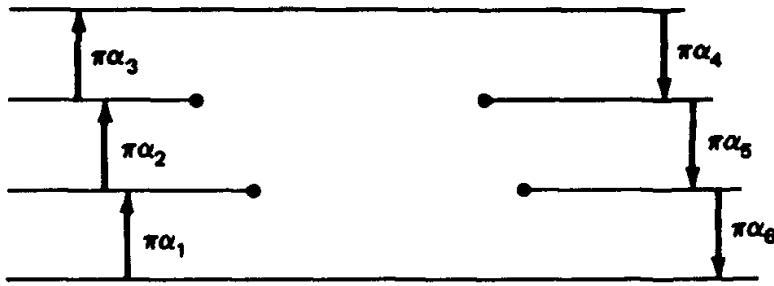


Рис. 6.4. Параметризация N -точечной функции. Входящие (выходящие) стороны имеют положительные (отрицательные) параметризационные длины. Изменением длины внутренних горизонтальных линий мы создаем различные графы полевой теории, которые суммируются в дуальную амплитуду.

имеет вид [8]

$$\begin{aligned}
 N(\rho, \rho') = & -\delta_{r,s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \cos n\eta_r \cos m\eta'_s \exp[-n|\xi_r - \xi'_s|] \\
 & + \sum'_{n,m} 2N_{mn}^{rs} \cos m\eta_r \cos n\eta'_s + 2\delta_{rs} \max(\xi, \xi') \\
 & - 2\eta_3 \delta_{r,3} - 2\eta_3 \delta_{s,3} + b_{rs},
 \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

где можно определить локальные координаты прямо на струне с номером r :

$$\rho = \alpha_r (\zeta_r + i\eta_r) + \text{const} \tag{6.5.7}$$

для $r = 1, 2, 3$, а константу можно выбрать так, чтобы координаты отсчитывались от ближайшей точки поворота. Здесь штрих у суммы означает отсутствие члена $n = 0, m = 0$. Доказательство правильности этого выражения проводится аналогично. Отметим, что первые два члена в правой части уравнения являются просто членами, обусловленными свободной струной, которые гарантируют выполнение уравнения $\nabla^2 N = 2\pi\delta^2(z - z')$. Остальные члены представляют собой не что иное, как решение уравнения Лапласа, разложенное по $\cos n\eta$. Следовательно, данное выражение служит решением уравнений Пуассона. Поэтому, с учетом единственности функции Неймана, оно является правильным.

Важно отметить, что до сих пор не было сделано ничего нового. Мы просто переписали функцию Неймана как фурье-разложение в различных струнных координатах. Важнейшие коэффициенты N_{mn}^{rs} , которые непосредственно появятся в трехструнной вершине, в свою очередь могут быть точно вычислены, поскольку мы знаем форму функции Неймана в верхней полуплоскости, представляющую собой сумму двух логарифмов. Таким образом, можно делать различные фурье-преобразования этой известной функции Неймана, определенной в верхней полуплоскости, и найти фурье-коэффициенты N_{mn} . Мы обращаем предыдущее уравнение и теперь решаем его для коэффициентов Неймана.

Беря фурье-преобразование разложения (6.5.5), приходим к [6]

$$N_{n0}^{rs} = \frac{1}{n} \oint_{x_r} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - x_s} e^{-n\zeta(z)} \quad (n > 0), \quad (6.5.8)$$

$$N_{mn}^{rs} = -\frac{1}{mn(2\pi)^2} \oint_{x_r} dz_r \oint_{x_s} dz_s \frac{e^{-m\zeta_r(z_r) - n\zeta_s(z_s)}}{(z_r - z_s)^2}$$

($x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = \infty$). Подставляя в это выражение функцию Неймана, определенную в верхней полуплоскости, и делая подходящее преобразование переменных, мы получаем точную формулу для коэффициентов Неймана.

Теперь, имея явные выражения для фурье-компонент функции Неймана, рассмотрим случай трех струн. Преобразование верхней полуплоскости в трехструнную конфигурацию есть просто

$$\rho = \alpha_1 \ln(z - 1) + \alpha_2 \ln z. \quad (6.5.9)$$

Точку поворота для такого отображения можно вычислить, беря производную

$$\frac{d\rho}{dz} = 0 \rightarrow z_0 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}. \quad (6.5.10)$$

Отсюда момент времени, в который происходит расщепление струны, равен

$$\tau_0 = \operatorname{Re} \rho(z = z_0) = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r|. \quad (6.5.11)$$

Замечательной особенностью отображения (6.5.9) является наличие обратного, выражающего z через ρ . Это позволяет вычислить все функции Неймана быстрее, не прибегая к абстрактным выражениям типа (6.5.8).

Мы начнем обсуждение процедуры вычисления коэффициентов Неймана с задания координат на трех различных струнах. Например, определим координату ζ_3 на третьей струне:

$$\zeta_3 = \frac{\rho}{\alpha_3} + i\pi = \zeta_3 + i\eta_3. \quad (6.5.12)$$

Деление на α_3 обеспечивает изменение параметра η только от 0 до π . В этих новых переменных отображение (6.5.9) можно написать так:

$$\begin{aligned} -\ln z - \zeta_3 + i\pi &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \ln \left(1 - \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \ln (1 + e^{\zeta_3} e^{-\zeta_3 + i\pi - \ln z}). \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

Если ввести новые переменные

$$y \equiv -\zeta_3 + i\pi - \ln z, \quad (6.5.14)$$

$$x \equiv e^{\zeta_3}, \quad (6.5.15)$$

$$\gamma \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad (6.5.16)$$

то отображение (6.5.9) сведется к

$$y = \gamma \ln(1 + xe^y). \quad (6.5.17)$$

К счастью, это уравнение можно решить, если искать решение в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma a_n(\gamma) x^n. \quad (6.5.18)$$

Подставляя (6.5.18) в (6.5.17), находим явную форму для a_n :

$$a_n = \frac{1}{n!} (n\gamma - 1) \dots (n\gamma - n + 1). \quad (6.5.19)$$

Обратно подставляя наши выражения для z и ζ_3 в (6.5.13), находим

$$\ln z = -\zeta_3 + i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} a_n \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) e^{n\zeta_3}. \quad (6.5.20)$$

Теперь сравним это уравнение с (6.5.6), устремляя переменную z' к нулю. В этом пределе имеем

$$\ln |z| = -\xi_3 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{n0}^{32} \cos n\eta_3. \quad (6.5.21)$$

Сравнивая последние два выражения, мы видим, что N_{n0}^{32} пропорциональна a_n .

Такой же анализ может быть выполнен и для других струн. В конечном счете мы выразим все коэффициенты Неймана через a_n . Окончательный результат есть [8]

$$\bar{N}_{n,m}^{r,s} = -\frac{mn}{m\alpha_s + n\alpha_r} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \bar{N}_m^r \bar{N}_n^s, \quad (6.5.22)$$

$$\bar{N}_m^r = \alpha_r^{-1} f_m(-\alpha_{r+1}/\alpha_r) \exp(m\tau_0/\alpha_r),$$

где $\gamma_r = -\alpha_{r+1}/\alpha_r$ и

$$f_n(\gamma_r) = (n\gamma_r)^{-1} \binom{n\alpha_r}{n},$$

$$K = -\tau_0/(2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3),$$

$$\tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln |\alpha_r|, \quad (6.5.23)$$

$$P = \alpha_1 p_2' - \alpha_2 p_1'.$$

На первый взгляд мы видим громадную разницу между функциями, выведенными из вторично квантованного действия в (6.4.24), и функциями Неймана в (6.5.22), полученными путем конформных преобразова-

ний. Первый вариант матрицы N определяется из условия перекрытия струн, ее второй вариант выражается через неймановские функции на римановой поверхности.

Чудесным образом, однако, оказывается, что они совпадают [6, 9]:

$$N_{nm}^{rs} \approx \bar{N}_{nm}^{rs},$$

$$N_m^r \approx \bar{N}_m^r.$$

Таким образом, хотя эти два вывода сначала представлялись совершенно непохожими, в конечном счете мы обнаруживаем их полную эквивалентность. (Фактическое доказательство того, что коэффициенты Неймана, найденные в полевой теории (6.4.24), и коэффициенты, полученные в первично квантованной теории, совпадают, можно провести двумя способами. В первом мы используем хорошо известную теорему единственности решения уравнения Пуассона с заданным граничным условием. Можно показать, что обе функции Неймана являются решениями уравнения Пуассона и оказываются непрерывными при $\tau = 0$, когда происходит расщепление струн. Поэтому, несмотря на громадную разницу в способах появления этих функций, они на самом деле одинаковы. Их эквивалентность тем не менее может быть показана также с помощью второго подхода, опирающегося на «грубую силу». Доказательство требует манипуляций сложными выражениями посредством тождества (6.5.8) [6]. Детали этого вычисления, однако, очень утомительны и здесь представлены не будут.)

Следующим шагом будет доказательство того, что полевая теория струн в калибровке светового конуса воспроизводит модель Венециано.

§ 6.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ

Начнем наше обсуждение с выписывания N -точечной амплитуды в формализме светового конуса. Эта амплитуда является прямым обобщением амплитуды, найденной в полевой теории точечной частицы в калибровке светового конуса [8]:

$$A_N = \int \sum_{i=2}^{N-1} d\tau_i \int \prod_{r,n,i} dP_{i,n}^{(r)} \Psi_{(r)}(P_{i,n}^{(r)}) W, \quad (6.6.1)$$

где

$$W = [\det \Delta]^{-1/2} \prod_r (\alpha_r)^{1/2} e^{-\sum_r (1/2) P_r \cdot \tau_r} \times \exp \left(\frac{1}{4} \sum_{rs} \int d\sigma' d\sigma'' P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P_s^i(\sigma'') \right). \quad (6.6.2)$$

Здесь $\Psi^{(r)}$ представляет входящий (выходящий) вектор состояния r -й внешней струны, τ_i — времена взаимодействия, P^- — компонента фурье-преобразования, необходимая для превращения данного выражения в амплитуду на массовой поверхности, $P_r^{(s)}$ — распределение импульса,

«размазанное по струне» (которое представляет произвольную совокупность высших резонансов).

Отметим, что с этой амплитудой связаны две проблемы, требующие безотлагательного решения.

- (1) Функция Неймана встречается только с поперечными импульсными возбуждениями. Мы должны показать, что полное выражение является лоренц-инвариантным, включая и продольные импульсные факторы.
- (2) Переменные времени взаимодействия τ_i , найденные в полевой теории струн, должны быть преобразованы в обычные переменные z_i Кобы–Нильсена. Это требует якобиана, который в общем случае довольно сложен.

Займемся решением первой проблемы. Кажущаяся нерелятивистская форма амплитуды с поперечными и продольными факторами, встречающимися в совершенно различном виде, является, однако, иллюзией. Существует трюк, который превращает это выражение в лоренц-инвариантный интеграл. Дело в том, что переменная τ является решением уравнения Лапласа с правильным граничным условием. Поэтому ее можно выразить через линейный интеграл по каждой внешней линии на бесконечности:

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_r \int d\sigma' N(\sigma, \tau; \sigma', \tau_r). \quad (6.6.3)$$

(Довольно странное тождество, выражающее τ через нее же саму. Для его доказательства просто умножим обе части (2, 5, 6) на τ' и выполним интегрирование по двумерной плоскости. Тщательно отбрасывая взаимно уничтожающиеся члены, интегрированием по частям получаем приведенное выше уравнение.) Итак, можно заменить переменную τ ее функцией Неймана и написать

$$\begin{aligned} \sum_r P_r^- \tau_r &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r,s} P_r^- \int d\sigma' N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s) \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \sum_{r,s} \frac{P_r^- p_s^+}{\alpha_r \alpha_s} \int d\sigma \int d\sigma' N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s). \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Добавляя этот продольный вклад функции Неймана, содержащий $P^- p^+$, к поперечному вкладу, содержащему $p_i p_j$, мы получаем в результате общую инвариантность функции Неймана. Таким образом, члены вида $P^- \tau$ представляют собой то, чего нам не хватало для восстановления ковариантности членов вида $p_i p_j$.

Итак, первая задача установления лоренц-инвариантности интеграла оказалась тривиальным следствием теоремы единственности в электростатике. Вторая задача – превращение времен взаимодействия τ_i в переменные Кобы–Нильсена – так же просто решается использованием теоремы единственности.

Мы хотим вычислить якобиан

$$J = \det \left[\frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} \right], \quad (6.6.5)$$

где x_i — обычные переменные Венециано на вещественной оси.

Выберем $x_1 = 0$, $x_{N-1} = 1$, $x_N = \infty$ и теперь сравним этот якобиан с величиной

$$\prod_i |c_i|^{1/2}, \quad (6.6.6)$$

где

$$c_i = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \Big|_{z=x_i},$$

$$\rho = \sum_i d_i \ln(x_i - z). \quad (6.6.7)$$

Отметим, что наш якобиан и эта величина, включающая производные конформного преобразования, обладают одной и той же аналитической структурой. Они оба имеют одинаковые сингулярности при совпадении различных x_i и одинаковые граничные условия. Следовательно, они сами должны быть одинаковыми с точностью до числовых множителей. Чтобы вычислить эту константу, мы можем выбрать переменные x_i далеко отстоящими друг от друга. Тогда

$$\rho(z_i) = \ln x_i \sum_{s \leq i} d_s, \quad (6.6.8)$$

так что

$$J = \sum_{i=1}^{N-2} x_i^{-1} \left| \sum_{s \leq i} d_s \right|. \quad (6.6.9)$$

(Добавим, что имеются также нетривиальные члены, включающие детерминант лапласиана, определенный по четырехточечной конфигурации, и нулевые компоненты функций Неймана. Эти члены сокращаются друг с другом при внимательном изучении аналитической структуры их сингулярностей. Впервые их точное сокращение было продемонстрировано в [6] для четырехточечной функции. Сокращение в произвольном случае, включая петли, выполнено в [12].) Таким образом, мы свели якобиан к тривиальному множителю [10–12], представляющему произведение различных переменных Кобы–Нильсена. Объединяя все вместе, имеем

$$A_N = \int \prod_{i,n} \Psi(P_{i,n}^{(r)}) \int d\mu \times \prod_{i < j} \exp \left(\frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d\sigma' d\sigma'' P_{\mu}^{(r)}(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P^{(s)\mu}(\sigma'') \right). \quad (6.6.10)$$

Если вместо произвольных внешних резонансов мы берем внешние тахионы, то находим

$$A_N = \int d\mu \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{k_i \cdot k_j}, \quad (6.6.11)$$

как и выше, т. е. восстанавливается N -точечная амплитуда.

§ 6.7. ЧЕТЫРЕХСТРУННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Предшествующие интуитивные соображения привели нас к утверждению о существовании четырехструнного взаимодействия [1], в котором две струны могут взаимодействовать в своих внутренних точках и мгновенно изменять локальную топологию. На первый взгляд существование соответствующей диаграммы в рамках метода функций Неймана не представляется очевидным, так как верхняя полуплоскость всегда преобразовывалась в планарную конфигурацию. Однако присутствие членов четырехструнного взаимодействия в амплитуде Венециано можно увидеть, тщательно проверив область интегрирования переменных Кобы-Нильсена.

Мы начинаем с четырехструнного отображения и полагаем $x_1 = 1$, $x_2 = \infty$, $x_3 = 0$ и $x_4 = x$. Тогда это отображение приобретает вид

$$\rho = \alpha_1 \ln(z - 1) + \alpha_3 \ln z + \alpha_4 \ln(z - x). \quad (6.7.1)$$

Для того чтобы найти его сингулярность, положим

$$\frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (6.7.2)$$

Решение этого уравнения дает точки поворота для нашего преобразования:

$$z_{\pm} = \frac{1}{2(1 - \gamma_1)} \{1 + (\gamma_2 - \gamma_1)x \pm \Delta^{1/2}\}, \quad (6.7.3)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ \Delta &= x^2 (\gamma_2 - \gamma_1)^2 + 2x(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2) + 1. \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

Как правило, два решения уравнения для точек поворота, определяемые знаками \pm квадратного корня, показывают, что на римановой поверхности существуют две точки поворота, обладающие по отношению друг к другу свободой движения. В s - и t -канальных диаграммах мировые поверхности струн гладко деформируются друг в друга. Однако, когда в ρ -плоскости у двух точек взаимодействия совпадают мнимые части, происходит интересная вещь.

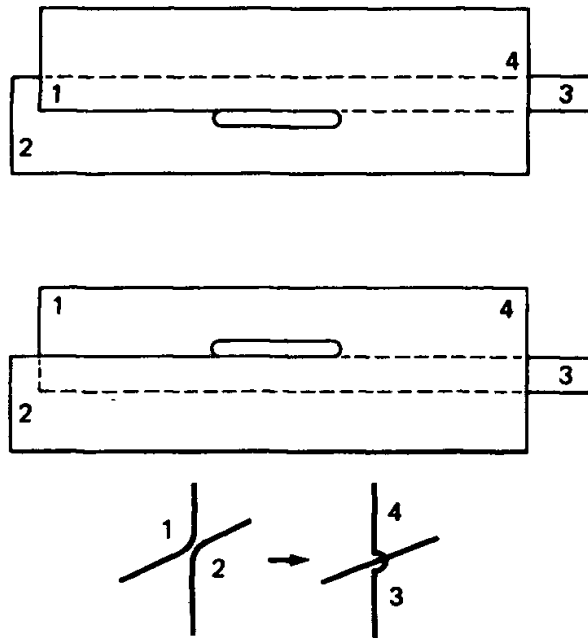


Рис. 6.5. Четырехструнное взаимодействие. Невозможно непрерывно продеформировать t - и u -канальные четырехструнные диаграммы рассеяния друг в друга, если использовать только трехструнные вершины. Непрерывность конформного преобразования означает наличие потерянного куска в области интегрирования, который обеспечивается только введением нового четырехструнного взаимодействия.

Изучим, например, фейнмановские диаграммы для t - и u -канального рассеяния четырех частиц (см. рис. 6.5). Видно, что эти две диаграммы не могут быть переведены друг в друга гладким образом. Струны сходятся или вблизи верхней, или вблизи нижней части диаграммы, поэтому не существует способа непрерывной деформации одной такой диаграммы в другую. Но это невозможно. Конформное преобразование по определению было гладким, что позволило нам непрерывно переходить от t - к u -каналу и наоборот. Другими словами, часть области интегрирования теряется. Чтобы увидеть это, вычислим момент встречи t - и u -канальных диаграмм. Положим Δ равным нулю и решим полученное уравнение для x :

$$x_{\pm} = \frac{1}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2} \{ \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_1\gamma_2 \pm 2[\gamma_1(\gamma_1 - 1)\gamma_2(\gamma_2 - 1)]^{1/2} \}. \quad (6.7.5)$$

Два решения отвечают t - и u -канальным точкам поворота. Интервал $(x_+ < x < \infty)$ дает нам одну диаграмму, интервал $(x_- > x > -\infty)$ — другую, но что можно сказать об области между ними? Это недостающий кусок. Он соответствует непрерывному преобразованию от графа одного канала к графу другого канала, при котором происходит только мгновенная деформация локальной топологии двух графов (см. рис. 6.6).

В указанной промежуточной области локальная топология четырех струн изменяется так, что струны соединяются в другой последователь-

ности. В этом и состоит графическое доказательство того факта, что четырехструнное взаимодействие, которое мы постулировали выше, действительно есть часть формулы Венециано (для t - и u -канальных графов). Без этого недостающего куска полевая теория струн и в самом деле является неполной, а также нарушает конформную инвариантность и другие свойства s -матрицы.

Следовательно, четырехструнное взаимодействие требует дополнительного интегрирования по $d\sigma$. Это похоже на «застежку-молнию», позволяющую локально изменять топологию четырех струн. На первый взгляд кажется, что это взаимодействие происходит со сверхсветовой скоростью. В конце концов, оно мгновенно во времени, так как интегрирование по $d\sigma$ производится мгновенно. Кажется, что мы нарушаем постулат локальности, наложенный нами первоначально для вывода теории, подчиняющейся принципу причинности.

Решение этой головоломки заключается в том, что четырехструнное взаимодействие представляет собой аналог кулоновского члена взаимодействия, возникающего в теориях Янга–Миллса при квантовании в кулоновской калибровке или в калибровке светового конуса. В кулоновской калибровке поле A_0 появляется в квадратичной комбинации $A_0 \nabla^2 A_0$ и линейно при взаимодействии с фермионами вида $A_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi$. Функциональным интегрированием по A_0 находим

$$\bar{\psi} \gamma^0 \psi \nabla^{-2} \bar{\psi} \gamma^0 \psi,$$

что представляет собой четырехфермионный кулоновский член. Отметим, что ∇^{-2} – «мгновенный» оператор (т.е. не зависит от времени). Кажется, что такой член нарушает принцип относительности. Однако в действительности условие причинности полной s -матрицы строго выполняется даже в присутствии этого члена, являющегося артефактом фиксации калибровки.

Итак, интегрирование по «застежке-молнии» согласуется со специальной теорией относительности, кажущееся нарушение которой оказывается иллюзией. Фактически в рамках геометрической теории струн, изложенной в гл. 8, можно показать, что ковариантный четырехструнный член взаимодействия представляет собой в точности кулоновский член, найденный в нерелятивистском квантовании. Таким образом, никаких противоречий со специальной теорией относительности нет.

Выпишем теперь вклад четырехструнного взаимодействия в действие полевой теории. Подчеркнем, что член четырехструнного взаимодействия можно угадать, исходя из условия локальности, но, как мы видели, он оказывается согласованным с амплитудой Венециано. Этот член взаимодействия есть [1]

$$S_4 = \int D X_{1234} \int d p_r^+ \delta \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i \right) \mu \Phi_{p_1^+}^*(X_1) \Phi_{p_2^+}^*(X_2) \Phi_{p_3^+}^*(X_3) \Phi_{p_4^+}^*(X_4) \delta_{1234}, \quad (6.7.6)$$

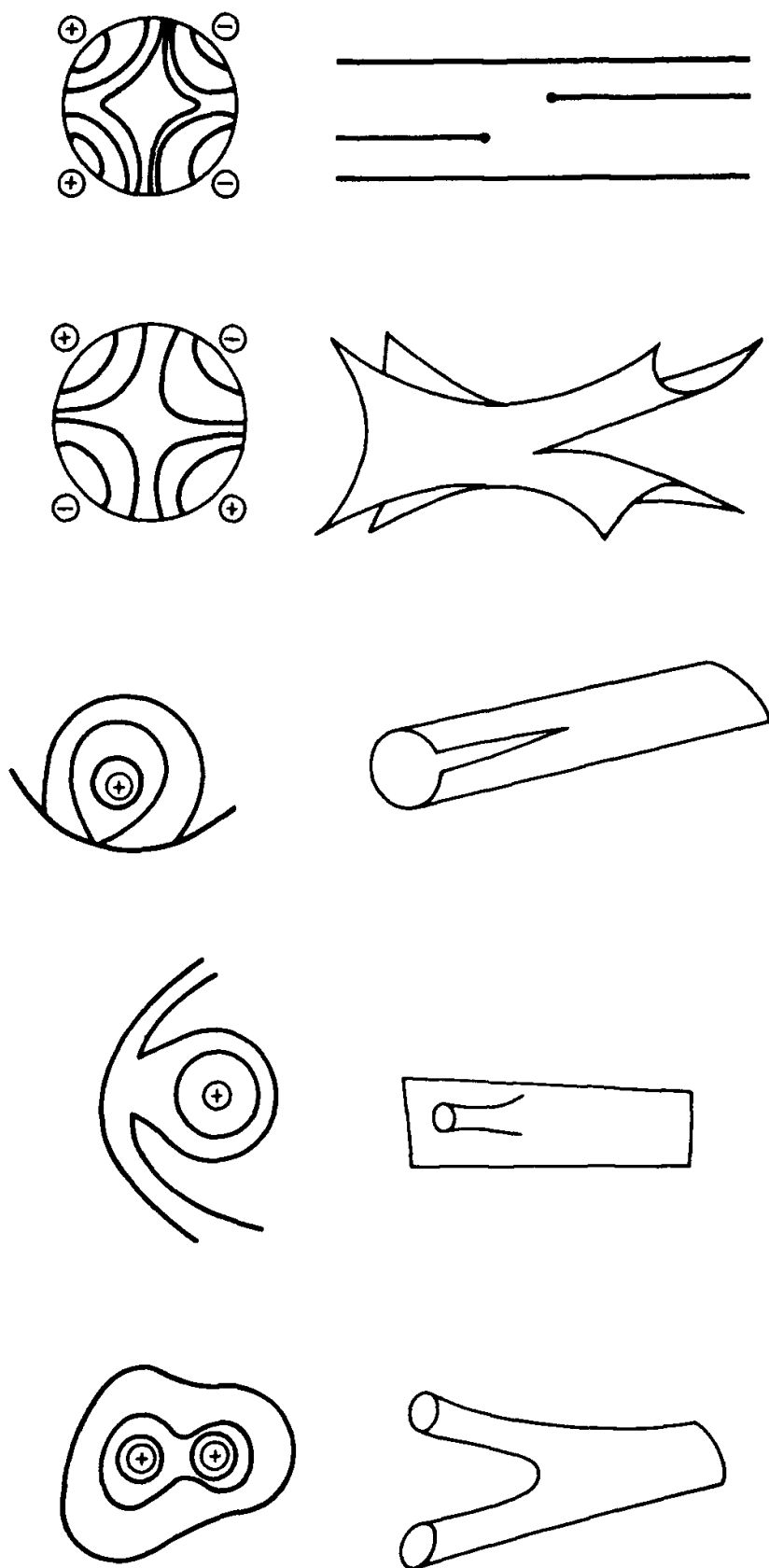


Рис. 6.6. Топология струнных взаимодействий. Эквипотенциальные линии, которые мы можем провести на диске с внешними зарядами, изоморфны струнным взаимодействиям. Если одинаковые заряды расположены на противоположных сторонах диска, то эквипотенциальные линии сталкиваются в самом центре и перестраивают свою топологию. Здесь изображено четырехструнное взаимодействие. Аналогично, все пять допустимых взаимодействий легко могут быть представлены таким же образом.

где μ — мера и

$$\delta_{1234} = \prod_{\sigma_4} \delta(X_4(\sigma_4) - \sum_{i=1}^2 X_i(\sigma_i)\theta_i) \prod_{\sigma_3} \delta(X_3(\sigma_3) - \sum_{i=1}^2 X_i(\sigma_i)\theta_i),$$

где

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0,$$

$$\alpha_3 > 0; \quad \alpha_4 > 0;$$

$$\alpha_1 < 0; \quad \alpha_2 < 0;$$

$$\sigma_1 = \pi\alpha_4 - \sigma_4, \quad \text{если } y < \sigma_4 < \pi\alpha_4, \quad (6.7.7)$$

$$\sigma_2 = \pi|\alpha_1| - \sigma_3, \quad \text{если } 0 < \sigma_3 < x,$$

$$\sigma_2 = \pi\alpha_3 - \sigma_3, \quad \text{если } x < \sigma_3 < \pi\alpha_3,$$

$$\sigma_2 = \pi|\alpha_2| - \sigma_4, \quad \text{если } 0 < \sigma_4 < y,$$

$$y = x + \pi(\alpha_4 - |\alpha_1|)$$

и

$$\theta_1 = \theta(\sigma_4 - y),$$

$$\theta_2 = \theta(y - \sigma_4),$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta(\sigma_3 - x),$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta(x - \sigma_3).$$

Хотя четырехструнное взаимодействие можно вычислить точно, попытки его обобщения к полной N -точечной амплитуде оказываются безнадежными. Кажется неизбежным проводить утомительную проверку сотен возможных диаграмм, составляющих амплитуду. Однако существует удобный прием, который резко упрощает эту проблему.

Сначала заметим, что если мы разместим внешние электрические заряды q_i на круглом диске, то нарисовать эквипотенциальные линии в диске не составляет труда. Ключевое наблюдение, однако, состоит в том, что конформное отображение переводит эти эквипотенциальные линии в вертикальные линии на диаграмме светового конуса. Следовательно, топология эквипотенциальных линий должна воспроизводить точную топологию взаимодействующих открытых и замкнутых струн. Это замечательное наблюдение сводит кажущуюся безнадежной задачу к относительно простой проблеме изображения эквипотенциальных линий для диска с внешними зарядами.

Например, мы знаем, что $\tau = \text{Re } \rho(z) = \sum_i \alpha_i \ln |z - z_i|$, но нам также известно, что электростатический потенциал в двумерии в точке \mathbf{g} , создаваемый совокупностью точечных зарядов в q_i , определяется как

$$\text{Потенциал} = \sum_i q_i \ln |\mathbf{g} - \mathbf{r}_i|,$$

т. е. мы можем интерпретировать τ как электростатический потенциал точечных зарядов α_i . Таким образом, линии равного потенциала есть в точности линии равного τ . Но струны, распространяющиеся вдоль манделстамовской полосы, описываются вертикальными линиями одинакового τ . Поэтому эквипотенциальные линии на конформной поверхности, создаваемые зарядами α_i , соответствуют физической эволюции взаимодействующих струн.

Из рис. 6.6 очевидна необходимость существования четырехструнной вершины также и в формализме светового конуса. Фактически посредством анализа эквипотенциальных диаграмм можно показать, что в континуальный интеграл нужно добавить ровно пять различных членов, описывающих взаимодействие. Обратим внимание на взаимодействия замкнутых струн, появляющиеся из сектора открытых струн как «связанные состояния». Мы видим, что лагранжиан взаимодействия должен быть суммой всех пяти различных членов.

§ 6.8. ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРСТРУН

И NS-R-действие, и GS-действие оказывается возможным выразить как вторично квантованную теорию в формализме светового конуса [13]. При этом возникают новые особенности:

- (1) Полевой функционал Φ теперь является и функционалом от спинорных полей, которые можно рассматривать как преобразующиеся по представлению $\mathbf{8}$ группы $SO(8)$ или $\mathbf{4} + \bar{\mathbf{4}}$ группы $SU(4)$.
- (2) В теории имеются генераторы суперсимметрии, преобразующие бозонные члены взаимодействия в действие в фермионные. Это налагает сильные ограничения на возможные взаимодействия.
- (3) В отличие от бозонной теории, мы должны добавить специальную вставку в точку расщепления струн. Без этого вставочного члена теория не является ни суперсимметричной, ни лоренц-инвариантной.

Обсудим GS-действие в формализме светового конуса, поскольку оно является явно суперсимметричным. Первично квантованное действие в калибровке светового конуса определяется формулой (3.8.3):

$$S_{1c} = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2z (\partial_\alpha X^i \partial_\alpha X^i - (2i\alpha') p^+ \bar{\theta}^a \gamma^a \partial_\alpha \theta^a). \quad (6.8.1)$$

Здесь $\theta^{1,2}$ – восьмикомпонентные спиноры пространства представления $SO(8)$ и одновременно спиноры с двумя компонентами в двумерном пространстве. Напомним, что в 10-ти измерениях дираковский спинор имеет 32 комплексных компоненты, майорановский 32 вещественных компоненты, майорано-вейлевский 16 вещественных компонент, и в калибровке светового конуса спинор имеет 8 вещественных компонент, преобразующихся по представлению $SO(8)$.

Проблема квантования такого действия заключается в самосопряженности фермионного поля. Сопряженные импульсы определяются

уравнением

$$\pi^a = \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}^a} \sim \theta^a. \quad (6.8.2)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \{\theta^{1a}(\sigma), \theta^{1b}(\sigma')\} &= \{\theta^{2a}(\sigma), \theta^{2b}(\sigma')\} \sim \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\theta^{1a}(\sigma), \theta^{2b}(\sigma')\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.8.3)$$

Эти поля являются самосопряженными, и перестановочные соотношения не имеют канонической формы. Фермионные поля образуют алгебру Клиффорда, тогда как мы предпочли бы иметь грассмановы состояния без дельта-функции в правой части (6.8.3). Простейший выход из этой ситуации состоит в разбиении 8-ми состояний спинора на $4 + 4$ состояния таким образом, что один ряд из четырех состояний является сопряженным к другому. Один из таких способов использует подгруппу $SU(4)$ группы $SO(8)$:

$$SO(8) \supset SO(6) \otimes O(2) = SU(4) \otimes U(1). \quad (6.8.4)$$

При таком разложении представление $\mathbf{8}$ группы $SO(8)$ разбивается так:

$$\mathbf{8} = \mathbf{4} \oplus \bar{\mathbf{4}}. \quad (6.8.5)$$

Теперь восемь компонент спинора разложим в виде

$$\begin{aligned} \theta^{1a} &= (\theta^{1\bar{A}}, \lambda^{1B}), \\ \theta^{2a} &= (\theta^{2\bar{A}}, \lambda^{2B}). \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

A и B изменяются от 1 до 4. Мы используем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{4}}: \theta^{\bar{A}} &= \theta_A, \\ \mathbf{4}: \lambda^A &= \lambda_{\bar{A}}. \end{aligned} \quad (6.8.7)$$

Приняв эти новые определения, мы имеем новые независимые переменные $\theta^{\bar{A}}$, которые все взаимно антикоммутируют без какой-либо дельта-функции, как в (6.8.3). Желаемые антикоммутационные соотношения этих переменных с канонически сопряженными суть

$$\{\theta^{i,\bar{A}}(\sigma), \lambda^{j,B}(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma') \delta^{\bar{A}B} \delta^{ij}. \quad (6.8.8)$$

В процессе редукции дираковского спинора с 32 комплексными компонентами имеется множество ступеней, поэтому подведем итог тому, каким образом мы пришли только к четырем независимым состояниям:

- Дирак = 32 комплексных компоненты,
- Майорана = 32 вещественных компоненты,
- Майорана – Вейль = 16 вещественных компонент,
- Световой конус = 8 вещественных компонент,
- Канонический = 4 вещественных компоненты.

Разложив спиноры в соответствии с подгруппой $SU(4)$ группы $SO(8)$,

мы должны провести такое же разложение для векторов по этой подгруппе. Разобьем векторы A^I , где $I = 1, 2, \dots, 8$, следующим образом:

$$A^I B^I = A^I B^i + A^L B^R + A^R B^L, \quad (6.8.9)$$

где

$$\begin{aligned} A^R &= 2^{-1/2} (X^7 + iX^8), \\ A^L &= 2^{-1/2} (X^7 - iX^8). \end{aligned} \quad (6.8.10)$$

Окончательно, действие свободной теории имеет вид

$$S = \int D^{16} z [\partial_+ \Psi \partial_- \Psi + \text{Tr}(\partial_+ \Phi \partial_- \Phi)], \quad (6.8.11)$$

где независимый набор переменных интегрирования есть

$$D^{16} z = D^8 X^I D^4 \theta^{1\bar{A}} D^4 \theta^{2\bar{A}}, \quad (6.8.12)$$

и где Φ – поля открытых струн, а Ψ – поля замкнутых струн.

Наш основной полевой функционал определяется теперь (мы приписали полю изоспиновые индексы) формулой

$$\Phi^{ab} [X(\sigma), \theta^1(\sigma), \theta^2(\sigma)] = -\Phi^{ba} [X(\pi\alpha - \sigma), \theta^2(\pi\alpha - \sigma), \theta^1(\pi\alpha - \sigma)], \quad (6.8.13)$$

где роль переменной σ чисто символическая. Она была добавлена для того, чтобы показать, как поле преобразуется под действием твиста.

Следуя соотношениям (6.3.44), полученным для бозонного случая, можно построить канонические соотношения квантования:

$$\begin{aligned} [\Phi^{ab}(1), \Phi^{cd}(2)] &= \frac{1}{2p^+} \delta(a_1 + a_2) \{ \delta^{ac} \delta^{bc} \Delta^{16} [z_1(\sigma) - z_2(\sigma)] \\ &\quad - \delta^{ad} \delta^{bc} \Delta^{16} [z_1(\sigma) - z_2(\pi|a_2| - \sigma)] \}, \end{aligned} \quad (6.8.14)$$

где

$$z = (X^I, \theta^{1\bar{A}}, \theta^{2\bar{A}}). \quad (6.8.15)$$

Сейчас, когда мы сформулировали свободную теорию суперструн, займемся трудной задачей построения вершин взаимодействия для суперструн. Мы обнаружим несколько сложностей:

- (1) Теперь будут не один, а два набора осцилляторов и отдельные условия непрерывности, возникающие из перекрывающихся дельта-функций. К счастью, два набора осцилляторов коммутируют друг с другом и не смешиваются.
- (2) Возникнут дополнительные члены, определенные в точке соединения трех струн. Вообще говоря, на струне нельзя ввести дополнительные поля, так как они нарушат лоренц-инвариантность и конформную инвариантность. Тем не менее поля можно разместить точно в той точке, в которой струна разрывается. При этом следует проявлять осторожность из-за сингулярностей, существующих в этой точке.
- (3) Сильнейшим ограничением будет суперсимметрия, которая полностью определит природу этих вставок в точках разрыва.

Мы начинаем обсуждение вершинной функции с постулирования формы, которую она примет. Основываясь на аналогии с бозонным случаем, мы принимаем без доказательств, что суперструнная вершина должна иметь вид

$$|V\rangle = Z_i \exp[\Delta_0 + \Delta_S] |0\rangle \delta(\sum_r \alpha_r) \delta(\sum_r p_r^1) \delta(\sum_r \alpha_r \theta_r^{\bar{A}}), \quad (6.8.16)$$

где Z_i — поля-вставки в точке разрыва, а Δ_0 — обычный бозонный член, найденный в (6.4.23),

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{(r)} \bar{N}_{mn}^{rs} \alpha_{-n}^{(s)} + \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_m^r \alpha_{-m}^{(r)} \mathbf{P} - \frac{\tau_0}{2\alpha} \mathbf{P}^2, \quad (6.8.17)$$

причем $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Мы предполагаем, чисто по аналогии с бозонной теорией, что фермионная часть должна быть квадратична по операторам рождения. Выберем следующее разложение:

$$\begin{aligned} \theta^{1\bar{A}} &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_n R_n^{\bar{A}} e^{in\sigma/|\alpha|}, \\ \theta^{2\bar{A}} &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_n R_n^{\bar{A}} e^{-in\sigma/|\alpha|}, \\ \lambda^{1A} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|}} \sum_n R_n^A e^{in\sigma/|\alpha|}, \\ \lambda^{2A} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|}} \sum_n R_n^A e^{-in\sigma/|\alpha|}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \{R_m^A, R_n^{\bar{B}}\} &= \alpha \delta_{m+n,0} \delta^{A\bar{B}}, \\ \Delta_S &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{r,s=1}^3 R_{-m}^{(r)A} U_{mn}^{rs} R_{-n}^{(s)\bar{A}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 V_m^r R_{-m}^{(r)\bar{A}} \Theta^{\bar{A}}, \end{aligned} \quad (6.8.18)$$

причем о матрицах U и V совершенно ничего неизвестно, а

$$\Theta^{\bar{A}} = \frac{1}{\alpha_3} (\theta_1^{\bar{A}} - \theta_2^{\bar{A}}).$$

Для такой формы (6.8.18) не существует никакого другого обоснования, кроме того, что она удовлетворяет основным граничным условиям, которые мы сейчас наложим. Потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon_r \theta_r^{\bar{A}} &= 0, \\ \sum \varepsilon_r \theta_r^{\bar{A}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.8.19)$$

Здесь ε_r равно $+1$ (-1) для входящей (выходящей) струны, и тильда обозначает второй осциллятор. Эти условия, будучи написанными

в фурье-модах, имеют сходство с условиями, найденными из сохранения импульса. В частности, мы обобщаем (6.4.17):

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\alpha_r} A_{mn}^{(r)} (R_n^{(r)\bar{A}} - R_{-n}^{(r)\bar{A}}) |V\rangle = 0, \quad (6.8.20)$$

$$\left\{ \sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} A_{mn}^{(r)} (R_n^{(r)\bar{A}} + R_{-n}^{(r)\bar{A}}) - \sqrt{2\alpha} B_m \Theta^{\bar{A}} \right\} |V\rangle = 0.$$

Мы также налагаем условия непрерывности

$$\sum \lambda_r^A(\sigma) = 0, \\ \sum \tilde{\lambda}_r^A(\sigma) = 0. \quad (6.8.21)$$

Эти условия непрерывности требуют, в свою очередь, выполнения следующих условий на фурье-моды:

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\alpha_r} A_{mn}^{(r)} (R_n^{(r)A} - R_{-n}^{(r)A}) |V\rangle = 0, \quad (6.8.22)$$

$$\left\{ \sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} A_{mn}^{(r)} (R_n^{(r)A} + R_{-n}^{(r)A}) + \frac{1}{\sqrt{2}} B_m \frac{\partial}{\partial \Theta^{\bar{A}}} \right\} |V\rangle = 0.$$

Теперь у нас имеется достаточно условий для нахождения матриц U и V . После трудоемких вычислений получаем

$$U_{mn}^{rs} = \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_{mn}^{rs}, \quad (6.8.23)$$

$$V_m^r = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{2} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r.$$

Далее мы хотим построить суперсимметричные операторы нашей теории, основываясь на опыте с генераторами свободной суперсимметричной теории. Обозначим суперсимметричные генераторы первично квантованной теории через q . Тогда вторично квантованные суперсимметричные генераторы Q связываются с q на свободном уровне посредством

$$Q_2 = \int_0^{\infty} \alpha d\alpha \int D^{16} Z [\text{Tr} \Phi_{-\alpha} q \Phi_{\alpha} + \Psi_{-\alpha} q \Psi_{\alpha}]. \quad (6.8.24)$$

Канонические условия квантования (6.8.14) гарантируют, что если генераторы q образуют алгебру, то Q также должны образовывать ее. В частности, первично квантованные q подчиняются коммутационным соотношениям

$$\{q^{-A}, q^{-\bar{B}}\} = 2h \delta^{A\bar{B}}, \quad (6.8.25)$$

$$\{q^{-A}, q^{-B}\} = \{q^{-\bar{A}}, q^{-\bar{B}}\} = 0.$$

Возникает желание построить вторично квантованный вариант этих соотношений. В частности, взаимодействующая часть вторично квантованного генератора имеет вид

$$Q^{-A} = \dots + \lambda \int \prod_{r=1}^3 da_r D^{16} Z_r \delta \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right) \times \Delta^{16} \left(\sum_{i=1}^3 \epsilon_i Z_i \right) \langle \Phi_1 | \langle \Phi_2 | \langle \Phi_3 | | Q^{-A} \rangle. \quad (6.8.26)$$

Подставив теперь выражение для вторично квантованных генераторов в коммутационные соотношения, получим ряд слагаемых, сумма которых должна обращаться в нуль. В нулевом порядке по константе связи выполнение этого условия гарантируется, поскольку q удовлетворяют соотношениям суперсимметрии. Однако члены, линейные по константе связи, содержат как свободные q , так и взаимодействующие $|Q^a\rangle$. В частности, находим

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^3 q_r^{-A} |Q^{-\bar{B}}\rangle + \sum_{r=1}^3 q_r^{-\bar{B}} |Q^{-A}\rangle &= 2 |H\rangle \delta^{A\bar{B}}, \\ \sum_{r=1}^3 q_r^{-A} |Q^{-B}\rangle + (A \leftrightarrow B) &= 0, \\ \sum_{r=1}^3 q_r^{-\bar{A}} |Q^{-\bar{B}}\rangle + (\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.8.27)$$

Для решения этих уравнений примем, что Q имеют общую форму

$$\begin{aligned} |Q^{-\bar{A}}\rangle &= Y^{\bar{A}} |V\rangle, \\ |Q^{-A}\rangle &= k \epsilon^{ABCD} Y^{\bar{B}} Y^{\bar{C}} Y^{\bar{D}} |V\rangle. \end{aligned} \quad (6.8.28)$$

Итак, мы собрали внушительный аппарат, по большей части построенный из предположений и аналогий с бозонным случаем. Теперь необходимо сделать еще одно предположение о структуре функций Z и Y , появляющихся в (6.8.16) и (6.8.28). На эти две последние функции обязательно имеются ограничения, поскольку они не должны нарушать наложенных нами условий на фурье-моды. Следовательно, они должны коммутировать или антикоммутировать с условиями непрерывности. Оказывается, что эти требования однозначно определяют Z и Y :

$$\begin{aligned} Z^I &= |2\alpha|^{-1/2} (P^I - \alpha \sum_{r,m} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r \alpha_m^{(r)I}), \\ Y^{\bar{A}} &= |\frac{1}{2}\alpha|^{1/2} (\Theta^{\bar{A}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r,m} \frac{m}{\alpha_r} \bar{N}_m^r R_{-m}^{(r)\bar{A}}). \end{aligned} \quad (6.8.29)$$

Наконец, приведем наш аппарат в действие. Коммутационные соотношения суперсимметрии должны генерировать $|H\rangle$. С помощью «грубой

силы» находим

$$|H\rangle = (2^{-1/2} Z^L - Z^i \rho_{\bar{A}\bar{B}}^i Y^{\bar{A}} Y^{\bar{B}} + \frac{\sqrt{2}}{3} Z^R \varepsilon^{ABCD} Y^{\bar{A}} Y^{\bar{B}} Y^{\bar{C}} Y^{\bar{D}}) |V\rangle. \quad (6.8.30)$$

Имея окончательное выражение для вершинных функций, удовлетворяющих условиям суперсимметрии, попытаемся переписать функции Z и Y . Как отмечалось выше, эти функции выбирались так, чтобы они коммутировали или антикоммутировали с условиями непрерывности. Поэтому мы подозреваем, что они в действительности обращаются в нуль всюду, кроме точки разрыва трех струн. Мы должны тщательно рассмотреть предел при приближении к точке разрыва, так как в ней функции легко могут оказаться расходящимися. В результате такого анализа мы можем переписать Z и Y в виде

$$Y^{\bar{A}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \right)^{1/2} (\theta_1^{\bar{A}}(\pi \alpha_1 - \varepsilon) + \tilde{\theta}_1^{\bar{A}}(\pi \alpha_1 - \varepsilon)), \quad (6.8.31)$$

$$Z^I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2} \varepsilon \pi p_1^I (\pi \alpha_1 - \varepsilon).$$

Наиболее важно здесь то, что обе функции Y и Z локальны на струне, т. е. отличны от нуля только в точке соединения струн. Таким образом, мы обошлись без нелокальностей, присутствие которых испортило бы лоренц-инвариантность.

§ 6.9. РЕЗЮМЕ

Ранее предполагалось, что полевая теория протяженных объектов невозможна по двум основным причинам:

- (1) Попытки Юкавы, Гейзенберга и других показали, что всякое отклонение от принципа локальности в квантовой механике влечет за собой нарушение принципа причинности. Возбуждение в одной точке капли распространялось бы через нее со скоростью, большей скорости света.
- (2) Теория не воспроизводила бы модель Венециано, потому что циклическая симметрия и многие другие свойства бета-функции сохраняются только на массовой поверхности, тогда как действие определяется вне массовой поверхности.
- (3) Теория не могла бы быть одновременно лоренц-инвариантной и унитарной вне массовой поверхности, поскольку процедуры квантования для струн, которая обеспечила бы и лоренц-инвариантность, и унитарность вне массовой поверхности, не существует.
- (4) Более того, в струнной теории полевая теория представлялась невозможной из-за проблемы «двойного счета», обусловленной дуальностью. Дуальные диаграммы уже сами представляют собой суммы по s - и t -канальным полюсам, и, следовательно, сложение

диаграмм с полюсами в каждом из различных каналов привело бы к многократному учету одних и тех же слагаемых, в особенности для многопетлевых диаграмм.

К счастью, полевая теория струн справляется со всеми этими проблемами. Первая проблема – нелокальность – разрешается введением *мультилокальной* теории. Таким образом, изменения в струнной топологии происходят только локально, т. е. струны могут разрываться или соединяться только в одной точке внутри струны или на их концах. Возбуждения от места разрыва распространяются со скоростью, равной или меньшей скорости света (мы пренебрегаем кулоновскими эффектами в калибровке светового конуса).

Полевая теория струн решает также и вторую проблему. Она действительно нарушает некоторые важные свойства модели Венециано, но тем не менее остается приемлемой, поскольку воспроизводит ее на массовой поверхности.

В-третьих, программа BRST-квантования является лоренц-инвариантной, но за это приходится расплачиваться введением духов, нарушающих унитарность вне массовой поверхности. Тем не менее окончательная S -матрица унитарна, так что ни один физический принцип не нарушается.

Наконец, полевая теория струн решает проблему дуальности посредством явного нарушения дуальности. Правильные дуальные диаграммы дает только сумма всех фейнмановских графов. Следовательно, на любой промежуточной стадии вычислений дуальность действительно отсутствует.

На протяжении всей книги мы подчеркивали, что вторично квантованный формализм позволяет вывести всю модель целиком, исходя лишь из одного действия. В частности, формализм светового конуса дает такую интерпретацию фейнмановского ряда, в которой струнная картина вполне ясна. В калибровке светового конуса *мы используем простейшее ограничение, заключающееся в том, что взаимодействия должны быть локальными*, т. е. струны могут либо разрываться, либо соединяться в изолированных внутренних точках струны или на ее концах. Это однозначно фиксирует в действии все члены взаимодействия. В частности, имеются члены, включающие четырехструнное взаимодействие.

Начнем вывод теории тем же способом, каким Фейнман получил уравнение Шрёдингера из классической механики. Мы используем фундаментальное соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \langle X_1, \tau_1 | X_2, \tau_2 \rangle = \langle X_1 | e^{-iH\tau} | X_2 \rangle \\ &= \int_{X_1}^{X_2} DX e^{i \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau) d\tau} \\ &= \int D^2 \Phi \Phi^*(X_1) \Phi(X_2) e^{i \int_{X_1}^{X_2} d\tau L(\Phi) DX}, \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

где

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma (\dot{X}_i^2 - X_i'^2),$$

$$L(\Phi) = \Phi^* (i\partial_\tau - H) \Phi,$$

$$H = \frac{\pi}{2} \int d\sigma \left(P_i^2 + \frac{X_i'^2}{\pi^2} \right).$$

Все эти соотношения можно доказать, просто подставляя различные наборы промежуточных состояний между начальным и конечным состояниями:

$$\text{Первичное квантование: } |X\rangle \int DX \langle X| = 1, \quad (6.9.2)$$

$$\text{Вторичное квантование: } |\Phi\rangle \int D^2\Phi e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle} \langle\Phi| = 1.$$

Полевой функционал не есть функция σ . Он является функционалом струнной переменной X , определяемой на области изменения σ :

$$\Phi(X) = \langle X|\Phi\rangle = \Phi[X(\sigma_1), X(\sigma_2), X(\sigma_3), \dots, X(\sigma_N)]. \quad (6.9.3)$$

Простейшим образом эта функция раскладывается по базисным состояниям, образованным всеми возможными элементами фоковского пространства:

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}} \varphi_{\{n\}} |\{n\}\rangle. \quad (6.9.4)$$

Так как Φ удовлетворяет струнному уравнению Шрёдингера, можно разложить полевой функционал по собственным функциям этого уравнения:

$$\varphi_{p^+, \{n\}}(\tau, X_i) = \int dp_i e^{i(p \cdot x - E_{\{n\}}\tau)} A_{p^+, p_i, \{n\}}. \quad (6.9.5)$$

Отметим, что A является оператором рождения/уничтожения всех возможных состояний струны, поэтому он соответствует бесконечно-компонентной полевой теории. Наложение стандартных канонических коммутационных соотношений заставляет нас выбрать

$$[A_{p^+, p_i, \{n\}}, A_{q^+, q_j, \{m\}}^\dagger] = \delta(p^+ - q^+) \delta(p_i - q_j) \delta_{\{n\}, \{m\}}. \quad (6.9.6)$$

Теперь можно разложить полевой функционал Φ по этим собственным функциям:

$$\begin{aligned} \langle X|\Phi\rangle &= \Phi_{p^+}(X) \\ &= \sum_{\{n\}} \int \prod_i dp_i A_{p^+, p_i, \{n\}} H_{\{n\}}(X) e^{-\sum_i X_i'^2} e^{i(p \cdot x - E_{\{n\}}\tau)}. \end{aligned} \quad (6.9.7)$$

Мы можем воспроизвести все тождества, найденные в полевой теории. В частности, можно показать, что функция Грина представляет собой матричный элемент двух полей:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \langle\langle 0 | \Phi_{p^+}^\dagger(X_1, \tau_1) \Phi_{q^+}(X_2, \tau_2) | 0 \rangle\rangle \\ &= \delta(p^+ - q^+) \int DX e^{i \int L d\sigma d\tau} \prod_{\sigma} \delta(X(\sigma, \tau_1) - X_1(\sigma)) \\ &\quad \times \prod_{\sigma} \delta(X(\sigma, \tau_2) - X_2(\sigma)). \end{aligned} \quad (6.9.8)$$

Взаимодействия однозначно определяются нашим правилом, согласно которому локальная топология может изменяться только локально. Таким образом, трехструнная вершинная функция определяется дельта-функцией:

$$S_3 = \int dp^{+r} \delta\left(\sum_{r=1}^3 p^{+r}\right) \int DX_{123} \Phi^\dagger(X_3) \Phi^\dagger(X_1) \Phi(X_2) \delta_{123} + \text{h.c.} \quad (6.9.9)$$

К счастью, интегрирование по струнам оказывается гауссовским и может быть выполнено до конца. В результате интегрирования находим

$$\begin{aligned} |V_{123}\rangle &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{(r)} N_{mn}^{rs} \alpha_{-n}^{(s)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} N_m^r \alpha_{-m}^{(r)} \mathbf{P} + K \mathbf{P}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.9.10)$$

где

$$N_{mn}^{rs} = (C^{-1})_{mn} \delta_{rs} - 2(mn)^{1/2} (A^{(r)T} \Gamma^{-1} A^{(s)}), \quad (6.9.11)$$

а

$$\begin{aligned} N_m^r &= -(m)^{-1/2} (A^{(r)T} \Gamma^{-1} B)_m, \\ K &= -\frac{1}{4} B \Gamma^{-1} B, \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

$$\Gamma = \sum_{r=1}^3 A^{(r)} A^{(r)T}.$$

Теперь нам нужно показать, что эта вершинная функция способна воссоздать обычную модель Венециано. Простейший способ увидеть это заключается в том, чтобы вычислить функцию Неймана для трехструнной конфигурации в первично квантованном формализме и затем сравнить результаты. Отправной точкой служит преобразование Манделстама:

$$\rho = \alpha_1 \ln(z-1) + \alpha_2 \ln z.$$

Так как нам известна функция Грина в верхней полуплоскости, мы просто берем фурье-компоненты неймановской функции. Фурье-коэф-

коэффициенты выглядят как

$$\begin{aligned}
 N_{mn}^{rs} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\eta_r d\eta_s e^{-m\zeta_r - n\zeta_s} \ln(z(\zeta_r) - z(\zeta_s)) \\
 &= -\frac{1}{mn(2\pi)^2} \int_{x_r} dz_r \int_{x_s} dz_s \frac{e^{-m\zeta_r(z_r) - n\zeta_s(z_s)}}{(z_r - z_s)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.9.13}$$

Теперь подставим в данную формулу функцию Неймана, определенную в верхней полуплоскости, и прямым вычислением получим

$$\begin{aligned}
 N_{n,m}^{r,s} &= -\frac{mn}{m\alpha_s + n\alpha_r} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 N_m^r \bar{N}_n^s, \\
 \bar{N}_m^r &= \alpha_r^{-1} f_m(-\alpha_{r+1}/\alpha_r) \exp(m\tau_0/\alpha_r),
 \end{aligned} \tag{6.9.14}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_n(\gamma_r) &= (n\gamma_r)^{-1} \binom{n\gamma_r}{n}, \\
 K &= -\tau_0/(2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), \\
 \tau_0 &= \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln|\alpha_r|, \\
 \mathbf{P} &= \alpha_1 p_2^i - \alpha_2 p_1^i.
 \end{aligned} \tag{6.9.15}$$

Рассмотрим теперь вопрос о суперструнах в GS-формализме светового конуса. Теперь имеется два набора осцилляторов, бозонные и фермионные. Наша основная стратегия состоит в угадывании анзаца для вершинной функции и подчинении его условиям непрерывности при перекрытии взаимодействующих струн. Основываясь на аналогии с бозонной теорией, мы полагаем

$$|V\rangle = Z_i \exp[\Delta_0 + \Delta_S] |0\rangle \delta(\sum_r \alpha_r) \delta(\sum_r p_r^i) \delta(\sum_r \alpha_r \theta_r^{\bar{A}}), \tag{6.9.16}$$

где

$$\Delta_S = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{r,s=1}^3 R_{-m}^{(r)A} U_{mn}^{rs} R_{-n}^{(s)\bar{A}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 V_m^r R_{-m}^{(r)\bar{A}} \Theta^{\bar{A}}. \tag{6.9.17}$$

В гл. 3 было показано, что первично квантованные суперсимметричные генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
 \{q^{-A}, q^{-\bar{B}}\} &= 2h\delta^{A\bar{B}}, \\
 \{q^{-A}, q^{-B}\} &= \{q^{-\bar{A}}, q^{-\bar{B}}\} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.9.18}$$

Мы должны показать, что вторично квантованные варианты этих генераторов суперсимметрии также удовлетворяют данным соотноше-

ниям. Возьмем анзац

$$|Q^{-\bar{A}}\rangle = Y^{\bar{A}}|V\rangle, \quad (6.9.19)$$

$$|Q^{-A}\rangle = k\varepsilon^{ABCD} Y^{\bar{B}} Y^{\bar{C}} Y^D |V\rangle.$$

Замечательно, что всем условиям, наложенным на вершинную функцию, можно удовлетворить, выбрав

$$Y^{\bar{A}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{1/2} (\theta_1^{\bar{A}}(\pi\alpha_1 - \varepsilon) + \tilde{\theta}_1^{\bar{A}}(\pi\alpha_1 - \varepsilon)), \quad (6.9.20)$$

$$Z^I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2} \varepsilon \pi p_1^I (\pi\alpha_1 - \varepsilon).$$

По поводу этой вершины можно упомянуть, что от нее еще требуется выполнение условия локальности. Дополнительные вставки с Y и Z присутствуют только в точке разрыва струны, поэтому локальность сохраняется. Итак, наша общая трактовка теории в формализме светового конуса согласуется с изначально постулированным принципом локальности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kaku M., Kikkawa K. Phys. Rev. **D10**, 1110, 1823 (1974).
- [2] Kaku M. Introduction to the Field Theory of Strings. Lewes Superstring Workshop, World Scientific, Singapore, 1985.
- [3] Kaku M. String Field Theory. Int. J. Mod. Phys. **A2**, 1 (1987).
- [4] West P. Gauge-Covariant String Field Theory, CERN-TH-4660/86, June 1986.
- [5] Banks T. Gauge Invariant Actions for String Models, SLAC-PUB-3996.
- [6] Cremmer E., Gervais J. L. Nucl. Phys. **B76**, 209 (1974); Nucl. Phys. **B90**, 410 (1975); см. также Ademollo M., Del Giudice E., Di Vecchia P. and Fubini S. Nuovo Cimento **19A**, 181 (1974).
- [7] Hopkinson J. F. L., Tucker R. W. and Collins P. A. Phys. Rev. **D12**, 1653 (1975)
- [8] Mandelstam S. Nucl. Phys. **B64**, 205 (1973); **B69**, 77 (1974).
- [9] Green M., Schwarz J. H. and Brink L. Nucl. Phys. **B219**, 473 (1983); **B243**, 475 (1984).
- [10] Alvarez O. Nucl. Phys. **B216**, 125 (1983).
- [11] McKean H. P., Jr., Singer I. M. J. Diff. Geom. **1**, 43 (1967).
- [12] Mandelstam S. In: Unified String Theories (edited by M. B. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1986.
- [13] Green M. B., Schwarz J. H. Phys. Lett. **149B**, 117 (1984); Nucl. Phys. **B128**, 43 (1983); Nucl. Phys. **B243**, 475 (1984).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

За время, прошедшее с момента написания этой книги, полевая теория струн получила дальнейшее развитие. Следует отметить несколько направлений. Методы конформной теории применительно к струнной полевой теории развивались

в работах [2] (см. также обзор [3]). Теория фермионной струны была построена в работах [4, 5]. Была создана неполиномиальная теория замкнутой бозонной струны [6–9], инкорпорировавшая в себя фундаментальные понятия современной дифференциальной геометрии, часть из которых обсуждается в этой книге. Следует отметить и неожиданно возникшую модель критической двумерной струны, обладающей чрезвычайно богатой симметрией структурой [10–16]. Ковариантная полевая теория открытых бозонных струн с вершиной, непосредственно обобщающей вершину в калибровке светового конуса, была предложена также в работах [1].

1. И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Теор. и мат. физика, т. 67 (1986) № 2, 309; № 3, 484; I. Ya. Arefeva, I. V. Volovich, Phys. Lett. 182B (1986) 159, 312.
2. S. Samuel, Nucl. Phys. B296 (1988) 187; B308 (1988) 285, 317; R. Bluhm and S. Samuel, Nucl. Phys. B323 (1989) 337.
3. C. Thorn, Phys. Rep. 175 (1989) 1.
4. C. R. Pritschopf, C. B. Thorn, S. A. Yost, Nucl. Phys. B341 (1990) 157.
5. I. Ya. Arefeva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, Nucl. Phys. B341 (1990) 464; Phys. Lett. 246B (1990) No. 3, 4.
6. T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Suehiro, Phys. Lett 226B (1989) 48.
7. M. Saadi and B. Zwiebach, Ann. Phys. 192 (1989) 213.
8. M. Kaku, Phys. Lett. 250B (1990) 64.
9. B. Zwiebach, Nucl. Phys. B390 (1993) 33.
10. A. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 635.
11. L. Klebanov and A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 3273.
12. P. Bouwknegt, J. McCarthy and K. Pilch, Com. Math. Phys. 145 (1992) 541.
13. I. Ya. Arefeva, A. P. Zubarev, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 677; A8 (1993) 1469; I. Ya. Arefeva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 2167.
14. B. Urošević, Phys. Rev. D15, 47 (1993) 5460; Phys. Rev. D15, 48 (1993) 5827.
15. N. Sakai, Y. Tani, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 2541.
16. E. Witten, Nucl. Phys. B373 (1992) 187; E. Witten and B. Zwiebach, Nucl. Phys. B377 (1992) 55.

§ 7.1. КОВАРИАНТНАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ СТРУН

Большое преимущество полевой теории в калибровке светового конуса, как мы видели, заключалось в том, что она была унитарной, явно свободной от духов и могла воспроизвести струнные амплитуды из одного действия. Отсутствовала необходимость обращаться к интуиции для построения унитарной s -матрицы.

Тем не менее эта теория несовершенна. Дело в том, что хотелось бы иметь ковариантное описание, в котором задействованы все калибровки струны. Поэтому наш следующий шаг в развитии полевой теории струн – это использование техники BRST для ковариантного описания струнных полей. Сила формализма BRST обуславливается тем, что он позволяет переформулировать полевую теорию струн в полностью ковариантном виде с введением духов Фаддеева – Попова.

Мы перейдем к полевой теории тем же способом, каким Фейнман пришел к уравнению Шрёдингера из классической первично квантованной теории. Начав с формализма BRST первично квантованной теории, мы затем получим описание на языке полевых функционалов. Особое внимание следует обратить на то, что полевая теория BRST, подобно формализму светового конуса, все еще остается теорией в фиксированной калибровке. Поскольку теория BRST будет выведена из калибровочно фиксированной первично квантованной теории, то мы обнаружим довольно странные объекты первично квантованной теории, наследуемые вторично квантованной теорией, такие, как духи Фаддеева – Попова, духовые числа, параметризационные средние точки и параметризационные длины.

В этом тоже есть некоторая ирония. Первоначально полевая теория в калибровке светового конуса была введена, чтобы представить последовательный и всесторонний формализм, в рамках которого можно выразить полную теорию. К сожалению, попытки сделать модель ковариантной привели к созданию двух конкурирующих ковариантных полевых теорий струн в рамках BRST. Эти две BRST-теории основываются на совершенно различных струнных топологиях, и между ними не видно никакой связи, кроме того, что они обе могут успешно воспроизвести модель Венециано.

Все эти трудности будут устранены, когда мы, наконец, дойдем до геометрического варианта полевой теории в следующей главе.

Ранее мы видели, что формализм Гупты – Блейлера вместо решения уравнений связей (как в формализме светового конуса) налагает связи непосредственно на состояния:

$$L_n |\varphi\rangle = 0; \quad n > 0. \quad (7.1.1)$$

Естественно ожидать, что действие позволяет распространяться всем 26 компонентам теории. Это, однако, не так, если мы позаботимся учесть влияние связей, наложенных на векторы состояний. Результат применения предыдущего уравнения состоит в уничтожении духовых состояний в спектре.

Кроме того, существует другой способ устранения духовых состояний — действовать по аналогии с калибровочной теорией. Вместо наложения связей на гильбертово пространство, мы потребуем, чтобы действие было инвариантным при преобразованиях, превращающих поле Φ в духовое состояние:

$$\delta|\Phi\rangle = \sum_n L_{-n}|\Lambda_n\rangle. \quad (7.1.2)$$

Отметим, что состояние $L_{-n}|\Lambda\rangle$ является духовым состоянием (см. (2.9.3)). Такой выбор мотивируется аналогией с электромагнетизмом, где имеется калибровочная симметрия:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda. \quad (7.1.3)$$

Действие для поля Максвелла остается неизменным при добавлении к полю A_μ духового поля $\partial_\mu \lambda$. Докажем теперь, что струнная вариация действительно содержит калибровочные вариации как поля Максвелла, так и линеаризованного гравитационного поля. Как мы видели в (6.3.19), полевой функционал $|\Phi\rangle$ представляет сумму по всем возможным состояниям струны. Разложим поля по их компонентам:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \varphi(x)|0\rangle + A_\mu a^\mu_{-1}|0\rangle + \dots, \\ |\Lambda\rangle &= \lambda(x)|0\rangle + \dots, \\ L_{-1} &= k_1 \cdot a_{-1} + \dots \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Подставляя это разложение в калибровочное преобразование струнного поля (7.1.2), находим

$$\delta A_\mu a^\mu_{-1}|0\rangle + \dots = \partial_\mu \lambda a^\mu_{-1}|0\rangle + \dots \quad ;$$

Приравнивая члены разложения, получаем (7.1.3). Таким образом, мы вывели калибровочное преобразование поля Максвелла, раскладывая полевой функционал [1–3].

Подобным образом можно также доказать, что сектор замкнутых струн содержит линеаризованное гравитационное поле. Потребуем

$$\delta|\psi\rangle = \sum_n L_{-n}|\Lambda_n\rangle + \bar{L}_{-n}|\bar{\Lambda}_n\rangle, \quad (7.1.5)$$

где черта означает второе независимое гильбертово пространство. Разложив это выражение, приходим к

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \varphi(x)|0\rangle + h_{\mu\nu} a^\mu_{-1} \bar{a}^\nu_{-1}|0\rangle + \dots, \\ |\Lambda\rangle &= \lambda_\mu \bar{a}^\mu_{-1}|0\rangle + \dots, \end{aligned}$$

$$|\bar{A}\rangle = \lambda_\mu a_{-1}^\mu |0\rangle + \dots, \quad (7.1.6)$$

$$L_{-1} = k_\mu a_{-1}^\mu + \dots,$$

$$\bar{L}_{-1} = k_\mu \bar{a}_{-1}^\mu + \dots$$

Объединяя все вместе, получаем

$$\delta h_{\mu\nu} a_{-1}^\mu \bar{a}_{-1}^\nu |0\rangle + \dots = \partial_\mu \lambda_\nu a_{-1}^\mu \bar{a}_{-1}^\nu |0\rangle + (\mu \leftrightarrow \nu) + \dots \quad (7.1.7)$$

Приравнивая коэффициенты, находим

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu, \quad (7.1.8)$$

т. е. восстанавливается первоначальная вариация линейризованного гравитационного поля.

Наша следующая цель – найти действие, которое было бы инвариантным при таких калибровочных преобразованиях.

Повторим рассуждения предыдущей главы, касающиеся того, как вывести полевую теорию струн из первично квантованного формализма. Ключевой шаг заключался в подстановке полного набора промежуточных состояний в каждую промежуточную точку между двумя струнными состояниями. Теперь подстановка промежуточных состояний осложняется необходимостью сохранения калибровочных связей на каждом шаге вычислений. Обобщая (6.3.29), находим, следовательно, новый ряд промежуточных состояний

$$1 = P |X\rangle \int DX \langle X | P, \quad (7.1.9)$$

где P – проекционный оператор, который гарантирует, что духовые состояния уничтожаются на каждом промежуточном шаге вычислений. Он удовлетворяет условиям [4]

$$L_n P = P L_{-n} = 0; \quad P^2 = P.$$

Повторяя шаги предыдущей главы, использованные при выводе лагранжиана из континуального интеграла, находим, что теперь действие должно иметь вид

$$L = \Phi P [L_0 - 1] P \Phi. \quad (7.1.10)$$

Важнейшее значение имеет тот факт, что это действие обладает локальной калибровочной симметрией (7.1.2). Локальная калибровочная симметрия отвечает за уничтожение духов, возникающих в пропагаторе, который без проекционного оператора описывал бы распространение всех 26 мод.

Окажется полезным разложить это действие в степенной ряд и затем сравнить результаты с максвелловским действием и действием для гравитационного поля. В низшем порядке проекционный оператор в действии можно переписать в виде

$$\langle \Phi | (L_0 - \frac{1}{2} L_1 L_{-1} + \dots) | \Phi \rangle. \quad (7.1.11)$$

Так как $L_{-1} \sim k \cdot a_1$, $|\Phi\rangle \sim A_\mu a_{-1}^\mu$ и $L_0 \sim \square$, то, разложив это выражение для наимизших возбужденных состояний, получим

$$\langle 0 | A_\mu a_1^\mu (\square - k_\nu a_1^\nu k_\rho a_{-1}^\rho) A_\sigma a_{-1}^\sigma | 0 \rangle, \quad (7.1.12)$$

что сводится к

$$A_\mu (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu, \quad (7.1.13)$$

что, конечно, пропорционально действию Максвелла. Следовательно, в наимизшем порядке действие (7.1.10) содержит теорию Максвелла. Подобным же образом можно повторить все рассуждения и показать, что действие замкнутой струны воспроизводит линеаризованное гравитационное действие. На следующем уровне, однако, имеются сложности.

В результате трудоемких вычислений мы можем разложить проекционный оператор до следующих уровней и найти

$$\begin{aligned} P(L_0 - 1)P &= L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1 \\ &+ L_{-1}^2(4L_0 + \frac{1}{2}D - 9)\Delta L_1^2 \\ &+ L_{-1}^2(6L_0 + 6)\Delta L_2 + \\ &- L_{-2}(4L_0 + 2)(2L_0 + 2)\Delta L_2 + \dots, \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

где

$$\Delta = 2(16L_0^2 + (2D - 10)L_0 + D)^{-1}. \quad (7.1.15)$$

Оператор Δ нелокальный, так как он содержит обратный к полиному по p^2 . Например, известно, что оператор p^{-2} нелокален, потому что он равен фейнмановскому пропагатору в x -пространстве:

$$\Delta(x - y) = \langle x | \frac{1}{\square} | y \rangle.$$

Поскольку x и y — две различные точки пространства, выражение p^{-2} в x -пространстве оказывается нелокальным.

К счастью, существует способ устранения нелокальностей, вносимых полиномами от p^{-2} , который состоит во введении дополнительных полей. Например, рассмотрим лагранжиан

$$\psi A \psi + \psi B \phi, \quad (7.1.16)$$

где A и B — операторы. Устраняя поле ψ (решая уравнение движения для ψ и подставляя его обратно в лагранжиан или выполняя функциональное интегрирование по ψ в континуальном интеграле), находим редуцированный лагранжиан:

$$-\frac{1}{4}\phi B A^{-1} B \phi. \quad (7.1.17)$$

Если A — полином от p^2 , то A^{-1} — нелокальный оператор. Таким образом, мы можем избавиться от нелокальных действий путем введения допол-

нительных полей. Так как эти произвольные поля выпадают из окончательного действия (поскольку представляют собой духи), они никак не влияют на физику.

Теперь нам нужно построить явную форму полного проекционного оператора для всех уровней. Оператор P можно построить несколькими способами, представив его как степенное разложение по операторам L_n или как проектор на каждое состояние N -го уровня. Мы воспользуемся последней из этих возможностей.

Сначала определим *модуль Верма* (см. (4.1.42)) как ряд всех возможных повышающих операторов $L_{-\alpha}$, действующих на вакуум $|0\rangle$ ($\alpha_i < \alpha_{i+1}$):

$$L_{-\{\alpha\}} |0\rangle \equiv L_{-\alpha_1}^{\lambda_1} L_{-\alpha_2}^{\lambda_2} \dots L_{-\alpha_N}^{\lambda_N} |0\rangle. \quad (7.1.18)$$

Здесь $\{\alpha\}$ символически представляет обширную совокупность индексов. Предположим, что проекционный оператор P имеет вид

$$P = 1 + \sum_{\alpha, \beta} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta} (L_0) L_{\beta}, \quad (7.1.19)$$

где $F_{\alpha\beta}$ — произвольные функции L_0 , символы α и β используются для выражения большого количества индексов. Потребовав, чтобы результат умножения оператора P на операторы Вирасоро обращался в нуль, мы точно определим матрицу F . Пусть P представляет духовый проекционный оператор. Тогда

$$P = 1 - P^S, \quad (7.1.20)$$

$$P^S = - \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta}^N (L_0) L_{\beta}.$$

Здесь в явном виде выписана сумма по различным уровням N . Требуя, чтобы оператор обращался в нуль при умножении на L_n , мы получаем рекуррентное соотношение для полиномов F . Определим F -матрицу как

$$F_{\alpha\gamma}^N (L_0) \equiv \sum_{\beta} [\delta_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}^{N-1} (L_0)] (S^{-1})_{\beta\gamma}^N (L_0), \quad (7.1.21)$$

где матрицы A и S остается определить. Потребовав, чтобы оператор P обладал нужными свойствами, получаем рекуррентное соотношение, позволяющее найти матрицу A итеративно:

$$\sum_{M=1}^{N-1} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=M}}^{p(M)} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta}^M (L_0) L_{\beta} L_{-\gamma} |R\rangle \equiv L_{-\delta} A_{\delta\gamma}^{N-1} (L_0) |R\rangle. \quad (7.1.22)$$

И наконец, матрица S определяется как

$$S_{\alpha\beta} |R\rangle \equiv L_{\alpha} L_{-\beta} |R\rangle, \quad (7.1.23)$$

где $|R\rangle$ — физическое состояние, а $|\alpha|$ равняется $\sum_{i=1}^n i\lambda_i$.

Отметим, что это разложение является итерационным. N -й уровень определяется через все N и более низкие состояния. Таким образом, зная проекционный оператор для первых нескольких уровней, который был явно выписан в (7.1.14), мы находим проекционный оператор на всех уровнях N .

Проекционный оператор нелокален по p^2 . Но так как мы можем вычислить F точно, это легко исправить, поскольку нам известно точное расположение всех нулей детерминанта.

К счастью, детерминант матричных элементов модуля Верма известен точно. Так, на уровне N детерминант матричного элемента между $\langle 0 | L_\alpha$ и $L_{-\beta} | 0 \rangle$ имеет вид

$$\det |\langle 0 | L_\alpha L_{-\beta} | 0 \rangle| = \prod_{p,q} (L_0 - H_{p,q})^{p(N-pq)},$$

$$h_{p,q} = [(mq - (m+1)p)^2 - 1] / 4m(m-1), \quad (7.1.24)$$

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)},$$

где p и q — целые положительные числа, произведение которых меньше или равно N . Эта замечательная формула, впервые полученная Кацем [5], имеет многочисленные ответвления. Например, ненулевой детерминант Каца означает, что матрица S , введенная в (7.1.23), является обратимой. В этом случае модуль Верма образует неприводимое представление конформной группы. Следовательно, детерминант Каца является существенным элементом в определении неприводимых представлений струнной модели.

Основное применение этого результата заключается в определении расположения всех нулей детерминанта и, следовательно, в определении всех полюсов проекционного оператора. Подставляя (7.1.19) в действие, находим

$$\Phi^* \left[L_0 - 1 - \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=M}}^{p(M)} L_{-\alpha} \hat{F}_{\alpha\beta}^M L_\beta \right] \Phi. \quad (7.1.25)$$

Здесь F связана с \hat{F} умножением на L_0 . Преимущество такого выражения состоит в знании расположения всех полюсов матрицы \hat{F} .

Повторим анализ (7.1.16) и (7.1.17), где были введены дополнительные поля, для того чтобы поглотить нелокальные члены в действии. Сначала выделим в \hat{F} полюса:

$$\hat{F}_{\alpha\beta}^N(L_0) = \sum_{l,m} A_{\alpha\beta}^{Nlm} [L_0 - a_{\alpha\beta}^{Nl}]^{-m} + B_{\alpha\beta}^N. \quad (7.1.26)$$

Теперь мы можем ввести вспомогательные поля ρ для поглощения дополнительных нелокальных членов, содержащихся в \hat{F} :

$$\begin{aligned}
& \Phi^* \left[L_0 - 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} L_{-\alpha} B_{\alpha\beta}^N L_{\beta} \right] \Phi \\
& + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} \rho_{\alpha}^{*Nlm} (L_0 - a_{\alpha\beta}^{Nl})^m \rho_{\beta}^{Nlm} \\
& + \rho_{\alpha}^{*Nlm} (A_{\alpha\beta}^{Nlm})^{1/2} L_{\beta} \Phi \\
& + \Phi^* [L_{-\alpha} (A_{\alpha\beta}^{Nlm})^{1/2}] \rho_{\beta}^{Nlm}. \tag{7.1.27}
\end{aligned}$$

Итак, посредством таких рассуждений мы показали, что действие можно переписать в форме, явно локальной по p^2 . Однако цена, которой мы добились локальности, — это введение бесконечного набора вспомогательных полей ρ_{α}^{Nlm} . Поиск простого способа, позволяющего компактно представить эту формулу, составляет нашу следующую задачу.

Для того чтобы переписать члены вышеприведенного действия более элегантно, понадобится использовать мощь симметрии. Во-первых, мы применим формализм BRST, в котором эти дополнительные поля можно проинтерпретировать как «духовые степени свободы Фаддеева–Попова». При этом окажется, что поля допускают представление в терминах состояний, определенных для антикоммутирующих духовых полей.

Во-вторых, тот факт, что эти дополнительные поля образуют модуль Верма, служит указанием на теоретико-групповое происхождение духовых полей. Духовые поля BRST сами по себе — странные объекты во вторично квантованной полевой теории, но присутствие модуля Верма показывает, что они на самом деле представляют собой проявление более глубокой симметрии. Это ключевое наблюдение о том, что дополнительные поля образуют пространство представления конформной группы, данное модулем Верма, сыграет решающую роль в развитии геометрической формулировки теории в следующей главе. Геометрический формализм гл. 8 позволит нам перегруппировать члены в приведенном выше действии компактным теоретико-групповым способом, основанным на тензорном произведении неприводимых представлений новой бесконечномерной группы Ли. Мы покажем, что эти духовые поля представляют *касательное пространство* новой бесконечномерной группы Ли.

§ 7.2. ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ BRST

Для выражения дополнительных полей ρ_{α}^{Nlm} , введенных в (7.1.27), в формализме BRST используются духи Фаддеева–Попова. Эти духи уничтожают 2 из 26 мод, оставляя требуемые 24 физические моды.

Пересмотрим основные положения первично квантованной струнной полевой теории BRST. В лагранжиане мы выбираем конформную

калибровку, записанную в форме $\lambda = 1$; $\rho = 0$. Тогда детерминант Фаддеева–Попова для фиксации конформной калибровки можно представить как

$$\Delta_{FP} \int d\epsilon d\eta \delta[\lambda(\epsilon, \eta) - 1] \delta[\rho(\epsilon, \eta)] \equiv 1.$$

Этот детерминант в свою очередь вычисляется в явном виде путем введения духового поля Фаддеева–Попова по переменной θ , как в (1.6.22):

$$\Delta_{FP} = \int d\theta \delta p_\theta \exp - i \int d\sigma d\tau L(\theta, p_\theta), \quad (7.2.1)$$

где

$$L(\theta, p_\theta) = p_\theta^1 (\partial_\sigma + \partial_\tau) \theta^1 + p_\theta^2 (\partial_\tau - \partial_\sigma) \theta^2. \quad (7.2.2)$$

Заметим, что это выражение позволяет нам переписать первоначальное действие теории, включив духи Фаддеева–Попова:

$$L(\sigma, \tau) = P_\mu \dot{X}_\mu - \frac{1}{2} [P_\mu^2 + X_\mu'^2 + p_\theta \rho \partial_\sigma \theta], \quad (7.2.3)$$

где ρ – спиновая матрица Паули σ_z .

Как и раньше, этот лагранжиан имеет локальную калибровочную инвариантность, которая на полях может генерироваться применением нильпотентного оператора Q [7]. Чтобы убедиться в этом, сделаем двумерный виковский поворот и перепишем действие в явно конформно инвариантном виде через комплексную переменную z и антикоммутирующие поля b и c . Переписывая (7.2.2), находим, как и в (2.4.4),

$$L = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu + b \partial_{\bar{z}} c + \bar{b} \partial_z \bar{c} \right\}. \quad (7.2.4)$$

Здесь мы опять видим, что лагранжиан инвариантен при преобразованиях

$$\begin{aligned} \delta X_\mu &= \varepsilon [c \partial_z X_\mu + \bar{c} \partial_{\bar{z}} X_\mu], \\ \delta c &= \varepsilon [c \partial_z c], \\ \delta \bar{c} &= \varepsilon [\bar{c} \partial_{\bar{z}} \bar{c}], \\ \delta b &= \varepsilon \left[c \partial_z b + 2 \partial_z c b - \frac{1}{2} \partial_z X_\mu \partial_z X^\mu \right], \\ \delta \bar{b} &= \varepsilon \left[\bar{c} \partial_{\bar{z}} \bar{b} + 2 \partial_{\bar{z}} \bar{c} \bar{b} - \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu \right]. \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Используя эти вариации, мы можем выделить нильпотентный BRST-оператор Q . Однако важно также отметить, что и в общем случае, имея любую алгебру Ли с коммутационными соотношениями $[\lambda_m, \lambda_n] = f_{mn}^p \lambda_p$, возможно сконструировать нильпотентный оператор Q из антикоммутирующих операторов c_n и b_m [8]:

$$Q = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} \left[\lambda_n - \frac{1}{2} f_{nm}^p c_{-m} b_p \right]. \quad (7.2.6)$$

Для нашего случая мы имеем два набора духов Фаддеева–Попова с

$$\{c_m, b_m\} = \delta_{n, -m}. \quad (7.2.7)$$

Таким образом, наш нильпотентный BRST-оператор можно написать так:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} :c_{-n} \left(L_n + \frac{1}{2} L_n^{bc} \right) \\ &= c_0(L_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-n} L_n + L_{-n} c_n] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,m=\infty}^{\infty} :c_{-m} c_{-n} b_{n+m} : (m - n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_n^{bc} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m + n) :b_{n-m} c_m :, \\ Q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Последнее тождество фиксирует размерность пространства–времени равной 26 и интерсепт равным 1.

Следуя аналогии со случаем точечной частицы, можно сделать переход ко вторично квантованному формализму, используя разбиение временного интервала. На этот раз, однако, благодаря наличию духов Фаддеева–Попова базисное состояние $|X\rangle$ заменяется полным набором промежуточных состояний $|X, \theta\rangle$. Это означает, что при подстановке бесконечного набора промежуточных состояний в континуальный интеграл мы должны также подставить полный набор промежуточных состояний, соответствующий духам Фаддеева–Попова. Так как переменная θ входит в континуальный интеграл вместе с производной по π , у нас нет другого выхода, кроме как включить ее в полный ряд промежуточных состояний при факторизации функционального интеграла. Следовательно, наш полевой функционал Φ становится функцией этих духовых полей. Выражения (6.3.29) и (7.1.9) заменяются на

$$\begin{aligned} 1 &= |\theta\rangle |X\rangle \int DX D\theta \langle \theta | \langle X |, \\ \langle \theta | \langle X | \Phi &= \Phi(X, \theta). \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Функция Грина в (6.3.34) приводится к виду

$$\begin{aligned} \Delta(X_i, \theta_i; X_j, \theta_j) &= \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX DP D\theta DP_0 \exp i \int d\sigma d\tau L(\sigma, \tau) \\ &= \int D^2 \Phi \Phi(X_i, \theta_i) \Phi^*(X_j, \theta_j) \\ &\quad \times \exp i \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX D\theta L(\Phi). \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Основной полевой функционал теперь – функция духовых полей Фад-

деева–Попова θ . Делая переход от $|X\rangle|\theta\rangle$ к $|\Phi\rangle$, находим

$$L = \langle \Phi | [L_0 - 1] | \Phi \rangle, \quad (7.2.11)$$

где L_0 – функция обеих переменных, X и θ . Это действие было написано Зигелем [9–14]. Если мы разложим BRST-поле $|\Phi\rangle$ по его духовым модам, то получим

$$|\Phi(X)\rangle = \sum_{\{p\}\{q\}} \varphi_{\{p\}\{q\}}(X) \{b_{-p}\} \{c_{-q}\} |-\rangle.$$

Это действие явным образом описывает распространение не только 26 степеней свободы струны, но также и двух духовых мод, представляя теорию с 24 физическими модами. Отметим, что в этом выражении берется сумма по всем возможным духовым числам.

В приведенном выше действии калибровка фиксирована полностью. Однако имеется возможность построить другое действие, основанное на нильпотентности оператора Q , которое содержит явную калибровочную степень свободы. Заменяем (7.1.2) новым калибровочным преобразованием. Ранее отмечалось, что (7.1.2) выводится на основании того, что оно должно превращать струнное поле в духовое поле. При этом в BRST-формализме физическое условие $L_n|\text{физ}\rangle = 0$ заменяется требованием $Q|\text{физ}\rangle = 0$, и мы начинаем подозревать, что новая калибровочная инвариантность BRST имеет вид

$$\delta|\Psi\rangle = Q|\Lambda\rangle. \quad (7.2.12)$$

Подтверждением нашей догадки служит то, что состояние $\langle\Lambda|Q$ не взаимодействует с физическими состояниями $|\text{физ}\rangle$. Так как Q уже нильпотентен, мы выбираем новое действие [15–24]

$$L = \langle\Psi|Q|\Psi\rangle. \quad (7.2.13)$$

Здесь берется только «обрезанное» первоначальное поле, соответствующее духовому числу $-1/2$:

$$|\Psi\rangle = P_{-1/2}|\Phi\rangle. \quad ;$$

Здесь P – проекционный оператор, выделяющий только состояния с духовым числом $-1/2$. Поэтому новое поле $|\Psi\rangle$ – это поднабор состояний, или транкирование первоначального поля $|\Phi\rangle$.

Разлагая это действие, мы видим, что наименьшее возбужденное состояние поля $|\Psi\rangle$ точно подчиняется (7.1.10). Тем самым мы указали желаемое обобщение нашего действия, в котором введенные нами дополнительные поля теперь перегруппировываются в соответствии с разложением по модам для $|\Psi\rangle$. В итоге (7.1.27) компактно переформулирована как (7.2.13).

Уравнение движения, соответствующее этому действию, имеет вид

$$Q|\Psi\rangle = 0 \quad (7.2.14)$$

и для нижнего состояния сводится к обычным связям $L_n|\phi\rangle = 0$.

§ 7.3. ФИКСАЦИЯ КАЛИБРОВКИ

Покажем, что в предыдущем действии калибровка может быть фиксирована таким образом, что при этом получится или действие (7.2.11), или действие в калибровке светового конуса (6.3.33). Для фиксации калибровки иногда полезно разложить оператор Q в соответствии с его нулевыми модами:

$$Q = c_0 K - 2b_0 R + d + \delta, \quad (7.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} K &= L_0 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (nc_{-n}c_n + nb_{-n}b_n), \\ R &= - \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}c_n, \\ d &= c_{-n} \left(L_n + f_{-m,n}^p b_{-p} c_m + \frac{1}{2} c_{-m} f_{mn}^p b_{-p} \right), \\ \delta &= c_n \left(L_{-n} + f_{m,-n}^{-p} c_{-m} b_p + \frac{1}{2} b_{-p} f_{-m,-n}^p c_m \right), \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

а f -структурные константы алгебры Вирасоро. Так как оператор Q нильпотентен, эти операторы должны удовлетворять большому числу простых тождеств:

$$\begin{aligned} d^2 &= \delta^2 = 0, \\ [K, d] &= [K, \delta] = [K, R] = 0, \\ [R, d] &= [R, \delta] = 0, \\ [d, \delta] &= -2RK. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Процесс сведения этого действия к обычному начинается с определения духового вакуума теории.

В гл. 4 мы ввели оператор «духового числа» (4.4.20):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n + b_{-n} c_n) + \frac{1}{2} [c_0, b_0]. \quad (7.3.4)$$

Этот оператор подсчитывает число c -мод за вычетом числа b -мод. Мы можем использовать его для нумерации собственных состояний. Поскольку и b -, и c -духи имеют нулевые моды, вакуум духового поля Фаддеева–Попова совершенно отличается от обычного единственного вакуума для a_m^\dagger . Духовой вакуум (как мы видели в гл. 4) на самом деле вырожден и может иметь духовые числа, равные или $1/2$, или $-1/2$. Определим два вакуума:

$$c_0 | + \rangle = 0; \quad b_0 | - \rangle = 0; \quad | + \rangle = b_0 | - \rangle. \quad (7.3.5)$$

Таким образом, имеется два духовых вакуума. Зафиксируем духовое число поля Ψ равным $-1/2$ и разложим это поле по этим двум

вакуумам:

$$|\Psi\rangle = \psi|-\rangle + \varphi|+\rangle. \quad (7.3.6)$$

Тогда выражение для действия (7.2.13) с учетом (7.3.1) примет вид

$$\frac{1}{2} \langle \Psi | K \Psi \rangle + \langle \psi | d\varphi \rangle + \langle \delta\varphi | \psi \rangle + \langle \varphi | R\varphi \rangle. \quad (7.3.7)$$

Если мы представляем

$$|\Lambda\rangle = \lambda|-\rangle + \omega|+\rangle, \quad (7.3.8)$$

то вариации полей принимают вид

$$\delta\psi = (d + \delta)\lambda - 2R\omega, \quad (7.3.9)$$

$$\delta\varphi = -K\lambda + (d + \delta)\omega. \quad (7.3.10)$$

В общем случае написанные выше выражения допускают представление в компонентах. Всегда можно разложить полевой функционал по духовым модам:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n\}, \{m\}}^{\infty} c_{-n_1} c_{-n_2} \cdots c_{-n_N} b_{-m_1} b_{-m_2} \cdots b_{-m_M} \Psi_{n_1, \dots, n_N; m_1, \dots, m_M} |0\rangle. \quad (7.3.11)$$

Здесь индексы антисимметричны друг другу благодаря антикоммутиационным соотношениям между духами. Это позволяет написать

$$|\Psi\rangle = \sum_{M, N} \binom{N}{M} \Psi_M^N, \quad (7.3.12)$$

где $\binom{N}{M}$ представляет произведение N -антисимметризованных и M -антисимметризованных полей c и b . Это значит, что можно ввести «формы», определенные на антикоммутирующих переменных, тем же самым способом, каким дифференциальные формы вводятся через антикоммутирующие dx^μ [10].

Теперь мы имеем аппарат, необходимый для выполнения фиксации калибровки. Выберем сначала ковариантную калибровку [9]:

$$b_0 |\Psi\rangle = 0. \quad (7.3.13)$$

Это уничтожает половину полей в $|\Psi\rangle$, что соответствует $\varphi = 0$ в (7.3.6). Далее вычисляем детерминант Фаддеева-Попова, возникающий из вариации $b_0 |\Psi\rangle = 0$. Находим

$$L_{\text{FP}} = \langle \bar{\Lambda} | b_0 Q | \Lambda \rangle = \langle \bar{\Lambda} | K | \Lambda \rangle, \quad (7.3.14)$$

где $\langle \bar{\Lambda} |$ -2-форма. Странная особенность этого духового действия заключается в том, что оно в свою очередь обладает своей собственной калибровочной инвариантностью:

$$\delta |\Lambda\rangle = Q |\Lambda_1\rangle. \quad (7.3.15)$$

Следовательно, духовое действие требует еще одного детерминанта Фаддеева–Попова (иначе функциональное интегрирование по духовым полям неограниченно). Следующий духовый член, обусловленный детерминантом Фаддеева–Попова для духового поля, есть

$$L_{FP} = \langle \bar{\Lambda}_2 | K | \Lambda_1 \rangle. \quad (7.3.16)$$

Но это действие опять имеет свою собственную калибровочную симметрию, которая вновь требует своего собственного калибровочного члена Фаддеева–Попова, и т. д. Ясно, что получается бесконечная башня «духов духов» [10, 12]. Это неизбежная ситуация, потому что каждый детерминант Фаддеева–Попова необходим для уничтожения расходимостей, производимых предшествующим рядом духовых полей.

К счастью, этот ряд возможно просуммировать. Если начать с действия (7.2.13), имеющего единственное духовое число $-1/2$, и затем добавить к нему эту бесконечную башню духовых действий, то мы просто восстанавливаем действие (7.2.11), которое представляет сумму по всем возможным духовым числам. Следовательно, (7.2.11) – это вариант (7.2.13) с фиксированной калибровкой. Другими словами, струнный функционал с духовым числом $-1/2$ добавлением духов духов был преобразован в струнный функционал произвольного духового числа.

Подобным образом калибровочные степени свободы в (7.2.13) можно использовать для вывода теории в калибровке светового конуса [25]. Здесь, однако, имеется проблема, состоящая в необходимости явно обращаться к уравнениям движения определенных полей для уничтожения других.

Таким образом, только «массовая поверхность» позволяет перейти в рамках формализма BRST к теории в калибровке светового конуса. В этом состоит его ограниченность. Однако в геометрическом формализме мы имеем достаточную калибровочную симметрию для того, чтобы получить теорию в калибровке светового конуса вне массовой поверхности, устраняя лишние продольные моды в действии.

Чтобы перейти к калибровке светового конуса, заметим, что нежелательные состояния, которые должны быть устранены при фиксации калибровки, можно представить как произведение всех состояний вида

$$\{a_{-n}^+ a_{-m}^- b_{-p} c_{-q}\} |0\rangle. \quad (7.3.17)$$

Номер уровня такого состояния дается суммой номеров уровней каждой совокупности состояний:

$$n_+ + n_- + n_b + n_c = N. \quad (7.3.18)$$

Можно убедиться, что эти нежелательные состояния устраняются посредством множества механизмов. Например, для наимизших состояний $n_+ = n_- = 0$, 1 находим:

- (а) Большая часть состояний с $n_c = n_b$; $n_- \geq n_+$ может быть устранена посредством равенства $\delta\Psi = Q\Lambda$.
- (б) Состояния с $n_c = 0$, $n_b = 1$; $n_- \leq n_+$ суть множители Лагранжа.

(в) Состояния, не включенные в (а) с $n_c = 1$, $n_b = 1$; $n_- \geq n_+$ устраняются этими множителями Лагранжа.

Этот механизм распространяется на все нежелательные состояния. Вообще все эти нежелательные состояния могут быть устранены использованием калибровочной инвариантности теории или множителей Лагранжа. После этого устранения остаются только физические поперечные DDF-состояния.

В итоге мы показали, что в действии (7.2.13) можно зафиксировать калибровку, чтобы воспроизвести или первоначальное действие BRST, или действие в формализме светового конуса из предыдущей главы. Также можно убедиться (устранением всех высших возбуждений в $|\Psi\rangle$), что действие снова сводится к (7.1.10).

§ 7.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В противоположность полевой теории в калибровке светового конуса, где струны просто расщепляются в своих внутренних точках, взаимодействующий BRST-формализм Виттена [16] опирается на струнную конфигурацию, показанную на рис. 7.1. (На первый взгляд эта конфигурация кажется нарушающей закон сохранения импульса. Однако только в теории светового конуса импульс струны связан с ее длиной. В ковариантном формализме параметризационная длина не связывается с импульсом, и поэтому такая диаграмма разрешена.) Длина всех струн полагается одинаковой. Мы можем еще раз обобщить дельта-функции, появившиеся в (6.4.4), чтобы включить эту новую конфигурацию:

$$\begin{aligned} S_3 &= \int DX_{123} \Phi(X_1) \Phi(X_2) \Phi(X_3) \delta_{123} \\ &= \int DX_{123} \langle \Phi_1 | \langle \Phi_2 | \langle \Phi_3 | X_1 \rangle | X_2 \rangle | X_3 \rangle \delta_{123}, \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

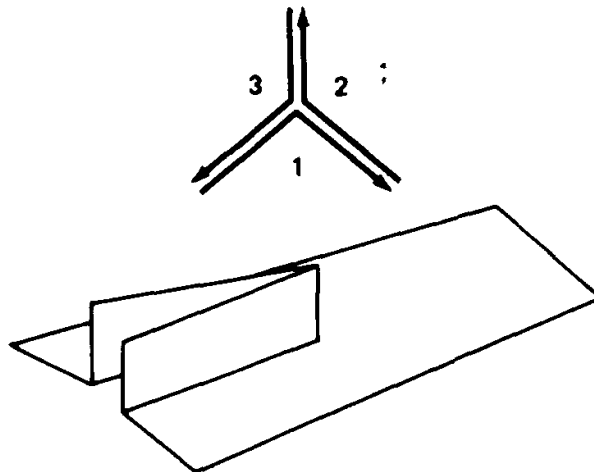


Рис. 7.1. Симметричное взаимодействие BRST струнной полевой теории. Замечаемая поверхность при использовании такой вершины не является плоской, как в теории светового конуса. Отсутствует необходимость в четырехструнном взаимодействии.

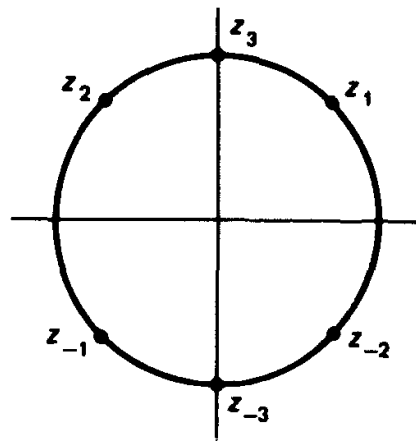


Рис. 7.2. Конформная поверхность струнной полевой теории BRST. Эту конформную поверхность можно представить, либо выбирая шесть зарядов и размещая их на диаграмме так, чтобы смоделировать поверхность с тремя зарядами, либо проводя на поверхности римановский разрез.

где

$$\delta_{123} = \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} \prod_{r=1}^3 \delta[X_r(\sigma) - X_{r-1}(\pi - \sigma)]. \quad (7.4.2)$$

Как в (6.5.2), для того чтобы построить вершину в осцилляторной форме, мы должны найти конформное преобразование, которое переводит верхнюю полуплоскость в изучаемую струнную конфигурацию [26–32]. К сожалению, конформного преобразования трех зарядов в верхнюю полуплоскость (без разрезов) для BRST-вершины не существует, потому что сумма зарядов обычно берется равной нулю, в то время как здесь сумма трех зарядов для симметричной конфигурации должна равняться 3. Решение заключается в построении электростатики шести зарядов, сумма которых равна нулю, и определении границ для того, чтобы смоделировать присутствие трех зарядов. Это требует разрезания и сшивания нескольких областей комплексной плоскости. Отображение имеет вид (см. рис. 7.2)

$$\rho = \sum_{i=-3}^{+3} \alpha_i \ln(z - z_i) = \ln \frac{z^3 - i}{z^3 + i} - i\pi/2, \quad (7.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_{-3} = 1, \\ \alpha_{-1} &= \alpha_{-2} = \alpha_3 = -1, \\ z_1 &= e^{i\pi/6}; \quad z_2 = e^{i5\pi/6}; \\ z_3 &= e^{i\pi/2}; \quad z_{-1} = -z_1; \\ z_{-2} &= -z_2; \quad z_{-3} = -z_3. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

К счастью, это отображение можно обратить и получить решение для z через ζ , делающее возможным явное построение функций Неймана. Обращая отображение, находим

$$z = z_a \left(\frac{1 + ie^{\zeta_a}}{1 - ie^{\zeta_a}} \right)^{1/3}, \quad (7.4.5)$$

где

$$\rho = \zeta_a = \xi_a + i\eta_a \quad (\text{для } a = 1, 2, 3), \quad (7.4.6)$$

$$\rho = -(\zeta_a - i\pi) \quad (\text{для } a = -1, -2, -3). \quad (7.4.7)$$

Коэффициенты Фурье будут содержаться в комбинациях

$$\left(\frac{1 + ie^\zeta}{1 - ie^\zeta} \right)^{1/3} = \sum_{n=2k} A_{2k} e^{n\zeta} + i \sum_{n=2k+1} A_{2k+1} e^{n\zeta}, \quad (7.4.8)$$

$$\left(\frac{1 + ie^\zeta}{1 - ie^\zeta} \right)^{2/3} = \sum_{n=2k} B_{2k} e^{n\zeta} + i \sum_{n=2k+1} B_{2k+1} e^{n\zeta}.$$

Объединяя все вместе, находим, что функция Неймана, появляющаяся в вершине, есть

$$N_{mn} = -\frac{1}{6}(C + U + \bar{U})1 - \frac{1}{6}\left(C - \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\bar{U}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}i\sqrt{3}(U - \bar{U}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.4.9)$$

где

$$C_{nm} = 2(-1)^n/n\delta_{n,m},$$

$$(U + \bar{U})_{nm} = -2(-1)^n \left[\frac{A_n B_m + B_n A_m}{n+m} + \frac{A_n B_m - B_n A_m}{n-m} \right],$$

$$(U - \bar{U})_{nm} = -2i \left[\frac{A_n B_m - B_n A_m}{n+m} + \frac{A_n B_m + B_n A_m}{n-m} \right]. \quad (7.4.10)$$

В явном виде выписывая вершину через операторы, получаем

$$|V_{123}\rangle_X = \exp \left[\frac{1}{2} \alpha_{-n}^r N_{nm}^{rs} \alpha_{-m}^s + P_0^r N_{0m}^{rs} \alpha_{-m}^s + \frac{1}{2} N_{00} \sum_{r=1}^3 P_{0r}^2 \right] |0_{123}\rangle. \quad (7.4.11)$$

Используя условие непрерывности для духов, можно также вычислить духовой вклад в вершинную функцию. Для этого мы просто заменяем X в (7.4.2) духами b и c . Тогда духовая вершина имеет вид

$$|V_{123}\rangle_{gh} = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{-n}^r X_{nm}^{rs} c_{-m}^s \right) |+++ \rangle_{123}. \quad (7.4.12)$$

Здесь вакуум $|+++ \rangle$ — это произведение трех вакуумов, введенных в (7.3.5). Для $s = r$ или $s = r + 2$ матрица X имеет вид

$$X_{nm}^{rs} = -m(N_{nm}^{rs} - N_{nm}^{r,s+3}), \quad (7.4.13)$$

а для $s = r + 1$

$$X_{nm}^{rs} = m(N_{nm}^{rs} - N_{nm}^{r,s+3}). \quad (7.4.14)$$

Окончательная вершина представляет собой произведение этих двух вершин, определяемых в двух совершенно различных пространствах:

$$|V_{123} \rangle = |V_{123} \rangle_X |V_{123} \rangle_{gh}.$$

Посредством длительных вычислений можно показать, что эта вершина удовлетворяет условию BRST-инвариантности [29]:

$$[Q_1 + Q_2 + Q_3] |V_{123} \rangle = 0. \quad (7.4.15)$$

Имеется несколько различных способов представления этой вершины. Во-первых, из комформной полевой теории нам известно, что систему антикоммутирующих духов b и c можно бозонизировать посредством скалярного поля, которое мы обозначим через φ . Тогда новая духовая вершина запишется как

$$V = \int \prod_{r=1}^3 DX_r D\varphi_r e^{i(3/2)\varphi(\pi/2)} \\ \times \prod_{0 \leq \sigma \leq (1/2)\pi} \delta(X_\mu^r(\sigma) - X_\mu^{r+1}(\pi - \sigma)) \delta(\varphi_r(\sigma) - \varphi_{r+1}(\pi - \sigma)). \quad (7.4.16)$$

(Несколько удивляет в этой бозонизированной вершине присутствие вставки в средней точке. Такой член не портит локальность по σ , поскольку он появляется только в точке $\pi/2$. Более того, он обеспечивает для символа умножения $*$ правильное духовое число $+3/2$. Так как духовое число калибровочного параметра Λ равно $-3/2$, то символ $*$ должен иметь духовое число $3/2$, чтобы произведение двух калибровочных параметров $\Lambda_{1,2}$ давало третий калибровочный параметр Λ_3 с тем же духовым числом.)

Существует еще один способ вычисления симметричной вершины, который основан на использовании конформных отображений с *римановыми разрезами* (вместо сращивания различных областей комплексной плоскости). Рассмотрим конформное отображение

$$\rho(z) = k \log \frac{(z+1)(z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right) + (z^2 - z + 1)^{3/2}}{z(1-z)}. \quad (7.4.17)$$

Отображение имеет обычные сингулярности в точках $z = 0, 1$ и ∞ (соответствующие трем входящим и выходящим струнам на $\pm \infty$). Однако новым моментом является наличие у этого отображения явного риманова разреза, создающего многолистную ρ -плоскость. Этот разрез

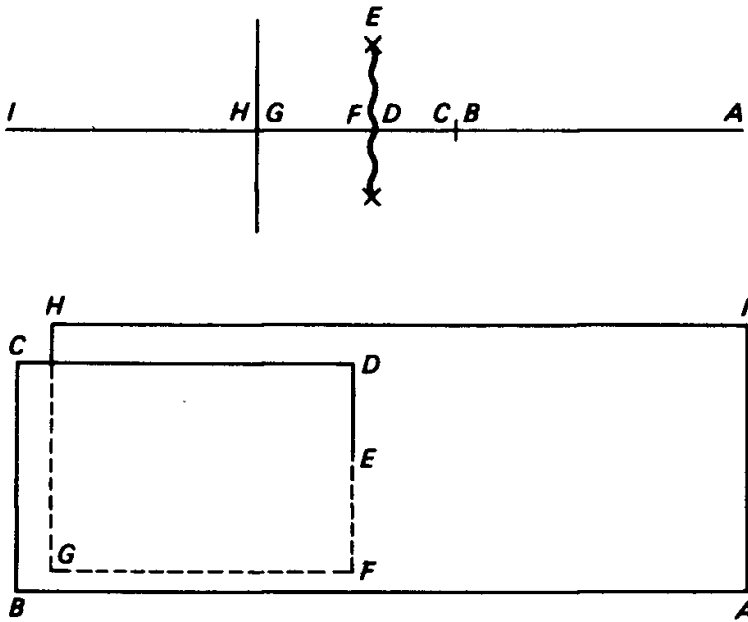


Рис. 7.3.

в точности то, что нужно для построения в ρ -плоскости поверхности, описывающей симметричное столкновение трех струн. Он располагается вертикально от $1/2 - i\sqrt{3}/2$ в нижней полуплоскости до $1/2 + i\sqrt{3}/2$ в верхней полуплоскости. Структуру многолистной плоскости ρ можно понять, проследив движение вдоль вещественной оси на рис. 7.3.

Если начать с точки $z = +\infty$ на положительной вещественной оси z и двигаться влево, то константу k можно выбрать так, что мы при этом пройдем аналогичный путь, пролегающий вдоль вещественной оси ρ в отрицательную бесконечность. Дойдя до точки $z = 1$ (точка B), мы достигаем отрицательной бесконечности на вещественной оси. При перепрыгивании через $z = 1$ в плоскости ρ происходит скачок на π единиц вертикально вверх. Далее, движению от $z = 1$ к $z = 1/2$ в плоскости z соответствует горизонтальное движение вправо от C к D до тех пор, пока мы не достигнем оси y в точке $\rho = i\pi$. Теперь, двигаясь вертикально вверх по риманову разрезу до точки E , $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, мы опускаемся в плоскости ρ по оси y до $\rho = i\pi/2$. Движение по разрезу в обратном направлении к точке $z = 1/2$ соответствует движению от $\rho = i\pi/2$ к точке F , началу координат. Движение от $z = 1/2$ к $z = 0$ означает движение от $\rho = 0$ к отрицательной вещественной бесконечности (на следующем римановском листе). Перепрыгивая через $z = 0$, мы сдвигаемся вертикально вверх на $i\pi$ в отрицательной вещественной бесконечности. Наконец, движение от $z = 0$ к $z = -\infty$ означает движение от $\rho = i\pi - \infty$ к $\rho = i\pi + \infty$ (от H к I).

Функции Неймана можно также вывести непосредственно из отображения (7.4.17). Этот альтернативный подход к вершинной функции представлен в [30–32].

§ 7.5. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Если середина параметризационного отрезка струны выбирается как выделенная точка, то становится возможным определить замкнутую алгебру струнных полевых функционалов. Струна, представленная $|A\rangle$, может быть соединена со струной $|B\rangle$ так, что их средние параметризационные точки точно совпадают. Производя спаривания осцилляторных состояний этих двух струн, мы получаем еще одну струну той же длины. Тем самым определена операция, подобная умножению. Например, абстрактное обозначение

$$A * B = C \quad (7.5.1)$$

конкретно означает

$$A_1 | \langle B_2 | V_{123} \rangle = | C_3 \rangle, \quad (7.5.2)$$

где мы спарили гармонические осцилляторы первой и второй струн и получили струну, определенную по третьим гармоническим осцилляторам. Так как все струны имеют одинаковые параметризационные длины, правило умножения приводит к замкнутой алгебре, если средняя точка параметризационного отрезка выбирается как выделенная точка, т. е. произведение двух струн длины единица равно другой струне единичной длины. Это в свою очередь позволяет нам определить калибровочное преобразование полевого функционала следующим образом:

$$\delta A = QA + A * \Lambda - \Lambda * A. \quad (7.5.3)$$

Определяя кривизну как

$$F = QA + A * A, \quad (7.5.4)$$

получаем, что

$$\delta F = F * \Lambda - \Lambda * F. \quad (7.5.5)$$

Следовательно, если мы можем определить операцию, называемую «интегрированием», которая сохраняет

$$\int A * B = (-1)^{AB} \int B * A \quad (7.5.6)$$

(где для грасмановых нечетных форм используется знак антикоммутиции), то сразу находим два инварианта – поверхностный член и самодействие:

$$\int F * F = \text{поверхностный член},$$

$$L = A * QA + \frac{2}{3} A * A * A. \quad (7.5.7)$$

Замечательное свойство этого подхода состоит в том, что, как и в случае калибровочной теории, мы можем свести существенные особенности теории к пяти «аксиомам»:

(1) Существование нильпотентной операции дифференцирования:

$$Q^2 = 0; \quad (7.5.8)$$

(2) Ассоциативность умножения:

$$[A * B] * C = A * [B * C]; \quad (7.5.9)$$

(3) Правило Лейбница:

$$Q[A * B] = QA * B + (-1)^A A * QB; \quad (7.5.10)$$

(4) Правило умножения:

$$\int A * B = (-1)^{AB} \int B * A; \quad (7.5.11)$$

(5) Правило интегрирования:

$$\int QA = 0, \quad (7.5.12)$$

где $(-1)^A$ есть -1 , если A – нечетный грассманов элемент, и $(-1)^A = +1$, если A – четный грассманов элемент.

Мы определяем операцию интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \Phi &= \int DX \prod_{0 \leq \sigma \leq (1/2)\pi} \delta(X(\sigma) - X(\pi - \sigma)) \Phi(X) \\ &= \langle I | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

Оператор I – довольно странный объект. Его структура означает, что мы берем функционал струны X , находим среднюю параметризационную точку и затем интегрируем таким образом, что струна складывается сама с собой вокруг этой точки. Таким образом, под действием этой операции отождествления функционал струны превращается в c -число.

Можно также выписать явное представление этого оператора отождествления:

$$I(X) = \langle X | I \rangle = \prod_{n=1,3,5\dots} \delta(X_n), \quad (7.5.14)$$

$$|I\rangle = e^{-1/2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{-n} \cdot a_n} |0\rangle.$$

Кроме того, вершинная функция инвариантна относительно подгруппы конформных преобразований, т. е. таких, которые не меняют расположения средней точки. Определим

$$K_n = L_n - (-1)^n L_{-n}. \quad (7.5.15)$$

На произведение форм этот оператор действует подобно производной:

$$K_n(A * B) = K_n A * B + A * K_n B. \quad (7.5.16)$$

Интегрирование удовлетворяет соотношению

$$\int K_n A = \langle A | K_n | I \rangle = 0, \quad (7.5.17)$$

тогда как вершинная функция подчиняется условию

$$\sum_{r=1}^3 K_n^{(r)} |V\rangle = 0. \quad (7.5.18)$$

Преимущество этого кохомологического подхода состоит в том, что он

близко следует кохомологической формулировке калибровочной теории, использующей язык форм. Для уравнения Максвелла имеем

$$\begin{aligned} d &= dx^\mu \partial_\mu; \quad d^2 = 0, \\ A &= dx^\mu A_\mu^a \tau^a. \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Поэтому в компактной форме теорию можно записать так:

$$\begin{aligned} F &= dA + A * A, \\ \delta A &= d\Lambda + A * \Lambda - \Lambda * A, \\ \delta F &= F * \Lambda - \Lambda * F. \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

Из этих уравнений определяются инварианты:

$$\int F * F = \int d \left[A * dA + \frac{2}{3} A * A * A \right]. \quad (7.5.21)$$

Сила метода BRST состоит в том, что он позволяет написать пять аксиом и определений форм кривизны, из которых легко показать калибровочную инвариантность действия. Эти элегантные аксиомы объединяют огромное количество информации, выражая струнную модель в пяти утверждениях.

Однако непонятность происхождения этих пяти аксиом составляет недостаток формализма BRST. В принципе эти пять аксиом можно с равным успехом применить к *любой* системе кохомологий, но это ничего не говорит нам, откуда они происходят. Например, как мы видели, общую теорию относительности можно вывести из двух принципов. Эти принципы в свою очередь допускают возможность переформулировки в пять аксиом кохомологии. Следовательно, пять аксиом не являются фундаментальными, а представляют собой только удобный и компактный метод для выражения тензорного исчисления. Поэтому мы ищем фундаментальные геометрические идеи, которые позволят нам *вывести* эти пять аксиом из основных принципов физики. Эти пять аксиом (т.е. тензорное исчисление) возникают естественным образом как результат введения новой бесконечномерной группы.

§ 7.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Хотя это не очевидно, но BRST-вершина $|V_{123}\rangle$ в том случае, когда внешние частицы располагаются на «массовой поверхности», эквивалентна любой другой вершинной функции, которая может быть получена с помощью конформного преобразования, генерируемого L_n . Определим, к примеру, другую вершинную функцию $|\bar{V}_{123}\rangle$, которую можно выразить как комформное преобразование первоначальной вершины:

$$|\bar{V}_{123}\rangle = \prod_{r=1}^3 \exp \left[\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n^r L_{-n}^r \right] |V_{123}\rangle. \quad (7.6.1)$$

Действуя на это уравнение физическим состоянием $|\text{физ}\rangle$, которое удовлетворяет условию $\langle \text{физ} | L_{-n} = 0$, получаем

$$\langle \text{физ} | V_{123} \rangle = \langle \text{физ} | \bar{V}_{123} \rangle. \quad (7.6.2)$$

Следовательно, две вершинные функции имеют на массовой поверхности одинаковые матричные элементы. Таким образом, было показано, что представленная здесь вершинная функция эквивалентна на массовой поверхности ковариантному осцилляторному варианту вершины Конеши–Швиммера–Венециано (CSV), найденной на заре дуальных моделей. (Фактически эта вершинная функция была получена рассмотрением N -точечных деревьев и последующей трехкратной факторизацией амплитуды, необходимой для выделения трехреджеонной вершинной функции.) Приведенные выше рассуждения показывают, что какую бы вершину мы ни использовали, мы должны получать одни и те же S -матричные элементы. Это доказывает, что трехструнная вершина, найденная в формализме BRST, дает на массовой поверхности точно такие же матричные элементы, как и старая вершина CSV [29, 30], несмотря на их совершенно различную геометрию. По сути этот факт можно использовать для доказательства того, что все три вершины (старая вершина в калибровке светового конуса, старая ковариантная вершина и новая вершина BRST) дают одинаковые элементы S -матрицы.

Доказательство того, что наша вершинная функция порождает правильную вершинную функцию на массовой поверхности для модели Венециано, довольно просто. Мы возьмем матричные элементы обеих вершинных функций с когерентными состояниями, которые являются функциями переменной z , и затем покажем, что полученные выражения связываются друг с другом конформным преобразованием. Далее мы убедимся, что это конформное преобразование может быть выражено в виде (7.6.1).

Старая CSV-вершина описывается формулой

$$|V_{\text{CSV}}\rangle = \sum_{i=1}^3 \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_i^\mu \cdot a_{-n,\mu}^{(i+1)}}{\sqrt{n}} + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{-n,\nu}^{(i)} C_{nm} a_{-m}^{(i+1),\nu} \right) |0\rangle_{123}, \quad (7.6.3)$$

где матрица C удовлетворяет следующему свойству:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{z^m}{\sqrt{m}} = \frac{(1-z)^n - 1}{\sqrt{z}}. \quad (7.6.4)$$

(Для проверки мы всегда можем замкнуть один из хвостов реджеона на вакуум, превратить трехосцилляторное гильбертово пространство в одноосцилляторное и воспроизвести обычную вершинную функцию для тахиона. Таким образом, $\langle 0_1 | V_{\text{CSV}} \rangle$ равняется обычной вершинной функции Венециано.)

Покажем, что эта вершинная функция с точностью до преобразования, порожденного L_{-n} , равна симметричной вершине. Для этого исследуем сначала действие конформного преобразования на когерент-

ное состояние (которое было введено в (2.6.18)):

$$|z, k\rangle = e^{\sum_n k_n a_n z^n} |0\rangle. \quad (7.6.5)$$

Прямым вычислением можно показать, что оператор Вирасоро, действуя на это состояние, дает

$$L_n |z, k\rangle = [(n+1)k^2 z^n + z^{n+1} d_z] |z, k\rangle. \quad (7.6.6)$$

Это преобразование когерентного состояния, когда применяется один оператор L_n . Теперь мы хотим применить к когерентному состоянию любое число операторов L_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L_n |z, k\rangle = \left[k^2 f'(z) + f(z) \frac{d}{dz} \right] |z, k\rangle. \quad (7.6.7)$$

Здесь мы определяем функцию $f(z)$ как

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n. \quad (7.6.8)$$

Итак, конформное преобразование общего вида порождает следующее преобразование когерентного состояния:

$$e^{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L_n} |z, k\rangle = \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^{k^2} |\bar{z}, k\rangle, \quad (7.6.9)$$

где

$$\bar{z} = g^{-1}(g(z) + 1), \quad (7.6.10)$$

$$\frac{dg}{dz} = f^{-1}(z). \quad (7.6.11)$$

Формулу (7.6.9) следует сравнить с формулой (4.1.8), которая дает преобразованию поля с весом h под действием конформной группы.

Теперь, вооружившись этими результатами, можно показать эквивалентность двух вершинных функций, взятых на массовой поверхности. Мы начинаем со спаривания трехреджеонной вершинной функции с тремя произвольными когерентными состояниями [32]:

$$\prod_{i=1}^3 \langle k_i, z_i | V_{\text{CSV}} \rangle = \prod_{i=1}^3 \left| z_i - \frac{1}{1+z_{i+1}} \right|^{k_i k_{i+1}} |1 - z_i|^{k_i k_{i-1}}. \quad (7.6.12)$$

Такое выражение может быть получено в явном виде из определения матрицы C в (7.6.4).

Следующий шаг заключается в спаривании симметричной вершины BRST (7.4.11) с тремя произвольными когерентными состояниями и сравнении результата с выражением, приведенным выше. Нам понадобятся следующие формулы:

$$\sum_{n,m} N_{nm}^{12} z_1^n z_2^m = \log \left| \bar{z}(z_1) - \frac{1}{1 - \bar{z}(z_2)} \right|,$$

$$\sum_{n,m} N_{nm}^{23} z_2^n z_3^m = \log \left| \frac{1}{1 - \bar{z}(z_2)} - \frac{\bar{z}(z_3) - 1}{\bar{z}(z_3)} \right| + \log |z_3| + \log \left| \frac{d\bar{z}}{dz} \right|_{z=0}, \quad (7.6.13)$$

$$\sum_{n,m} N_{nm}^{11} z_1^n z_1^m = \log \left| \frac{\bar{z}(z_1) - \bar{z}(z'_1)}{z_1 - z'_1} \right| - \log \left| \frac{d\bar{z}}{dz} \right|_{z=0},$$

$$\sum_{n,m} N_{nm}^{11} z_1^n z_1^m = \log \left| \frac{d\bar{z}}{dz_1} \right| - \log \left| \frac{d\bar{z}}{dz} \right|_{z=0}.$$

Эти тождества позволяют сконструировать явную форму для матричного элемента между когерентным состоянием $\prod_{i=1}^3 \langle k_i, z_i |$ и симметричной вершинной функцией BRST. Сравнивая получаемое выражение с (7.6.12), мы находим связь между старой вершиной CSV и новой вершиной BRST:

$$\prod_{i=1}^3 \langle k_i, z_i | V_{\text{CSV}} \rangle = \prod_{i=1}^3 \langle \bar{z}_i(z_i), k_i | V \rangle \prod_{i=1}^3 \left(\frac{d\bar{z}_i(z_i)}{dz_i} \right)^{k_i^2}. \quad (7.6.14)$$

Это то выражение, которое мы хотели получить. Оно показывает, что матричный элемент вершины CSV и матричный элемент симметричной вершины BRST связываются множителем, возведенным в степень k^2 . Сравнивая с (7.6.9), видим, что этот множитель можно выразить через операторы L_n . Итак, мы имеем точное решение для (7.6.1), по крайней мере на когерентных состояниях, демонстрирующее, что вершина CSV и вершина BRST связаны конформным преобразованием и, значит, имеют на массовой поверхности одинаковые матричные элементы.

Существует еще один способ показать эквивалентность вершины CSV и симметричной вершины, который основывается на степенном разложении (7.4.17), а не на использовании конформных свойств комплексных функций. Нам известно, что L_n действуют на комплексные функции как $z^{n+1} d_z$. Определим

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{-8}{27} \frac{(z+1)(z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right) - (z^2 - z + 1)^{3/2}}{z(1-z)} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} z + \frac{9}{16} z^2 + \dots \end{aligned}$$

Всегда возможно отыскать ряд коэффициентов a_n , таких что

$$W(z) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n} z.$$

На практике нахождение этих коэффициентов может оказаться трудным, но в принципе они известны с любой степенью точности. Например, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 5/16$. Далее можно показать, что симметричная вершина и

вершина CSV связываются следующим конформным преобразованием:

$$\langle V | e^{-\ln(3\sqrt{3}/4) \sum_{r=1}^3 (L'_0 - 1)} = \langle V_{\text{CSV}} | e^{-\sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n L'_n}.$$

Хотя связь между симметричной вершиной Виттена и вершиной BRST установлена, мы все еще сталкиваемся с проблемой существования фактически двух струнных полевых теорий BRST, которые кажутся вовсе не связанными друг с другом. Другая BRST-формулировка теории взаимодействий основывается на старой вершине в конусном формализме, в котором струны просто расщепляются или соединяются во внутренней точке. Мы можем также предположить, что трехструнная вершинная функция состоит из ковариантной дельта-функции Дирака [18–24]:

$$|V_{123}\rangle = \int DX_{123} |X_1\rangle |X_2\rangle |X_3\rangle \prod_{\sigma} \delta\left(\sum_{r=1}^3 \theta_r(\sigma_r) X_r(\sigma_r)\right). \quad (7.6.15)$$

Важно осознать, что эта новая вершинная функция есть в точности то же самое, что и старая вершинная функция в формализме светового конуса (6.4.5), кроме того, что гармонические осцилляторы теперь полностью ковариантны, а не просто поперечны, а также того, что мы должны умножить новую вершинную функцию на духовую вершину. Выполняя это умножение, мы получаем «ковариантную вершину в формализме светового конуса».

Можно показать, что эта ковариантная вершина удовлетворяет условию BRST-инвариантности:

$$\left\{ \sum_{r=1}^3 Q^{(r)} \right\} |V\rangle = 0. \quad (7.6.16)$$

Можно также доказать, что эта ковариантная версия конусной вершины эквивалентна трехреджеонной вершинной функции CSV, взятой на массовой поверхности. Однако мы будем использовать другое доказательство, а не приведенное выше. На этот раз мы покажем, что условия непрерывности или перекрытия, которым удовлетворяет вершинная функция CSV, после конформного преобразования могут быть записаны как условие непрерывности для вершинной функции в формализме светового конуса. Так как условия непрерывности или перекрытия определяют вершину, то отсюда должно следовать, что две вершины связываются конформным преобразованием.

Запишем вершинную функцию CSV в виде

$$|V_{\text{CSV}}\rangle = \exp\left(\sum_{r=1}^3 \sum_{m=0, n=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{\mu(r)} \alpha_{-n, \mu}^{(r+1)} C_{mn}\right) |0\rangle, \quad (7.6.17)$$

где

$$C_{mn} = (-1)^n \Gamma(n) \Gamma^{-1}(1+m) \Gamma^{-1}(1+n-m). \quad (7.6.18)$$

Начнем с предположения, что на эту вершинную функцию можно наложить следующее условие непрерывности для некоторых неизвест-

ных величин A , B и C :

$$(A(z)P_1^\mu[(1-z)^{-1}] + B(z)P_2^\mu[1-z^{-1}] + C(z)P_3^\mu[z])|V_{\text{CSV}}\rangle = 0. \quad (7.6.19)$$

Здесь P определяется формулой

$$P^{\mu(r)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu z^{-n}. \quad (7.6.20)$$

Коммутируя различные гармонические осцилляторы через $|V_{\text{CSV}}\rangle$, находим следующие связи на A , B и C :

$$-\frac{A}{z} + B - \frac{C}{1-z} = 0. \quad (7.6.21)$$

Это выражение все еще оставляет нам широкие возможности в выборе величин A , B и C . Обращая внимание на области сходимости этих функций, находим, что можно положить $C = 0$ при $|z| > 1$, $B = 0$ при $|z-1| < |z|$ и $A = 0$ при $|1-z| > 1$. Для удобства выберем $B = 0$, что еще оставляет определенную степень произвольности. В частности, положим

$$\begin{aligned} A &= \gamma_2 \frac{z}{1-\gamma_2 z}, \\ B &= 0, \\ C &= -\gamma_2 \frac{1-z}{1-\gamma_2 z} \end{aligned} \quad (7.6.22)$$

для некоторого γ_2 .

Наша цель состоит в выяснении связи между этой вершиной и обычным формализмом светового конуса, в котором верхняя полуплоскость отображается в струнную конфигурацию посредством преобразования

$$\rho = \alpha_1 \ln(z-1) + \alpha_2 \ln z. \quad (7.6.23)$$

Как и выше, мы параметризуем трехструнную вершинную функцию в плоскости ρ в направлении σ параметром η_r , где

$$\eta_3 = \begin{cases} -\beta_2 \eta_2 + \beta_2 \pi & \text{при } 0 \leq \eta_3 \leq \beta_2 \pi, \\ -\beta_1 \eta_1 + \pi & \text{при } \beta_2 \pi \leq \eta_3 \leq \pi \end{cases} \quad (7.6.24)$$

и

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_3|}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \quad \gamma_r = -\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}, \quad \delta_r = e^{i\eta_r}. \quad (7.6.25)$$

С этими определениями коэффициенты A и C можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta_1}{(1-z)^{-1}} \frac{d(1-z)^{-1}}{d\delta_1} (1-\gamma_1), \\ C &= \frac{\delta_3}{z} \frac{dz}{d\delta_3}. \end{aligned} \quad (7.6.26)$$

А сейчас наступает решающий шаг. Известно, что под действием конформной группы оператор P преобразуется следующим образом (см. (4.1.17), где мы взяли экспоненциальное преобразование обычных переменных):

$$P_\mu(z) = \left(\frac{z}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^h P_\mu(\rho). \quad (7.6.27)$$

Следовательно, уравнение непрерывности можно представить как

$$\left(\frac{\delta_1}{(1-z)^{-1}} \frac{d(1-z)^{-1}}{d\delta_1} P_1^\mu + \frac{\delta_3}{z} \frac{dz}{d\delta_3} P_3^\mu \right) |V\rangle = 0. \quad (7.6.28)$$

Используя трансформационные свойства P относительно конформной группы, получаем

$$(P_1^\mu(\delta_1) + P_2^\mu(\delta_3)) |V\rangle = 0. \quad (7.6.29)$$

Но $\delta_r = e^{i\eta_r}$. Это и есть нужное нам выражение. С помощью конформного преобразования мы создали новую вершину, которая удовлетворяет другому условию непрерывности по η_r , т. е. по координате σ трех струн. Эта новая вершинная функция в точности удовлетворяет первоначальным условиям непрерывности для вершинной функции в калибровке светового конуса между струнами 1 и 3. Аналогично, образуя различные комбинации, можно показать выполнение условий непрерывности также между струнами 2 и 3. Итак, мы убедились, что посредством конформного преобразования оказывается возможным выразить уравнение непрерывности для ковариантной вершины Венециано через уравнение непрерывности для ковариантной конфигурации в формализме светового конуса.

Но поскольку конформное преобразование генерируется операторами L_n , то это означает, что на массовой поверхности ковариантная функция в формализме светового конуса (7.6.15) неотличима от ковариантной вершины Венециано (7.6.17).

Здесь мы должны объяснить, почему существуют два варианта формализма BRST: один — основанный на полностью симметричной вершине, а другой — на вершине в калибровке светового конуса, причем оба имеют на массовой поверхности одинаковые свойства. Эти формализмы кажутся непохожими друг на друга в основных чертах. Определенный ковариантным образом формализм светового конуса, например, имеет дополнительный член четырехструнного взаимодействия. Он необходим, поскольку калибровочная группа для этого формализма полностью не замыкается. Пытаясь применить (7.5.3) для струнной конфигурации в формализме светового конуса, мы сталкиваемся с проблемами. Группа не замыкается без дополнительного четырехструнного взаимодействия, но даже с ним она становится замкнутой только на массовой поверхности.

С другой стороны, симметричная теория, как можно показать, является последовательной без четырехструнного взаимодействия.

Таким образом, эти две теории имеют фундаментальные различия.

Хотя не все детали ясны, решение этой головоломки можно отыскать в незавершенности вторично квантованной полевой теории, опирающейся на определенный ковариантным образом формализм светового конуса. Дело в том, что необходимо проинтегрировать по всем возможным «длинам» струны α . В старой теории светового конуса это интегрирование допускалось, так как оно на самом деле совпадало с интегрированием по импульсу струны. Однако в ковариантной теории α — лишний параметр, не имеющий физического смысла. Следовательно, интегрирование по α создает бесконечное количество копий одной и той же вещи. Так, например, в пределе нулевого наклона эта теория производит бесконечное число действий Янга–Миллса:

$$-\frac{1}{4} \int_0^{\infty} d\alpha F_{\mu\nu}(\alpha)^2 + \dots, \quad (7.6.30)$$

что очевидный абсурд. Такое интегрирование по фиктивному параметру α приводит к возникновению в полевой теории ненужной бесконечности. Поэтому со вторым методом BRST связана фундаментальная проблема.

Решение этой проблемы заключается в геометрической формулировке следующей главы. Там мы показываем, что α можно выразить как настоящий калибровочный параметр α и, следовательно, зафиксировать. Однако в рамках представленного формализма BRST превратить α в настоящий калибровочный параметр невозможно. Чтобы зафиксировать «длину» струны, мы должны намного расширить число полей, а это осуществимо только в геометрическом формализме (см. также [37, 38]).

§ 7.7. ЗАМКНУТЫЕ СТРУНЫ И СУПЕРСТРУНЫ

К сожалению, теория замкнутых струн и суперструн менее развита, чем теория открытых бозонных струн. Например, формализм BRST испытывает серьезное замешательство по поводу того, как правильно построить теорию. *Для замкнутых струн и суперструн весь «счет духов» становится неверным.* Фактически наивное действие BRST тождественно обращается в нуль, поскольку имеет неправильное духовое число, неизбежно влекущее за собой «последовательное транкирование» либо Q , либо гильбертова пространства «духовых мод». Как мы увидим, при переходе к более сложным моделям ситуация быстро ухудшается и усложняется, пока, наконец, формализм BRST не терпит полный крах для фермионной полевой теории замкнутых струн. В некотором смысле тот факт, что открытую струну оказалось столь легко выразить на языке BRST, был счастливой случайностью. Горькая реальность состоит в том, что формализм BRST упускает нечто важное.

Для замкнутых струн [11, 39, 40] мы имеем две копии генераторов Вирагоро L_n и \bar{L}_n . В формализме BRST духовое число вакуума удваивается по сравнению с предыдущим, потому что $-1/2 - 1/2 = -1$:

$$|0\rangle = |-\rangle |-\rangle; \quad \langle 0| = \langle -| \langle -|. \quad (7.7.1)$$

При этом духовое число Q остается равным 1. Это означает, что наивное действие на самом деле должно обращаться в нуль,

$$\langle \Phi | Q | \Phi \rangle = 0, \quad (7.7.2)$$

так как результат подсчета духового числа выходит неверным, а именно $-1 + 1 - 1 \neq 0$. Такая ситуация явно нежелательна. Были предложены различные пути решения этой проблемы вычисления правильного духового числа, но ни один из них не является полностью удовлетворительным. Например, мы можем искусственно обрезать в Q нулевые моды, сохраняя его нильпотентность, т.е. произвольно отбросить нулевые моды

$$c_0; b_0; \bar{c}_0; \bar{b}_0, \quad (7.7.3)$$

вводя вместо них меньший набор

$$\hat{c}_0; \hat{b}_0, \quad (7.7.4)$$

такой что новый оператор \hat{Q} теперь разлагается в виде

$$Q = \hat{c}_0(K + \bar{K}) + d + \delta + \bar{d} + \bar{\delta} - 2\hat{c}_0(R + \bar{R}). \quad (7.7.5)$$

Здесь были выброшены старые нулевые моды и подставлен меньший набор (который походит на набор, использованный для открытой струны).

Чтобы иметь теорию, не зависящую от начала координаты σ , наложим на замкнутую струну связь:

$$(K - \bar{K})| \Phi \rangle = 0. \quad (7.7.6)$$

В силу того что мы имеем дело с меньшим числом нулевых мод, можно использовать вакуумы, найденные выше для случая открытой струны, $| - \rangle$ и $| + \rangle$:

$$| \Phi \rangle = \varphi | - \rangle + \psi | + \rangle. \quad (7.7.7)$$

Отметим, что обрезание было выбрано сохраняющим тождество

$$\hat{Q}^2 = 0. \quad (7.7.8)$$

Действие имеет вид

$$\langle \Phi | \hat{Q} | \Phi \rangle. \quad (7.7.9)$$

Хотя BRST-теория открытых струн проста, мы начинаем видеть слабости подхода BRST в случае замкнутых струн:

- (а) связь $(k - \bar{k})| \Phi \rangle = 0$ должна быть наложена извне, без какого-либо фундаментального обоснования. Связи обычно появляются как результат симметрии действия; здесь мы просто налагаем их, не зная, откуда они берутся;
- (б) произвольное обрезание духовых состояний, сохраняющее нильпотентность Q , кажется слишком надуманным;
- (в) это обрезание, вероятно, не выживает в теории взаимодействий. Опускание нулевых мод означает потерю струнной интерпретации

$X_\mu(\sigma)$ и $\psi_\mu(\sigma)$. Полностью теряется локальность по σ , которая была абсолютно необходима для построения вершинной функции. Таким образом, отказ от локальности по σ , по-видимому, разрушает любую возможность теории взаимодействий.

Обратимся теперь к суперсимметричному случаю, где ситуация намного хуже. Для бозонов Невё–Шварца мы на самом деле не сталкивались с трудностями при учете нулевых мод духов, так как коммутирующие духи γ и β имеют полуцелые моды и, следовательно, не изменяют природу вакуума. Вакуум BRST по-прежнему имеет духовое число $-1/2$, и поэтому действие, как и прежде, имеет вид

$$\langle A|Q|A\rangle. \quad (7.7.10)$$

Однако для фермионов Рамона [11, 41–53] возникают трудные проблемы, связанные с целочисленными компонентами коммутирующих духов Фаддеева–Попова. Пусть γ_0 будет нулевой модой духового фермионного осциллятора. Тогда существует бесконечное число всевозможных вакуумов, поскольку этот дух является по своей природе не фермионным, а бозонным. Каждый из этого бесконечного набора вакуумов метится выражением

$$\gamma_0^n |0\rangle. \quad (7.7.11)$$

Это приводит к тому, что полевой функционал должен быть разложен в ряд по бесконечному набору вакуумов:

$$\Phi(X, \gamma_0) = \sum_n^\infty \varphi_n(X) \gamma_0^n. \quad (7.7.12)$$

Какой вакуум мы используем? Такой подход является чрезвычайно неудобным, что показывает ограниченность формализма BRST. (Подобная ситуация имеет место в конформной полевой теории с оператором смены картины. Однако конформная полевая теория является формализмом на массовой поверхности, так что все картины эквивалентны одной. Здесь полевая теория струн — это по определению теория вне массовой поверхности, и поэтому в нее должны входить все такие вакуумы.)

Для транкирования теории в подходе BRST имеется несколько предложений. Мы можем либо транкировать Q , оставляя его нильпотентным, либо транкировать поле $|\Phi\rangle$ так, чтобы отпала необходимость в суммировании по бесконечному числу духовых вакуумов. Начнем обсуждение с введения единых обозначений, с помощью которых мы сможем описывать духовые поля для моделей Невё–Шварца и Рамона одновременно. Определим следующие объекты [11]:

$$A_N^\mu = (a_n^\mu, \psi_n^\mu), \quad B_N = (b_n, \beta_n), \quad C_N = (c_n, \gamma_n). \quad (7.7.13)$$

Здесь A_N^μ обозначает как обычную бозонную струну, так и антикоммутирующее поле ψ_n^μ , точка напоминает, что поля могут иметь целые и полуцелые моды, а B_N и C_N представляют духовые поля теории.

В частности, b_n и c_n – духовые поля, соответствующие бозонной струне, а β_n и γ_n обозначают духи для фермионного поля, где точка опять обозначает возможность разложения либо по целым, либо по полужелым модам.

Коммутационные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} A_M^\mu A_N^\nu - (-1)^{MN} A_N^\nu A_M^\mu &= \eta^{\mu\nu} \delta(M+N), \\ B_M C_N + (-1)^{MN} C_N B_M &= \delta(M+N), \end{aligned} \quad (7.7.14)$$

где $(-1)^{MN}$ равно -1 , если M и N – фермионы, и $+1$ в противном случае. Если $[L_I, L_J] = F_{IJ}^K L_K$, то оператор BRST в этих обозначениях принимает вид

$$Q = C_{-N} L_N + F_{IJ}^K : C_{-J} C_{-I} B_K :, \quad (7.7.15)$$

где L_n суть обычные операторы Вирасоро.

В частности, для струны Рамона этот оператор есть

$$Q = c_0 K + \gamma_0 F + d + \delta - 2Rb_0 - 2\hat{R}\beta_0 + \gamma_0^2 b_0, \quad (7.7.16)$$

где

$$\hat{R} = \frac{3}{4} M C_{-M} C_{\bar{M}}, \quad (7.7.17)$$

$$F = F_0 + f_M^M [C_{-\bar{M}} B_M - B_{-M} (-1)^{\bar{M}} C_{\bar{M}}], \quad (7.7.18)$$

где f_M^M равно 2 , если M – бозонный индекс, и $M/2$, если M – фермионный индекс, черта меняет местами бозонные и фермионные моды, а d, K, δ, R принимают те же значения, что и в случае Вирасоро.

F_0 – обычный оператор Рамона, который удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям, определяющим алгебру Superdiff (S):

$$\begin{aligned} \{G_m, G_n\} &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{m, -n}, \\ [L_m, G_n] &= \left(\frac{1}{2} m - n \right) G_{m+n}, \\ [L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2} m - n \right) F_{m+n}, \\ \{F_m, F_n\} &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m, -n}, \\ [L_m, L_n] &= (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m, -n}. \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

Отметим, что алгебра Superdiff(S), которая обычно записывается через физические поля, с таким же успехом может быть реализована через духовые поля B_N и C_N .

Операторы F, K и так далее удовлетворяют, в свою очередь,

следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} d^2 = \delta^2 = 0, \quad F^2 = K, \\ 2\hat{R} = [F, R], \quad \{d, \delta\} = F\{F, R\}. \end{aligned} \quad (7.7.20)$$

Этих же коммутационных соотношений достаточно, чтобы показать нильпотентность BRST-оператора Q .

Как упоминалось выше, проблема с сектором Рамона заключается в том, что духовая мода γ_0 разлагается по целым модам и удовлетворяет коммутационным, а не антикоммутационным соотношениям, так что имеется *бесконечное число духовых вакуумов*, описываемых $\gamma_0^n |0\rangle$ для каждого n . Одно из решений этой проблемы состоит в произвольном транкировании нулевых мод оператора Q при сохранении его нильпотентности.

Мы подходим к решающему моменту: как и в случае бозонной замкнутой струны, устраним произвольным образом бозонные духовые моды γ_0, β_0 и введем фермионные \hat{b}_0 и \hat{c}_0 , такие что

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 |\hat{0}\rangle = 0, \\ \langle \hat{0} | \hat{c}_0 | \hat{0} \rangle = 1. \end{aligned} \quad (7.7.21)$$

Определим модифицированный оператор \hat{Q} , изгоняющий из теории нулевые моды. Пусть

$$\hat{Q} = \hat{c}_0 F + (-1)^{N_F} (d + \delta) - \hat{b}_0 (FR + RF), \quad (7.7.22)$$

где N_F подсчитывает полное число фермионных операторов рождения в данном состоянии. При этом руководящим принципом в построении модифицированного оператора было тождество $\hat{Q}^2 = 0$.

Для выделения состояний сектора Рамона определим оператор GSO, который в таком представлении есть

$$G = [\hat{b}_0, \hat{c}_0] \Gamma^{11} (-1)^{N_F}, \quad (7.7.23)$$

где N_F относится только к ненулевым модам, а Γ^{11} обозначает 10-мерную киральную матрицу Дирака. В этом представлении GSO-проекция просто уничтожает состояния с неправильной спиновой статистикой.

Произвольное рамоновское суперполе в этом транкированном фокковском пространстве может быть разложено как

$$|\Psi\rangle = [|\psi\rangle + \hat{c}_0 |\xi\rangle] |\hat{0}\rangle, \quad (7.7.24)$$

где $|\psi\rangle$ — 0-форма киральности $\Gamma^{11} = 1$, $|\xi\rangle$ есть $G = +1(-1)$ -форма и

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 |\hat{0}\rangle = 0, \\ \langle \hat{0} | \hat{c}_0 | \hat{0} \rangle = 1. \end{aligned} \quad (7.7.25)$$

Транкированное действие теперь есть

$$S = \bar{\Psi} |\hat{Q} |\Psi\rangle, \quad (7.7.26)$$

где $\langle \bar{\Psi} | = \langle \Psi | \Gamma^0$. Такое действие инвариантно относительно преобразования

$$\delta |\Psi\rangle = \hat{Q} |\Lambda\rangle. \quad (7.7.27)$$

Подстановка указанного выше разложения $|\Psi\rangle$ в (7.7.24) дает

$$S = \langle \bar{\psi} | F | \psi \rangle + \langle \bar{\xi} | FR + RF | \xi \rangle - \langle \bar{\psi} | d + \delta | \xi \rangle - \langle \bar{\xi} | d + \delta | \psi \rangle. \quad (7.7.28)$$

Такое действие было также получено другими способами, такими как искусственный выбор при транкировании $|\Psi\rangle$, сохраняющий первоначальный вид оператора Q .

Однако ситуация становится намного хуже, когда мы переходим к обсуждению фермионных замкнутых струн. В этом случае связь $[K - \bar{K}]|\Psi\rangle = 0$ превращается в

$$[F - \bar{F}]|\Psi\rangle = 0, \quad (7.7.29)$$

т.е. становится динамической связью. Следовательно, налагать ее на состояния мы не можем. К несчастью, теория BRST для фермионных замкнутых струн терпит крах, что демонстрирует незавершенность известного ныне формализма BRST. Фермионная теория замкнутых струн подводит формализм BRST к пределу его возможностей, где он больше не дает приемлемых результатов.

Мы видели, что подход BRST становится все более громоздким при переходе к суперструнам и замкнутым струнам. К сожалению, было предложено много способов транкирования, отчасти взаимоисключающих. «Транкирование», однако, нечто большее, чем дело вкуса, это потенциально опасная операция, поскольку она, вероятно, не обобщается на взаимодействующие струны. Транкирование, по-видимому, нарушает локальность по σ , столь существенную для построения вершин. Поэтому предложенные до сих пор способы транкирования могут на самом деле оказаться несостоятельными на уровне взаимодействия.

Все же представим еще одну операцию транкирования [17], которая обещает быть локальной по σ и, стало быть, допускающей обобщение на взаимодействующие струны. Напомним первоначальный способ подсчета духов, которое мы выполнили при конструировании операций $*$ и \int . Духовые числа выбирались так, чтобы удовлетворить аксиомам когомологии (7.5.8)–(7.5.12) и обеспечить замкнутость калибровочной группы:

Объект	Духовое число	Объект	Духовое число
Ψ	$-\frac{1}{2}$	Λ	$-\frac{3}{2}$
Q	$+\frac{1}{3}$	\int	$-\frac{3}{2}$
$*$	$+\frac{1}{2}$		

Легко показать, что такой выбор духовых чисел удовлетворяет перечисленным выше аксиомам кохомологии.

Обобщим эти правила на случай открытых суперструн. Мы хотим сохранить аксиомы кохомологии и в дополнение потребовать, чтобы два калибровочных преобразования производили третье калибровочное преобразование с тем же самым духовым числом.

Выдвинув эти условия, сразу находим, что определенные нами операции $*$ и \int имеют неправильные духовые числа. Как было найдено выше, действие тождественно равняется нулю. На этот раз, чтобы *восполнить утерянные духовые числа, вместо транкирования нулевых мод мы прибегнем к конформной полевой теории*. Вставки от духовых полей BRST будут присутствовать только в средней параметризационной точке, поэтому мы не потеряем локальность по σ . Таким образом, это транкирование, которое транкирует только духовые числа полей, лучше, чем предыдущая операция транкирования нулевых мод.

Чтобы заставить этот механизм заработать, нужно добавить несколько новых особенностей.

(1) Суперполе Ψ представляется теперь суммой NS-поля a и R-поля ψ :

$$\Psi = (a, \psi). \tag{7.7.30}$$

(2) Аналогично, калибровочный параметр Λ также состоит из двух частей:

$$\Lambda = (\epsilon, \chi). \tag{7.7.31}$$

(3) Духовое число операции $*$ равно теперь $1/2$ (поскольку, как и выше в (7.4.16), вклад конформных духов равен $3/2$, но суперконформные духи дают вклад $-1/2$). Следовательно, мы должны изобрести новое правило умножения для суперструн, которое будет иметь духовое число $3/2$ (назовем его \otimes).

(4) Интеграл \int имеет теперь духовое число $-1/2$ из-за вклада суперконформных духов. Необходимо предположить существование нового интегрирования \oint , имеющего духовое число $-3/2$.

Теперь методом проб и ошибок мы можем приписать всем нашим полям и операторам духовые числа, обеспечивающие замкнутость калибровочных преобразований и выполнение приведенных выше аксиом [17]:

Объект	Духовое число	Объект	Духовое число
a	$-\frac{1}{2}$	\otimes	$\frac{3}{2}$
ψ	0	X	1
ϵ	$-\frac{3}{2}$	Y	-1
χ	-1	\oint	$-\frac{3}{2}$
Q	$+1$	\int	$-\frac{1}{2}$
$*$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$

(7.7.32)

Здесь X и Y еще неизвестны, но имеют духовые числа, восполняющие недостающие значения.

Выдвинув догадку, которая успешно удовлетворила нашим первоначальным предположениям, мы теперь сталкиваемся с задачей действительного вычисления вида этих полей и операторов \oint и \otimes .

Для начала, построить BRST-поля с такими духовыми числами нетрудно. Мы просто выбираем правильный вакуум (из их бесконечного количества), такой что он имеет нужное духовое число. Затем всегда можно применить к каждому состоянию проекционный оператор духового числа и получить обобщенное BRST-поле с правильным духовым числом.

Намного сложнее, конечно, определение операторов \oint и \otimes .

Так как $*$ имеет только духовое число $1/2$, нам нужен новый конформный оператор с духовым числом 1 и конформным весом 0. К счастью, конформная полевая теория дает такой оператор:

$$X = \{Q, \xi\}. \quad (7.7.33)$$

Тогда правило умножения для калибровочных параметров должно подчиняться условию

$$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 - (1 \leftrightarrow 2) = \Lambda_3. \quad (7.7.34)$$

Этому правилу умножения можно удовлетворить с помощью нового оператора X :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 &= (\varepsilon_1, \chi_1) \otimes (\varepsilon_2, \chi_2) \\ &= (X(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) + \chi_1 * \chi_2, X(\varepsilon_1 * \chi_2 + \chi_1 * \varepsilon_2)). \end{aligned} \quad (7.7.35)$$

Взглянув на духовые числа всех полей и операторов, мы убеждаемся в их правильности. В самом деле, запишем наше правило умножения символически через духовые числа. Мы хотим перемножить два мультиплет с духовыми числами $(-3/2; 1)$ так, чтобы при этом снова получить мультиплет $(-3/2; -1)$. Аккуратно выписывая все различные духовые числа в этом правиле умножения, находим

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \otimes \left(-\frac{3}{2}, -1\right) &= \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 + \frac{1}{2} - 1, 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, -1\right), \end{aligned} \quad (7.7.36)$$

т.е. получаем замкнутость.

Далее, покажем, что выражение $A \otimes \Lambda$, которое присутствует в вариации поля A , также имеет правильное духовое число поля A . Для этого нужно вычислить духовые числа следующей операции:

$$(a, \psi) \otimes (\varepsilon, \chi) = (X(a * \varepsilon) + \psi * \chi, X(\psi * \varepsilon + a * \chi)). \quad (7.7.37)$$

Тщательно подсчитывая духовые числа всех членов, находим

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(-\frac{3}{2}, -1\right) &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 + \frac{1}{2} - 1, 1 + 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \end{aligned} \quad (7.7.38)$$

т. е. снова замкнутость налицо.

Наконец, необходимо построить новый оператор \oint с духовым числом $-\frac{3}{2}$. Поскольку наивный интегральный оператор имеет духовое число, равное всего лишь $-1/2$, требуется новый оператор с духовым числом -1 . Еще раз конформная полевая теория дает нам такой оператор:

$$Y(\sigma) = c_- \partial_+ \xi e^{-2\varphi}. \quad (7.7.39)$$

Этот оператор называется «обратным оператором смены картины» и в некотором смысле является обратным к оператору X . Можно показать, что

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2} X(\sigma_1) Y(\sigma_2) = 1, \quad (7.7.40)$$

т. е. операторы X и Y взаимно обратны. С помощью этого оператора новый оператор интегрирования определяется формулой

$$\oint(a, \psi) = \int Y\left(\frac{1}{2}\pi\right) a\psi, \quad (7.7.41)$$

т. е. правило интегрирования то же самое, что и выше, за исключением фактора $Y(\pi/2)$, который мы подставляем в средней точке. Этот оператор определяется только в средней точке струны, так что локальность теории по σ сохраняется.

Используя новые операторы подсчета духов, можно показать инвариантность действия

$$S = \int \left(A \otimes QA + \frac{2}{3} A \otimes A \otimes A \right) ; \quad (7.7.42)$$

относительно преобразования

$$\delta A = QA + A \otimes \Lambda - \Lambda \otimes A. \quad (7.7.43)$$

Преимущество этого формализма заключается в том, что он обобщается на случай взаимодействий. Все операторы локальны по σ , и поэтому проблема наложения условия непрерывности на взаимодействующие струны отсутствует.

Однако проблема с этим подходом состоит в невозможности его обобщения на замкнутые струны. В моделях такого типа явно нарушается модулярная инвариантность. К тому же построение модели зависело скорее от удачного угадывания подходящих духовых чисел, чем от какого-либо нового понимания сути полевой теории. Нет никакой мотивировки, лежащей в основе всего этого.

Подытожим различные трудности формализма BRST, обусловленные тем фактом, что это фактически формализм с фиксированной калибровкой.

- (1) Загадочна необходимость существования двух формализмов BRST, эквивалентных на массовой поверхности, — одного, основанного на определенной ковариантным образом вершине конусного формализма, а другого — на симметричной вершине.
- (2) Смысл духового поля Фаддеева–Попова, являющегося напоминанием о фиксации конформной калибровки, неясен. Почему объект, фиксирующий калибровку, должен играть в формализме BRST такую важную роль?
- (3) Правило умножения $*$ и правило интегрирования \int для струн просто постулируются без объяснения их происхождения.
- (4) Непонятен смысл уравнения $Q^2 = 0$.
- (5) Формализм BRST не может перейти в калибровку светового конуса вне массовой поверхности. Как мы видели, чтобы получить действие в калибровке светового конуса, для уничтожения лишних мод пришлось использовать уравнения движения.
- (6) Предлагается много способов транкирования для теории BRST, не все из них согласуются друг с другом. Какой же способ является правильным? Присутствие связей в фермионном секторе не только неприятно, оно обрекает эту теорию на неудачу. Уравнения связей не могут быть разрешены при сохранении уравнения движения. Таким образом, для сектора замкнутых фермионных струн теория терпит полный крах.
- (7) Почему такую важную роль в теории должна играть средняя параметризационная точка? Математически середина струны не является такой уж особенной точкой.
- (8) Что важнее всего, формализм BRST невозможно вывести из фундаментальных принципов физики. Он *не является физическим принципом*. Метод BRST — это формализм для квантования в калибровке. Он лишен физического содержания.

Перед тем как завершить эту главу о струнной полевой теории BRST, скажем несколько слов о многообещающей формулировке полевой теории струн, называемой «предгеометрическим» подходом [54–56]. Эта формулировка не ссылается на фоновую метрику и может дать ключи к пониманию происхождения самой геометрии.

Рассмотрим действие

$$L = \frac{2}{3g^2} \Phi * \Phi * \Phi. \quad (7.7.44)$$

На первый взгляд такое действие не имеет смысла. Оно никак не ссылается на то, какая фоновая метрика лежит в его основе, — что само по себе хорошо, но два обстоятельства кажутся создающими непреодолимые трудности: действие не имеет кинетического члена и его уравнения

движения представляются тривиальными. Для того чтобы изучить это странное действие, выпишем соответствующее ему уравнение движения:

$$\Phi * \Phi = 0. \quad (7.7.45)$$

Обычно оно имеет решение $\Phi = 0$, так что в случае точечной частицы теория оказывается бессодержательной. Однако данное уравнение на самом деле представляет собой краткую запись для бесконечной совокупности связанных уравнений, соответствующих бесконечно-компонентной полевой теории, поэтому для струнной теории оно уже не является тривиальным. Предположим на минуту, что для этого уравнения движения существует ненулевое классическое решение Φ_0 , т. е.

$$\Phi_0 * \Phi_0 = 0. \quad (7.7.46)$$

Разложим поле вблизи этого классического решения.

$$\Phi \rightarrow \Phi_0 + g\Phi. \quad (7.7.47)$$

Подставим полученное разложение обратно в лагранжиан. Так как Φ_0 удовлетворяет классическим уравнениям движения, мы имеем новый лагранжиан, основанный на новом классическом решении:

$$L = 2\Phi * (\Phi_0 * \Phi) + \frac{2g}{3} \Phi^3. \quad (7.7.48)$$

Пока что ничего нового в этом не видно. Мы все еще не вошли в соприкосновение с физической теорией. Сделаем теперь важнейшее предположение, лежащее в основе этого подхода. Допустим, что существует оператор D , который удовлетворяет уравнению

$$D\Phi = \Phi_0 * \Phi - (-1)^\Phi \Phi * \Phi_0. \quad (7.7.49)$$

Если такой оператор действительно существует, то тогда можно доказать, что он нильпотентен. Подставляя выражение (7.7.49) в лагранжиан, получаем

$$L = \Phi * D\Phi + \frac{2}{3} g\Phi^3. \quad (7.7.50)$$

Если бы мы могли отождествить оператор D с обычным оператором Q подхода BRST, то тогда можно было бы показать, что это действие есть в точности BRST-действие с кинетическим членом! Итак, обычное BRST-действие могло бы появиться при разложении поля вблизи нового классического решения нашей теории.

Новой особенностью этого подхода является отсутствие какого-либо упоминания пространственно-временной фоновой метрики. Фон присутствует только в кинетическом члене, но не в члене взаимодействия. Действительно, выбор фоновой метрики осуществляется при разложении поля вблизи классического решения уравнений движения. Это объясняет, почему такой подход называется «предгеометрической» теорией. В принципе геометрия пространства-времени должна возникнуть в результате выбора одного из многих возможных вакуумов.

На практике, однако, следует тщательно проверить согласованность нашего подхода. Ключевым уравнением было (7.7.49). При определенных предположениях представляется возможным найти решения этого уравнения, где D удовлетворяет аксиомам струнной полевой теории BRST. Если это так, то обычное плоское пространство струнной полевой теории BRST есть не что иное, как одно из решений уравнения движения для действия Φ^3 . Другие решения предположительно дадут BRST-теории с другими классическими метриками.

Например, выберем

$$\Phi_0 = Q_L I, \quad (7.7.51)$$

где Q_L – BRST-оператор, определенный только слева от средней точки (для открытия струны), а I – тождественный оператор (который равен 1, если левая и правая сторона струны совпадают, и нулю в противном случае). Первоначальный оператор Q подхода BRST равен $Q_L + Q_R$. Подстановка выражения

$$\Phi = Q_L I + g\Phi \quad (7.7.52)$$

в исходное действие восстанавливает действие BRST (7.5.7). (Правая часть оператора Q появляется в вычислениях, поскольку $Q_R I = -Q_L I$.)

Как ни странно, можно показать, что эти определения согласуются с исходными пятью аксиомами разд. 7.5, так что обычное струнное действие BRST, по-видимому, есть одно из многих возможных решений уравнения (7.7.45).

Итак, плоское пространство является корректным решением уравнения (7.7.45). Однако нужно еще найти, какие другие виды фоновых метрик могут быть получены как решения уравнений движения.

§ 7.8. РЕЗЮМЕ

Исходным пунктом ковариантного калибровочного подхода было построение теории, инвариантной относительно преобразования

$$\delta|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}|\Lambda_n\rangle. \quad (7.8.1)$$

Мы постулировали эту инвариантность, основываясь на аналогии с теорией Янга–Миллса, которая также инвариантна относительно преобразований, превращающих поле в духовые поля. Фактически, раскладывая предыдущее уравнение, мы в точности получим линейную часть вариации теории Янга–Миллса

$$\Phi|P[L_0 - 1]P|\Phi\rangle,$$

где P – проекционный оператор. Путем степенного разложения можно получить точное решение этой калибровочной проблемы:

$$\langle\Phi|L_0 - \frac{1}{2}L_1L_{-1} + \dots|\Phi\rangle. \quad (7.8.2)$$

На свободном уровне данное выражение воспроизводит обычное действие Максвелла. Посредством «грубой силы» решение может быть также написано для высших порядков:

$$\begin{aligned}
 P(L_0 - 1)P &= L_0 - 1 - \frac{1}{2} L_{-1} L_1 + L_{-1}^2 \left(4L_0 + \frac{1}{2} D - 9 \right) \Delta L_1^2 \\
 &\quad + L_{-1}^2 (6L_0 + 6) \Delta L_2 + \\
 &\quad - L_{-2} (4L_0 + 2) (2L_0 + 2) \Delta L_2 + \dots
 \end{aligned} \tag{7.8.3}$$

Здесь

$$\Delta = 2(16L_0^2 + (2D - 10)L_0 + D)^{-1}, \tag{7.8.4}$$

а P - проекционный оператор, уничтожающий духовые поля. Эта теория нелокальна, что означает необходимость включения в нее дополнительных полей для поглощения нелокальных членов.

Потребность в дополнительных полях появляется уже в методе BRST-квантования. Отметим, что духи Фаддеева-Попова распространяются в свободной теории:

$$p_\theta^1 (\partial_\sigma + \partial_\tau) \theta^1 + p_\theta^2 (\partial_\tau - \partial_\sigma) \theta^2. \tag{7.8.5}$$

Поэтому континуальный интеграл нужно модифицировать так, чтобы учесть эти дополнительные степени свободы. Гильбертово пространство нашего полевого функционала должно быть теперь расширено:

$$\begin{aligned}
 1 &= |\theta\rangle |X\rangle \int DX D\theta \langle \theta | \langle X |, \\
 \langle \theta | \langle X | \Phi \rangle &= \Phi(X, \theta).
 \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

Это означает, что функции Грина представляются теперь в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta(X_i, \theta_i; X_j, \theta_j) &= \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX DP D\theta DP_\theta \exp i \int d\sigma d\tau L(\sigma, \tau) \\
 &= \int D^2 \Phi \Phi(X_i, \theta_i) \Phi^*(X_j, \theta_j) \exp i \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX D\theta L(\Phi).
 \end{aligned} \tag{7.8.7}$$

BRST-квантование вводит новый нильпотентный оператор Q , такой что

$$\begin{aligned}
 Q &= c_0 (L_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-n} L_n + L_{-n} c_n] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} : c_{-m} c_{-n} b_{n+m} : (m - n),
 \end{aligned} \tag{7.8.8}$$

$$Q^2 = 0. \tag{7.8.9}$$

Таким образом, действие свободной теории может быть просто выражено в виде

$$\begin{aligned}
 L &= \langle \Phi | Q | \Phi \rangle, \\
 \delta | \Phi \rangle &= Q | \Lambda \rangle.
 \end{aligned} \tag{7.8.10}$$

Обобщение его на теорию взаимодействий можно выполнить, используя технику функций Неймана. Нам нужно конформное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость в полностью симметричную конфигурацию. Один из способов это сделать состоит в том, чтобы сшить отображения шести зарядов, чтобы получить трехструнную вершину:

$$\rho = \sum_{i=-3}^{+3} \alpha_i \ln(z - z_i) = \ln \frac{z^3 - i}{z^3 + i} - i\pi/2, \quad (7.8.11)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{-3} = 1, \quad (7.8.12)$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \alpha_3 = -1,$$

$$z_1 = e^{i\pi/6}; \quad z_2 = e^{i5\pi/6},$$

$$z_3 = e^{i\pi/2}; \quad z_{-1} = -z_1,$$

$$z_{-2} = -z_2; \quad z_{-3} = -z_3.$$

Это позволяет написать явную формулу для вершинной функции:

$$|V_{123}\rangle = \exp \left[\frac{1}{2} \alpha_{-n}^r N_{nm}^{rs} \alpha_{-m}^s + P_0^r N_{0m}^{rs} \alpha_{-m}^s + \frac{1}{2} N_{00} \sum_{r=1}^3 P_{0r}^2 \right] |0_{123}\rangle. \quad (7.8.13)$$

Одно из главных преимуществ подхода BRST—это формализм, в котором все может быть сведено к основным предположениям данной теории. Оказывается, что с помощью пяти аксиом, которые просто постулируются, мы можем вывести всю теорию BRST:

(1) Существование нильпотентной операции дифференцирования:

$$Q^2 = 0; \quad (7.8.14)$$

(2) Ассоциативность умножения *:

$$[A * B] * C = A * [B * C]; \quad (7.8.15)$$

(3) Правило Лейбница:

$$Q[A * B] = QA * B + (-1)^A A * QB; \quad (7.8.16)$$

(4) Правило умножения:

$$\int A * B = (-1)^{AB} \int B * A; \quad (7.8.17)$$

(5) Правило интегрирования:

$$\int QA = 0. \quad (7.8.18)$$

Используя эти правила, мы можем теперь показать, что инвариантное действие есть

$$L = \int \Phi * Q\Phi + \frac{2}{3} \Phi * \Phi * \Phi, \quad (7.8.19)$$

представляющее собой члены Черны–Саймонса.

Наконец, можно убедиться, что трехструнная вершинная функция эквивалентна на массовой поверхности обычной вершине Венециано:

$$|\bar{V}_{123}\rangle = \prod_{r=1}^3 \exp \left[\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n^r L'_{-n} \right] |V_{123}\rangle. \quad (7.8.20)$$

Следовательно,

$$\langle \text{физ} | V_{123} \rangle = \langle \text{физ} | \bar{V}_{123} \rangle. \quad (7.8.21)$$

Здесь имеется, однако, одно смущающее обстоятельство. Дело в том, что мы можем определить ковариантным образом вершину в формализме светового конуса и показать, что она также эквивалентна на массовой поверхности обычной вершине Венециано. Таким образом, мы сталкиваемся в рамках подхода BRST с двумя эквивалентными вершинными функциями, приводящими на массовой поверхности к одинаковым результатам.

Хотя открытые бозонные струны было относительно легко выразить на языке BRST, этот подход для суперструн и замкнутых струн оказался гораздо менее успешным. Проблема заключается в том, что наивная «духовая арифметика» суперструнных действий и действий для замкнутых струн дает неправильные результаты:

$$\langle \Phi | Q | \Phi \rangle = 0.$$

Для изменения суммирования духов было предложено несколько способов, состоящих в «транкировании» либо гильбертова пространства, либо оператора Q до получения нужных духовых чисел. Проблема, связанная с тем, что при этом нулевые моды трактуются отлично от других мод, вероятно, приводит к нарушению локальности по σ и, следовательно, к невозможности обобщения этого подхода на случай взаимодействий.

Более обещающий подход заключается в том, чтобы ввести бозонизированные духовые операторы, имеющие недостающие духовые числа, и затем вставить их в средних точках, где мы не нарушаем локальность по σ . Такой подход, по-видимому, хорошо работает для открытых суперструн, но терпит неудачу для замкнутых струн, потому что выделение «средних точек» нарушает модулярную инвариантность.

Такая ситуация является лишь проявлением более глубокой проблемы. BRST-теория просто постулируется без всякого вывода, в ее основе отсутствуют какие бы то ни было физические и геометрические принципы. Таким образом, она не может быть окончательной теорией. Наличие двух эквивалентных вершинных функций показывает, что это, по сути, теория в фиксированной калибровке. Теперь мы должны обратиться к геометрическому варианту теории, в котором все можно вывести из фундаментальных принципов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kaku M. Nucl. Phys. B267, 125 (1985).
- [2] Kaku M., Lykken J. In: Symposium on Anomalies, Topology, and Geometry. World Scientific, Singapore, 1985.
- [3] Banks T., Peskin M. In: Symposium on Anomalies, Topology, and Geometry. World Scientific, Singapore, 1985.
- [4] Brower R. C., Thorn C. B. Nucl. Phys. B31, 163 (1971).
- [5] Кас V. Lect. Notes in Phys. 94, 441 (1979); см. также Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. Докл. АН СССР 269 (1983), с. 1057–1060.
- [6] Kaku M. Phys. Lett. 162B, 97 (1985).
- [7] Kato M., Ogawa K. Nucl. Phys. B212, 443 (1983).
- [8] Fradkin E. S., Vilkoviskii. Phys. Lett. 55B, 224 (1975).
- [9] Siegel W. Phys. Lett. 142B, 276 (1984); 151B, 391, 396 (1985).
- [10] Banks T., Peskin M. Nucl. Phys. B264, 513 (1986).
- [11] Banks T., Friedan D., Martinec E., Peskin M. E. and Preitschopf. Nucl. Phys. B274, 71 (1986).
- [12] Siegel W., Zwiebach B. Nucl. Phys. B263, 105 (1985).
- [13] Zwiebach B. СТП 1308, October 1985.
- [14] Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ooguri H. Prog. Theor. Phys. 75, 162 (1986).
- [15] Pfeffer D., Ramond P. and Rogers V. Nucl. Phys. B274, 131 (1986).
- [16] Witten E. Nucl. Phys. B268, 253 (1986).
- [17] Witten E. Nucl. Phys. B276, 293 (1986).
- [18] Neveu A., West P. C. Phys. Lett. 165B, 63 (1985).
- [19] Neveu A., Schwarz J. H. and West P. C. Phys. Lett. 164B, 51 (1985).
- [20] Neveu A., West P. C. Nucl. Phys. B268, 125 (1986).
- [21] Neveu A., Nicolai H. and West P. C. Nucl. Phys. B264, 173 (1986).
- [22] Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. Phys. Lett. 172B, 186 (1986); Phys. Lett. 172B, 195 (1986).
- [23] Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. Phys. Rev. D34, 2360 (1986); Phys. Rev. D35, 3082 (1987); RIFP-674 (1986); RIFP-673 (1986).
- [24] Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. Nucl. Phys. B283, 433 (1987); см. также Chang N. P., Guo H. Y., Qui Z. and Wu K. CCNY-HEP-86/5, 1986.
- [25] Peskin M. E., Thorn C. B. Nucl. Phys. B269, 509 (1986).
- [26] Giddings S. Nucl. Phys. B278, 242 (1986).
- [27] Giddings S., Martinec E. Nucl. Phys. B278, 91 (1986).
- [28] Giddings S., Martinec E. and Witten E. Phys. Lett. 176B, 362 (1986).
- [29] Gross D. J., Jevicki A. Nucl. Phys. B282, 1 (1987); B287, 225 (1987).
- [30] Samuel S. Phys. Lett. 181B, 249, 255 (1986); Ohta N. Phys. Rev. D34, 3785 (1986).
- [31] Cremmer E., Thorn C. B. and Schwimmer A. Phys. Lett. 179B, 57 (1986).
- [32] Cremmer E. Quantum Gravity-Integrable and Conformal Invariant Theories Conference, LPTENS 86/32, September 1986.
- [33] Caneschi L., Schwimmer A. and Veneziano G. Phys. Lett. 30B, 351 (1969).
- [34] Sciuto S. Nuovo Chimento Lett. 2, 411 (1969).
- [35] Bogojevic A. R., Jevicki A. Nucl. Phys. B287, 381 (1987).
- [36] Neveu A., West P. C. Phys. Lett. 179B, 235 (1986).
- [37] Другой подход к длинам струн см. в Neveu A., West P. Nucl. Phys. B293, 266 (1987).
- [38] Siegel W., Zwiebach B. Nucl. Phys. B282, 125 (1987).
- [39] Lykken J., Raby S. Nucl. Phys. B278, 256 (1986).

- [40] Sen S., Holman R. Phys. Lett. **58**, 1304 (1987).
- [41] Ohta N. Phys. Rev. Lett. **56**, 440 (1986); **56**, 1316 (E) (1986); de Alwis S. P., Ohta N. Phys. Lett. **B174**, 383 (1986); **B188**, 425 (1987); **B200**, 466 (1988).
- [42] Terao H., Uehara S. Phys. Lett. **168B**, 70 (1986); Phys. Lett. **173B**, 134 (1986); Phys. Lett. **173B**, 409 (1986); Phys. Lett. **179B**, 342 (1986).
- [43] Date G.D., Gunaydin M., Pernici M., Pilch K. and van Nieuwenhuizen P. Phys. Lett. **171B**, 182 (1986).
- [44] Kazama Y., Neveu A., Nicolai H. and West P. C. Nucl. Phys. **B276**, 336 (1986).
- [45] Aratyn H., Zimerman A. H. Nucl. Phys. **B260**, 349 (1986); Phys. Lett. **165B**, 130 (1986); Phys. Lett. **166B**, 130 (1986); Phys. Lett. **168B**, 75 (1986).
- [46] Ooguri H. Phys. Lett. **172B**, 204 (1986).
- [47] Awada M. Phys. Lett. **172B**, 32 (1986); **180B**, 45 (1986); Nucl. Phys. **B282**, 349 (1987).
- [48] Ballestrero A., Maina E. Phys. Lett. **180B**, 53 (1986).
- [49] Tang J. F., Zhu C. J. Phys. Lett. **180B**, 50 (1986).
- [50] Suehiro K. Nucl. Phys. **B296**, 333 (1988).
- [51] Itoh K., Ogawa K. and Suehiro K. KUNS-846 HE(TH) 86/06.
- [52] Leclair A. Phys. Lett. **168B**, 53 (1986).
- [53] Leclair A., Distler J. Nucl. Phys. **B273**, 552 (1986).
- [54] Friedan A. Enrico Fermi Institute Report No. 85-27, 1985; Yonea T. Proceedings of the Seventh Workshop on Grand Unification /ICOBAN 86, Toyama, Japan; E. Witten, unpublished.
- [55] Hata H., Itoh K., Kugo T., Kunitomo H. and Ogawa K. Phys. Lett. **175B**, 138 (1986).
- [56] Horowitz G. T., Lykken J., Rohm R. and Strominger A. Phys. Rev. Lett. **57**, 283 (1986); см. также Kikkawa K., Maeno M. and Sawada S. Phys. Lett. **197B**, 524 (1987).

;

Глава 8

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ СТРУН

§ 8.1. ЗАЧЕМ НУЖНА ГЕОМЕТРИЯ?

Как мы видели, развитие теории струн в течение последних 20 лет происходило в направлении, прямо противоположном направлению развития общей теории относительности. Во многом это объясняет, почему мы до настоящего времени заняты поисками фундаментальной геометрической формулировки теории струн.

Общая теория относительности была открыта Эйнштейном, который сначала попытался объяснить важнейший физический принцип – *принцип эквивалентности*, а затем постулировал геометрическую формулировку, объясняющую общую ковариантность. Следующий шаг состоял в построении единственного действия, удовлетворяющего этим принципам. Дальнейшие этапы в развитии общей теории относительности были связаны с созданием классической теории римановых многообразий. И наконец, были предприняты попытки проквантовать эту теорию. Таким образом, историческая схема развития общей теории относительности выглядит так:

Геометрия → Действие → Классическая теория → Квантовая теория.

В сравнении с этой схемой теория струн развивалась в обратном направлении. Ее развитие начинается со случайного открытия члена Венециано–Борна, построения квантовых петель, приводящих к классической струне Намбу–Гото, затем к действию в калибровке светового конуса и, наконец, к попыткам геометрического вывода действия:

Квантовая теория → Классическая теория → Действие → Геометрия.

Только недавно, с возрождением интереса к струнной теории, были предприняты попытки совместными усилиями завершить ее развитие. Как мы подчеркивали, это не только академический вопрос. В конечном счете успех или неудача теории струн определится на основании того, сможет ли она выбрать подходящий квантовый вакуум среди десятков тысяч возможностей. Таким образом, только в рамках настоящей теории поля можно будет разрешить насущную проблему теории струн, а именно непертурбативное нарушение симметрии, сводящее 10-мерный вакуум к четырехмерному.

В сущности, имеются только два различных способа, которыми можно было бы вывести полевою теорию струн.

(а) Во-первых, можно попытаться получить действие полевой теории, отталкиваясь от первично квантованного действия Намбу, таким же образом, каким Фейнман вывел уравнение Шрёдингера из классической теории нерелятивистских частиц. Такая стратегия «снизу

вверх» включает в себя выдвижение разумных допущений на основании особенностей первично квантованной теории. Недостаток этого подхода кроется в том, что он обязательно нарушает калибровочную инвариантность теории (т. е. мы должны выбрать калибровку светового конуса или конформную калибровку BRST). Это значит, что необходимо произвольно предположить существование определенных полей (например, «духовых полей Фаддеева–Попова»). Эти поля присутствуют в первично квантованном подходе с фиксированной калибровкой, однако их появление во вторично квантованной полевой теории является странным и неестественным. Поэтому в такой теории это действие выглядит вычурным. Другими словами, подход BRST сам по себе не является физическим принципом.

- (б) Во-вторых, в рамках геометрического подхода можно вывести всю полевую теорию, выделив фундаментальные *физические принципы*. Это метод «сверху вниз», наследующий дух теории Янга–Миллса и общей теории относительности. Теперь мы начинаем с *единственной локальной калибровочной группы*, введение которой основано на простых физических принципах, и требуем, чтобы действие было инвариантным относительно преобразований из этой группы. Основная задача такого способа рассмотрения состоит в выделении калибровочной группы струнной теории, нахождении ее неприводимых представлений, кривизны и самого действия.

В этой главе мы рассмотрим наиболее перспективный вариант геометрической теории.

Мы будем придерживаться аналогии с общей теорией относительности и теорией Янга–Миллса, которую можно вывести из двух простых принципов геометрического происхождения – глобальной и локальной симметрий.

Глобальная симметрия. Теория должна описывать распространение спиральностей, соответствующих чистым полям A_μ^a со спином 1 и $g_{\mu\nu}$ со спином 2, преобразующихся как неприводимые представления группы $SU(N)$ и группы Лоренца.

Локальная симметрия. Действие должно быть локально инвариантным относительно действия группы $SU(N)$ и общековариантным.

(Первый принцип является физическим. Он определяет фундаментальные представления полей и утверждает, что они должны быть «чистыми», т. е. не содержащими духов и высших производных. Мы не хотим включать в теорию духов типа высших производных; мы прямо исключаем из рассмотрения действия типа R^2 или F^4 , содержащие высшие производные. Это означает, что первый принцип не может быть следствием второго, поскольку локальная инвариантность сама по себе совместима с теориями, содержащими высшие производные.)

Выделив эти два физических принципа, для отыскания действия мы будем следовать следующей основной стратегии:

Калибровочная группа \rightarrow Связности \rightarrow Ковариантные производные \rightarrow
 \rightarrow Тензоры кривизны \rightarrow Действие. (8.1.1)

Иначе говоря, для того чтобы вывести действие, мы сначала начинаем с двух полей связности, по одному для каждой группы. Пусть A_μ^i — поля связности для генераторов τ^i группы $SU(N)$, а ω_μ^{ab} — поля связности для генераторов σ^{ab} группы Лоренца. Тогда с помощью этих полей можно построить следующие ковариантные производные:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + A_\mu^i \tau^i, \\ \nabla_\mu &= \partial_\mu + \omega_\mu^{ab} \sigma^{ab}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Далее мы выписываем тензоры кривизны для этих двух групп:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= F_{\mu\nu}^i \tau^i, \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu] &= R_{\mu\nu}^{ab} \sigma^{ab}. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

И наконец, мы видим, что тензорное исчисление для указанных групп столь ограничительно, что оно допускает существование только одного действия, которое основано на этих тензорах кривизны, содержащих две производные, и это действие обладает как общековариантностью, так и локальной $SU(N)$ -инвариантностью:

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}. \quad (8.1.4)$$

Замечательно, что этих двух принципов, основанных на одной лишь теории групп, оказывается достаточно для определения единственного действия. Причина состоит в том, что тензорное исчисление (т.е. правила умножения неприводимых представлений и мера интегрирования) устанавливается калибровочной группой. Его не нужно вводить «вручную». Таким образом, тензорное исчисление столь ограничительно, что это приводит к выделению единственного действия.

Подобным образом мы следуем этой основной стратегии (8.1.1), свойственной обычной калибровочной теории точечной частицы и общей теории относительности, для того чтобы отыскать действие полевой теории струн. Мы предположим существование совершенно новой локальной калибровочной группы для струны, называемой нами *объединенной струнной группой*, и затем перейдем к построению ее представлений. Согласно основной стратегии (8.1.1), мы сначала строим ковариантные производные, затем кривизны и, наконец, само действие. При этом выясняется, что причина, по которой полевая теория струн кажется столь отличной от общепринятой калибровочной теории, заключается в более богатой и сложной структуре неприводимых представлений и тензорного исчисления для объединенной струнной группы по сравнению с группой Лоренца и $SU(N)$.

Объединенная струнная группа в свою очередь может быть далее

разложена на две меньшие локальные калибровочные группы, а именно на репараметризационную и струнную группы.

Репараметризационная группа

Репараметризационная группа — это группа преобразований параметризации струн:

$$\sigma \rightarrow \sigma + \varepsilon(\sigma).$$

Ее обозначают $\text{Diff}(S)$, где S относится либо к открытой струне $[0, 1]$, либо к замкнутой S_1 . Группа $\text{Diff}(S)_-$ порождается только нечетными генераторами Вирасоро $L_n - L_{-n}$, и она является подгруппой $\text{Diff}(S)$ (которая изоморфна конформной группе и порождается L_n для всех n). $\text{Diff}(S)_-$ отображают физические струны C в себя, т. е.

$$\text{Diff}(S)_- : C \rightarrow C.$$

Важность репараметризационной группы станет для нас ясной, после того как мы полностью сформулируем теорию в *пространстве петель*, т. е. в пространстве физических, непараметризованных пространственно-временных струн $\{C\}$. До сих пор в этой книге рассматривались только параметризованные струны $X_\mu(\sigma)$ и ни слова не было сказано о непараметризованных струнах C . Главный смысл объединенной струнной группы состоит в нахождении такой групповой структуры, переводящей одни струны в другие, которая была бы полностью определена в пространстве петель. Реальные физические процессы, описываемые геометрической теорией, должны обязательно развиваться в физическом пространстве непараметризованных струн.

Каждая из бесконечного множества струнных конфигураций представляется как отдельная точка в пространстве петель. Это важно потому, что пространство петель определяет физическую динамику взаимодействующих струн, вполне очищенную от всяческих калибровочных артефактов (таких, как параметризационные средние точки, параметризационные длины, духи Фаддеева–Полова, духовые числа), которые лишь затемняют рассмотрение того, что происходит в физическом пространстве–времени.

Пусть $X_\mu(\sigma)$ — вектор, соединяющий начало системы координат с точкой, обозначенной σ на струне C . Потребуем, чтобы наше действие не зависело от конкретной параметризации $\{\sigma\}$, т. е. для свободного действия $I(C)$ выполнялось:

$$I(C_{\{\sigma\}}) = I(C_{\{\bar{\sigma}\}}). \quad (8.1.5)$$

Математически это значит, что теория должна быть инвариантной относительно всех возможных диффеоморфизмов струны. Поэтому *параметризационная длина*

$$\int_0^1 d\sigma = l \quad (8.1.6)$$

оказывается чистой фикцией.

В подлинно ковариантном формализме следует иметь возможность, по желанию изменять параметризационную длину струны. Конечно, со струной C связывается также реальная физическая величина, представляющая ее действительную *физическую инвариантную длину*:

$$L = \int_0^l \sqrt{X_\mu'^2(\sigma)} d\sigma. \quad (8.1.7)$$

Данное выражение инвариантно при изменении параметризации:

$$\sigma \rightarrow \sigma + \varepsilon(\sigma, X). \quad (8.1.8)$$

Различие между фиктивной параметризационной длиной l и физическим инвариантом L явится главным фактором геометрического формализма. (Все калибровочно-фиксированные струнные полевые теории, такие как теория в калибровке светового конуса и BRST, основываются на фиктивной параметризационной длине. Для теории в калибровке светового конуса она пропорциональна p^+ , для BRST равна π . Как мы увидим, геометрическая теория отталкивается от физической инвариантной длины L , измеряемой в сантиметрах.) Мы построим теорию на тензорах, инвариантных относительно вышеприведенного закона преобразования, что позволит изменять параметризационную длину в любой момент.

Струнная группа

Далее в рамках объединенной струнной группы мы хотим обсудить вторую группу симметрии, образованную взаимодействующими струнами. Определим *триплет* как набор из трех ориентированных физических струн (с произвольными параметризационными длинами) C_1 , C_2 и C_3 , которые можно расположить как на рис. 8.1. Скажем, что две струны *сопряжены* друг другу, если они входят в один триплет. (Заметим, что струна имеет бесконечный ряд сопряженных. Сопряжение струны C будем обозначать \bar{C} .) Тогда *струнная группа* есть совокупность преобразования C во все ее сопряжения, т. е.

$$SG: C \rightarrow \bar{C}.$$

Эти две группы, репараметризационная и струнная, в свою очередь могут быть объединены в один принцип.

Мы определяем универсальную струнную группу как группу, которая отображает струну C в себя и во все ее сопряжения:

$$USG: \begin{cases} C \rightarrow C, \\ C \rightarrow \bar{C}. \end{cases} \quad (8.1.9)$$

При обобщении этой бозонной группы, связанном с включением

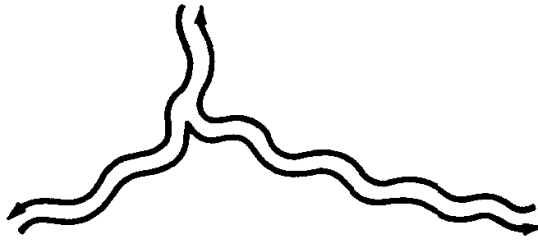


Рис. 8.1. Триплет трех струн. Три физические непараметризованные струны в пространстве петель образуют триплет, если они могут быть расположенными так, как на рисунке. Такое определение свободно от параметризационных средних точек и параметризационных длин. Точка соединения трех струн является произвольной.

пространственно-временной суперсимметрии, мы получаем объединенную струнную группу.

Располагая этой калибровочной группой, можно выделить два физических принципа, из которых мы выведем всю струнную теорию [1–5]:

Глобальная симметрия. Поля A_σ^a и $e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}$ должны преобразовываться по неприводимым представлениям глобальной группы $\text{Diff}(S)$.

Локальная симметрия. Теория должна быть локально инвариантной относительно группы USG , которая отображает S в себя и в \bar{S} .

Замечательно, что существует только одно выделенное действие, которое удовлетворяет обоим этим принципам. Преимущества этого геометрического действия состоят в следующем:

- (1) Таинственный «духовый сектор» имеет простую и элегантную интерпретацию в геометрической теории. Мы увидим, что он соответствует касательному пространству.
- (2) Оба варианта струнной полевой теории BRST можно получить как калибровочно-фиксированные варианты геометрической теории. Симметричную теорию BRST называем калибровкой, «склеивающей в средней точке», а BRST-теорию, подобную формализму светового конуса, — калибровкой, склеивающей струны концами. Эти калибровки соответствуют различным параметризациям геометрической вершины.
- (3) Формализм определяется в пространстве петель и, следовательно, совершенно не зависит от параметризации или от классической фоновой гравитационной метрики $g_{\mu\nu}$.
- (4) Правила умножения и интегрирования жестко устанавливаются теорией групп. Тем самым отпадает необходимость в их постулировании.

К сожалению, в случае общей теории относительности и теории Янга–Миллса вначале необходимо построить внушительный математический аппарат для анализа $SU(N)$ и общей ковариантности. Наибольшая часть

работы отводится на построение представлений групп и тензорного исчисления. После того как это сделано, выписывание самого действия занимает всего несколько строк. То же самое относится и к геометрической струнной полевой теории. В следующих шести разделах мы будем следовать основной стратегии (8.1.1) и терпеливо выведем для USG все представления, связности и кривизны. После этого на вывод самого действия в разд. 8.7 понадобится только одна страница.

§ 8.2. СТРУННАЯ ГРУППА

Следуя основной стратегии (8.1.1), начнем обсуждение струнной группы с введения совокупности всех непараметризованных физических пространственно-временных струн:

$$\text{Непараметризованные физические струны: } \{C\}. \quad (8.2.1)$$

Очень важно отметить, что эти струны определяются независимо от любой конкретной параметризации или любой фоновой классической гравитационной метрики. При этом каждая струна в данном триплете имеет определенное направление или ориентацию, поэтому в целом триплетная конфигурация является циклической (антициклической). Теперь определим

$$f_{C_1 C_2 C_3} = \begin{cases} +1 & \text{для триплета,} \\ -1 & \text{для антриплета,} \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (8.2.2)$$

Эти константы просто равны 1, -1 и 0 в зависимости от того, образуют ли струны 1, 2 и 3 триплет, антриплет (с обратным порядком) или ни то ни другое.

Пусть \bar{C} представляет струну с обратной ориентацией по отношению к струне C . Тогда окончательная форма структурных констант такова:

$$\text{Структурные константы: } \begin{cases} f_{C_1 C_2}^{\bar{C}_3} = f_{C_1 C_2 C_3}, \\ f_{C_2 C_1}^{\bar{C}_3} = -f_{C_2 C_1 C_3}. \end{cases} \quad (8.2.3)$$

Эти структурные константы являются антисимметричными по струнам 1 и 2. Далее мы вводим абстрактный групповой генератор L_C , связанный с физической струной C . Алгебра струнной группы определяется следующим образом [1, 2]:

$$\text{SG: } [L_{C_1}, L_{C_2}] = f_{C_1 C_2}^{\bar{C}_3} L_{C_3}. \quad (8.2.4)$$

(Мы будем всегда суммировать по повторяющимся индексам.)

Решающая проверка, конечно, состоит в том, удовлетворяет ли эта алгебра тождеству Якоби. Образует коммутатор трех таких генераторов:

$$[L_{C_1}, [L_{C_2}, L_{C_3}]] + \text{перестановки} = 0. \quad (8.2.5)$$

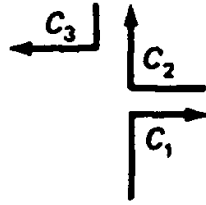


Рис. 8.2. Доказательство тождества Якоби. Сумма по перестановкам триплетного коммутатора трех струн исчезает тождественно. При этом отсутствует необходимость подбирать точку соединения трех струн для выполнения тождества Якоби.

Следовательно, хотелось бы показать, что

$$f_{[C_1, C_2]}^{C_4} f_{C_3, C_4}^{C_2} = 0. \quad (8.2.6)$$

(Заметим, что суммирование по C_4 тривиально, поскольку существует только одна струна, которая сопряжена как C_1 , так и C_2 .)

Замкнутость алгебры легко доказать, рассмотрев рис. 8.2. Для доказательства требуется пять струн. Выбрав перестановку с порядком следования струн C_1 и C_2 сначала и C_3 потом, мы приобретаем фактор -1 . Однако вклад от перестановки C_2 и C_3 и затем C_1 равен $+1$. И наконец, последняя перестановка C_1 и C_3 , а затем C_2 дает нуль, потому что эти струны триплета не образуют. Таким образом, сумма по циклическим перестановкам равна

$$-1 + 1 + 0 = 0.$$

Важно отметить, что структурные константы группы удовлетворяют тождеству Якоби без каких-либо ссылок на параметризацию струны. Каждый индекс представляет пространственно-временную струну C , не зависящую от любой параметризации или классической метрики. При этом не нужно подбирать точки соединения четырех струн, и следовательно, на струне не существует специальной «средней точки», которая как-то выделяется.

Убедившись в замкнутости алгебры, попытаемся теперь построить некоторое ее простое представление. При этом мы будем придерживаться вывода представлений групп Ли, описанного в приложении, где строится представление ортогональной группы $O(N)$. Там мы начинаем с преобразования поворота для вектора x_i ,

$$x'_i = O_{ij} x_j, \quad (8.2.7)$$

оставляющего неизменной комбинацию $x_i x_i$:

$$x_i x_i = \text{инвариант}. \quad (8.2.8)$$

Множество матриц O_{ij} , не меняющих $x_i x_i$, образуют группу $O(N)$.

Применим тот же подход к струнной группе. Для этого мы сделаем переход от $O(N)$ к струнной группе, отмечая элементы представления индексом C :

$$x_i \rightarrow \varphi_C, \quad (8.2.9)$$

где C представляет все возможные пространственно-временные струнные конфигурации, совершенно не зависящие от любой параметризации струны. φ_C играет точно такую же роль, что и x_i . Как и в случае $O(N)$, выполним над этим вектором преобразование с помощью матриц, определенных на струнных состояниях:

$$\varphi'_{C_i} = \sum_{C_j} O_{C_i}^{C_j} \varphi_{C_j}. \quad (8.2.10)$$

Теперь потребуем, чтобы комбинация $\varphi^C \varphi_C$ не менялась под действием группы O :

$$\varphi^C \varphi_C = \text{инвариант}. \quad (8.2.11)$$

Здесь использовано определение

$$\varphi^C = \varphi_{\tilde{C}}, \quad (8.2.12)$$

где \tilde{C} обозначает струну C с измененной ориентацией. Обратим внимание на то, что струнные индексы C преобразуются под действием струнной группы *ковариантным* образом (Λ – параметр преобразования),

$$\delta \varphi_{C_i} = f_{C_i, C_k}^{C_k} \Lambda^{C_j} \varphi_{C_k}, \quad (8.2.13)$$

в то время как индексы элементов для струн с обратной ориентацией преобразуются *контравариантно*:

$$\delta \varphi^{C_i} = -f_{C_i, C_k}^{C_k} \Lambda^{C_j} \varphi^{C_k}. \quad (8.2.14)$$

Подставляя (8.2.13) и (8.2.14) в (8.2.11), можно показать, что комбинация $\varphi^C \varphi_C$ действительно инвариантна.

В этом представлении явный вид генераторов таков:

$$L_{C_i} = f_{C_i, C_k}^{C_k} \varphi^{C_j} \frac{\delta}{\delta \varphi^{C_k}}. \quad (8.2.15)$$

Элементы струнной группы удовлетворяют условию

$$O^T O = 1. \quad (8.2.16)$$

Подобно примеру $O(N)$ с метрикой δ_{ij} , здесь мы видим, что метрика есть

$$\delta_{C_i}^{C_j} = \begin{cases} +1, & \text{если } C_i = \tilde{C}_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8.2.17)$$

Используя (8.2.16), легко проверить, что под действием струнной группы дельта-функция преобразуется как истинный тензор со смешанными компонентами:

$$(O^T)_{C_i}^{C_j} \delta_{C_j}^{C_k} O_{C_k}^{C_l} = \delta_{C_i}^{C_l}. \quad (8.2.18)$$

Выразим элементы нашей группы через экспонирование элемента

алгебры:

$$\Omega = e^{\Lambda^C L_C}, \quad (8.2.19)$$

где Λ^C – параметры группы. Такое определение групповых элементов как операторов позволяет написать

$$\Omega \varphi_{C_i} \Omega^{-1} = O_{C_i}^{C_j} \varphi_{C_j}. \quad (8.2.20)$$

Действие группы на состояниях определим следующим образом:

$$[L_{C_i}, \varphi_{C_k}] = f_{C_i, C_k}^{C_k} \varphi_{C_k}. \quad (8.2.21)$$

Подставляя (8.2.21) в (8.2.20), мы можем снова получить инфинитезимальное преобразование:

$$\delta \varphi_{C_i} = f_{C_i, C_k}^{C_k} \Lambda^{C_j} \varphi_{C_k}. \quad (8.2.22)$$

Отметим, что эти преобразования действительно образуют группу, так как

$$\Omega_1 \Omega_2 \varphi_C \Omega_2^{-1} \Omega_1^{-1} = (O_2 O_1)_C^C \varphi_C. \quad (8.2.23)$$

Этот групповой закон можно проверить для инфинитезимальных преобразований. В этом случае мы просто заново выводим тождество Якоби.

В отличие от ортогональной группы, для которой векторы x_i и групповые генераторы λ_{ij} преобразовывались различным образом, мы находим, что вектор φ_C преобразуется по присоединенному представлению нашей группы. Пусть, к примеру, базисные состояния струнной группы представляются базисными векторами

$$|e^C\rangle. \quad (8.2.24)$$

Теперь определим $|\varphi\rangle$:

$$|\varphi\rangle = \varphi_C |e^C\rangle. \quad (8.2.25)$$

Следовательно, мы имеем следующий инвариант:

$$\delta |\varphi\rangle = 0. \quad (8.2.26)$$

Таким образом, преобразования

$$\begin{cases} \delta \varphi_{C_i} = f_{C_i, C_k}^{C_k} \Lambda^{C_j} \varphi_{C_k}, \\ \delta |e^{C_i}\rangle = -f_{C_i, C_k}^{C_k} \Lambda^{C_j} |e^{C_k}\rangle \end{cases} \quad (8.2.27)$$

сохраняют этот инвариант.

Имея набор таких контравариантных базисных векторов, мы можем также определить действие генераторов в их пространстве:

$$\begin{cases} \langle e_C | e^{C'} \rangle = \delta_C^{C'}; \langle e_C | \Omega | e^{C'} \rangle = O_C^{C'}, \\ L_{C_i} | e^{C_j} \rangle = f_{C_i, C_k}^{C_k} | e^{C_k} \rangle. \end{cases} \quad (8.2.28)$$

В этом специальном представлении единичный оператор имеет вид

$$1 = |e_c\rangle \langle e^c|,$$

а генератор нашей алгебры в новом базисе может быть представлен как

$$C_{C_i} = |e_{C_i}\rangle f_{C_j, C_i}^{C_k} \langle e^{C_j}|.$$

Следовательно, еще раз получаем уравнение

$$\langle \phi | \phi \rangle = \phi^c \phi_c = \phi \times \phi = \text{инвариант.} \quad (8.2.29)$$

Здесь мы сочли удобным ввести новый символ \times , обозначающий умножение струн. Таким образом, показано, что следующая комбинация инвариантна относительно преобразований, параметризуемых параметром Λ (см. рис. 8.3):

$$\delta_\Lambda \langle \phi \times \phi \rangle = 0. \quad (8.2.30)$$

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с трехструнными взаимодействиями. Определим

$$\langle \phi \times \phi \times \phi \rangle = \phi_{C_i} \phi_{C_j} \phi_{C_k} f^{C_i, C_j, C_k}. \quad (8.2.31)$$

Здесь мы суммируем по всем возможным триплетным комбинациям C_i , C_j , C_k . Можно теперь показать, что эта комбинация инвариантна относительно действия струнной группы:

$$\delta_\Lambda \langle \phi \times \phi \times \phi \rangle = 0. \quad (8.2.32)$$

(Простейший способ показать инвариантность трехструнной вершины состоит в том, чтобы разложить сумму по всем возможным взаимодействиям и выделить только одно значение Λ_c . Зафиксировав величину параметра Λ , найдем четыре различных члена, дающих вклад в вариацию. На рис. 8.4 видно, что сумма всех четырех диаграмм дает нуль.)

Итак, мы установили, что представления струнной группы очень похожи по своей структуре на представление группы $O(N)$. Более того, найдены два инварианта ϕ^2 и ϕ^3 , не зависящие от параметризации или

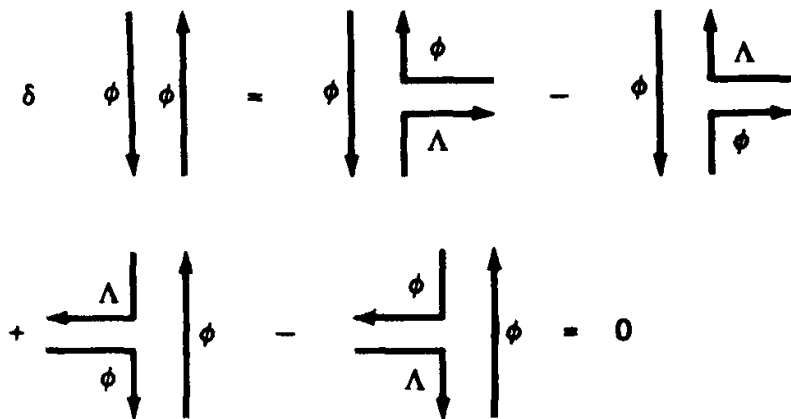


Рис. 8.3. Построение инвариантов струнной группы. Прямым вычислением можно показать, что вариация этого квадратичного члена обращается в нуль.

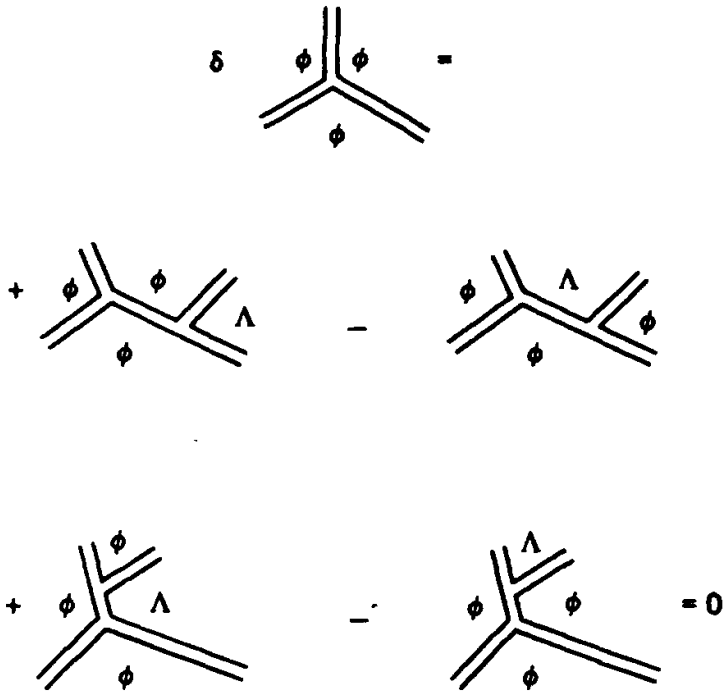


Рис. 8.4. Инвариантность кубического взаимодействия. Мы можем показать, что кубическое взаимодействие является инвариантным относительно действия струнной группы.

фоновой гравитационной метрики:

$$\begin{cases} \delta_\Lambda \langle \phi \times \phi \rangle = 0, \\ \delta_\Lambda \langle \phi \times \phi \times \phi \rangle = 0. \end{cases} \quad (8.2.33)$$

§ 8.3. ОБЪЕДИНЕННАЯ СТРУННАЯ ГРУППА

Определив порознь струнную группу SG и Diff(S), объединим их теперь и обсудим универсальную струнную группу для бозонных струн и ее суперсимметричное обобщение – объединенную струнную группу.

Чтобы выписать генераторы универсальной струнной группы, нам придется ввести *параметризованные* генераторы струнной группы. Пусть струна C параметризуется параметром $X_\mu(\sigma)$:

$$C \rightarrow X_\mu(\sigma). \quad (8.3.1)$$

Это приводит к тому, что L_C принимает вид

$$L_C \rightarrow L_X = L_{X(\sigma_1), X(\sigma_2), X(\sigma_3), \dots, X(\sigma_N)}, \quad (8.3.2)$$

где струна C параметризуется теперь точками, обозначенными $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$, и N можно выбирать сколь угодно большим.

Введя конкретную параметризацию, мы получаем бесконечное число параметризованных струн X , которые соответствуют одной и той же физической струне C . Это означает, что с каждой физической струной

С связывается ее класс эквивалентности параметризованных струн. В каждом классе эквивалентности лежит бесконечное число параметризованных струн, описывающих одну и ту же физическую струну S . Таким образом, имеет место следующее разложение:

$$\frac{USG}{\text{Diff}(S)} = SG, \quad (8.3.3)$$

т. е. универсальная струнная группа представляет собой полупрямое произведение струнной группы и диффеоморфизмов струны. Вообще говоря, параметризованные струны X и Y принадлежат одному классу эквивалентности, если они описывают одну и ту же пространственно-временную струну, т. е.

$$X \sim Y, \text{ если } X^\mu(\sigma) = Y^\mu(\sigma) + \varepsilon^\sigma Y'^{\mu(\sigma)}, \quad (8.3.4)$$

и отличаются на бесконечно малую величину.

Теперь, необходимо переопределить структурные константы группы SG для параметризованных струн:

$$[L_X, L_Y] = f_{XY}^Z L_Z. \quad (8.3.5)$$

В качестве первого предположения можно было бы принять

$$f_{XYZ} = \begin{cases} +1, & \text{если } C_{X,Y,Z} \text{ образуют триплет,} \\ -1, & \text{если они образуют антриплет,} \\ 0 & \text{во всех других случаях} \end{cases} \quad (8.3.6)$$

и

$$\begin{cases} f_{XY}^Z = f_{X\bar{Y}\bar{Z}}, \\ f_{YX}^Z = -f_{Y\bar{X}\bar{Z}}. \end{cases} \quad (8.3.7)$$

Эти определения удовлетворяют тождеству Якоби. Однако в результате суммирования по всем струнным состояниям, принадлежащим одному классу эквивалентности, здесь появляется бесконечная константа. Иными словами, необходимо определить меру интегрирования по этим состояниям.

Для определения меры введем векторное поле $\zeta^\sigma(X)$, позволяющее вычислять разность двух элементов внутри одного и того же класса эквивалентности. Если одна струна параметризуется посредством $\{\sigma\}$, а другая внутри того же класса посредством $\{\bar{\sigma}\}$, то

$$\bar{\sigma} = \sigma + \zeta^\sigma(X); \quad \sigma < \pi; \quad \bar{\sigma} < \pi\alpha. \quad (8.3.8)$$

Введем геометрическую вершину:

$$f^{XYZ} = \prod_{r=1}^3 \prod_{0 \leq \sigma \leq 1/2\pi} \delta[X_r(\bar{\sigma}_r) - X_{r-1}(\pi\alpha_{r-1} - \bar{\sigma}_r)], \quad (8.3.9)$$

где $\bar{\sigma}$ определяется согласно (8.3.8). Антисимметричные структурные

константы представлены в (8.3.7). Заметим, что в определении структурных констант имеется значительная свобода, поскольку мы всегда можем сделать калибровочное преобразование на струнах, которое изменит также поле $\zeta^\sigma(X)$. (Эта свобода выражается в том, что мера интегрирования дается струнной плотностью $\int \det |e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}| DX$, которую мы обсудим более детально в разд. 8.6. Струнная плотность обладает явной репараметризационной инвариантностью.)

Выпишем алгебру универсальной струнной группы [1–5]:

$$\text{USG: } \begin{cases} [L_\sigma, L_\rho] = f_{\sigma\rho}^\omega L_\omega, \\ [\varepsilon^\sigma L_\sigma, L_X] = \varepsilon^\sigma \partial_{\sigma^-} L_X, \\ [L_X, L_Y] = f_{XY}^Z L_Z. \end{cases} \quad (8.3.10)$$

Здесь структурные константы группы Вирасоро имеют вид

$$f_{\sigma\rho}^\omega = \delta(\rho - \sigma) \delta'(\omega - \rho) + 2\delta(\omega - \sigma) \delta'(\rho - \sigma), \quad (8.3.11)$$

а оператор, генерирующий репараметризацию, есть

$$\partial_{\sigma^-} = X'_{\mu\sigma} \frac{\delta}{\delta X^{\mu\sigma}},$$

причем ∂_{σ^-} можно разложить в ряд Фурье по $L_n - L_{-n}$.

Первая строка в (8.3.10) соответствует алгебре $\text{Diff}(S)_-$, в то время как последняя — струнной группе. Средняя строка показывает, что универсальная струнная группа есть полупрямое произведение репараметризационной и струнной групп.

Поле φ^C заменяется теперь на φ^X , где

$$\varphi^X = \varphi[X] = \varphi[X(\sigma_1), X(\sigma_2), \dots, X(\sigma_N)]. \quad (8.3.12)$$

Полевой функционал должен преобразовываться как

$$\delta\varphi^X = f_{ZY}^X \Lambda^Y \varphi^Z.$$

Это объясняет происхождение полевого функционала $\Phi(X)$ из уравнения (6.3.3), которое было выписано нами в главе, посвященной теории в калибровке светового конуса. В действительности мультилокальный функционал $\varphi[X]$ — не скаляр, а вектор, преобразующийся по присоединенному представлению универсальной струнной группы USG.

§ 8.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ USG

Уяснив структуру калибровочной группы, мы можем сделать следующий шаг, придерживаясь основной стратегии (8.1.1), и выписать поля связности, что, конечно, подразумевает знание неприводимых представлений группы и ее постоянных тензоров (коэффициентов Клебша–Гордона).

Известны три неприводимых представления USG . Первое из них — неприводимое представление струнной группы $|e^c\rangle$, уже обсужденное нами. Второе называется модулем Верма V . Оно впервые встретилось нам в (4.1.42) и в дальнейшем будет отмечаться греческими индексами α и β . Третье представление, которое содержит присоединенное представление A группы $\text{Diff}(S)$, мы назовем струнным представлением S и будем отмечать непрерывными индексами σ, ρ, θ , изменяющимися от нуля до параметризационной длины l , а его фурье-компоненты — латинскими буквами m и n (см. [6–9]).

Ключевой шаг был сделан в (7.1.27), где мы отождествили вспомогательные поля с совокупностью компонент модуля Верма.

V-представление

Пространство представления для модуля Верма V строится из генераторов L_n группы $\text{Diff}(S)$ путем образования универсальной обертывающей алгебры. Определим *контравариантный вектор* $|e^\alpha\rangle$ формулой

$$|e^\alpha\rangle \equiv L_{-\alpha_1}^{\lambda_1} L_{-\alpha_2}^{\lambda_2} \dots L_{-\alpha_n}^{\lambda_n} |0\rangle \equiv L_{-\{\alpha\}} |0\rangle, \quad (8.4.1)$$

где $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ и

$$\begin{aligned} L_n |0\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ L_0 |0\rangle &= h |0\rangle. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Индекс α обозначает бесконечный ряд элементов с числом состояний $p(n)$ на каждом уровне n , где $p(n)$ — число делителей целого n , а каждое представление отмечается $[h, c]$. Произвольный элемент Ω полной группы $\text{Diff}(S)$ (а не только подгруппы $\text{Diff}(S)_-$) запишем как

$$\Omega = \exp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-n} L_n = e^{\int d\sigma \varepsilon(\sigma) L(\sigma)} = e^{\varepsilon^\sigma L_\sigma}. \quad (8.4.3)$$

По непрерывному струнному параметру σ подразумевается интегрирование, если он встречается дважды. Поэтому $\varepsilon^\sigma L_\sigma = \int d\sigma \varepsilon(\sigma) L(\sigma)$.

Определим действие групповых генераторов L_n на элементе модуля V так:

$$L_n |e^\alpha\rangle \equiv f_{n\beta}^\alpha |e^\beta\rangle. \quad (8.4.4)$$

Отметим, что L_n , действуя на элемент модуля Верма в (8.4.1), всегда создает другой элемент того же модуля. На самом деле константы $f_{n\beta}^\alpha$ являются коэффициентами Клебша–Гордона для тензорного произведения модуля Верма V с присоединенным представлением A (которое включает генераторы L_n), т. е.

$$f_{n\beta}^\alpha: V \otimes A \rightarrow V. \quad (8.4.5)$$

В свою очередь это позволяет определить *ковариантное поле* φ_α , такое

что

$$|\varphi\rangle = \varphi_\alpha |e^\alpha\rangle \quad (8.4.6)$$

является инвариантом:

$$\begin{aligned} \delta|e^\alpha\rangle &= \varepsilon^{-n} f_{n\beta}^\alpha |e^\beta\rangle, \\ \delta\varphi_\alpha &= -\varepsilon^{-n} f_{n\alpha}^\beta \varphi_\beta. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Последние выражения можно компактно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta|\varphi\rangle &= 0, \\ \Omega|\varphi\rangle &= |\varphi'\rangle. \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Для этого представления V также можно определить оператор, поднимающий и опускающий индексы. Пусть

$$\langle e^\alpha| = \langle 0|L_{\{\alpha\}} \quad (8.4.9)$$

обозначает присоединенный кет-вектор. Тогда имеем контравариантную форму

$$S^{\alpha\beta} = \langle e^\alpha|e^\beta\rangle. \quad (8.4.10)$$

Детерминант матрицы $S^{\alpha\beta}$ называется *детерминантом Каца* (см. (7.1.2)), и в случае, когда он отличен от нуля, представление оказывается неприводимым, а матрица обратимой. Таким образом, операция

$$\begin{aligned} \varphi^\alpha &= S^{\alpha\beta} \varphi_\beta, \\ |e_\alpha\rangle &= (S^{-1})_{\alpha\beta} |e^\beta\rangle \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

превращает ковариантный вектор в контравариантный и наоборот. Поэтому легко показать, что $S^{\alpha\beta}$ и ее обратная матрица являются операторами, поднимающими и опускающими индексы представления V .

S-представление

В дополнение к V -представлению существует также второе представление группы $\text{Diff}(S)$, называемое нами струнным представлением S и являющееся конформным представлением, введенным в (4.1.28) (за исключением того, что его элементы есть функции только σ , а не σ и τ). Каждое неприводимое представление определяется весом n , а каждый элемент φ^σ внутри представления веса n отмечается непрерывным струнным параметром σ или своими фурье-компонентами φ^n (см. (4.1.14)):

$$\delta\varphi_\sigma^{[n]} = \varepsilon^\sigma \varphi_\sigma'^{[n]} + n\varepsilon'^\sigma \varphi_\sigma^{[n]}; \quad 0 \leq \sigma \leq l. \quad (8.4.12)$$

В более компактной форме

$$\delta\varphi_{\sigma}^{[n]} = \varepsilon^{\rho} f_{\sigma,\rho}^{[n]} \varphi_{\theta}^{[n]}, \quad (8.4.13)$$

где

$$f_{\sigma\rho}^{[n]\theta} = \delta(\rho - \sigma)(\delta'(\theta - \rho) + n\delta(\theta - \sigma)\delta'(\rho - \sigma)).$$

(Важно помнить, что присоединенное представление A , содержащее L_n , является членом струнного представления S веса 2.)

Эти константы есть не что иное, как коэффициенты Клебша–Гордона для следующего тензорного произведения:

$$f_{\sigma\rho}^{\theta} : S \otimes A \rightarrow S. \quad (8.4.14)$$

Мы можем перемножить два поля различных весов и получить при этом новое поле, преобразующееся по неприводимому представлению, вес которого равен сумме двух индивидуальных весов перемножаемых полей:

$$\varphi^{[n]} \psi^{[m]} = \omega^{[n+m]}. \quad (8.4.15)$$

Более того, после интегрирования по σ представление с весом 1 оказывается инвариантом относительно действия группы $\text{Diff}(S)$. Это тождество будет положено в основу при построении инвариантных действий:

$$\delta \int d\sigma \varphi_{\sigma}^{[1]} = 0. \quad (8.4.16)$$

(Отметим, что $\varphi^{\sigma} \varphi_{\sigma} = \int d\sigma \varphi^{\sigma} \varphi_{\sigma}$ инвариантно, причем φ_{σ} преобразуется ковариантно с весом n , а φ^{σ} преобразуется контравариантно с весом $1 - n$.)

Важный момент также состоит в том, что дельта-функция

$$\delta_{\sigma\rho} \quad (8.4.17)$$

не является постоянным тензором группы $\text{Diff}(S)$. Следовательно, мы не можем поднимать и опускать индексы этого представления (δ_{σ}^{ρ} — постоянный тензор, но его нельзя использовать для поднятия и опускания индексов). Этот маленький, но важный факт наложит чрезвычайно жесткие ограничения при построении окончательного действия (и фактически заставит нас отказаться от действия вида F^2 , а вместо этого использовать действие Черны–Саймонса FF^*).

Выполним произвольную репараметризацию струны, обозначаемую ε^{σ} . Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции, скалярное поле преобразуется как

$$\delta\varphi(X) = \varepsilon^{\sigma} \partial_{\sigma^-} \varphi(X), \quad (8.4.18)$$

$$\partial_{\sigma^-} = X'_{\mu\sigma} \frac{\delta}{\delta X^{\mu\sigma}}.$$

Таким образом, для построения действия можно использовать свойство

инвариантности интеграла скалярного поля:

$$\delta \int DX L(X) = \int DX \varepsilon^\sigma \partial_\sigma L(X) = 0. \quad (8.4.19)$$

Обобщим это выражение и найдем, как элементы V или S преобразуются при произвольной репараметризации струны:

$$\begin{aligned} V: U\varphi_\alpha U^{-1} &= \varphi_\alpha(X + \delta X) + \Lambda_\alpha^\beta \varphi_\beta, \\ S: U\varphi_\sigma U^{-1} &= \varphi_\sigma(X + \delta X) + \Lambda_\sigma^\rho \varphi_\rho. \end{aligned} \quad (8.4.20)$$

Здесь матрица Λ следующим образом параметризует указанное преобразование:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^\beta + \Lambda_\alpha^\beta &= \langle \mathbf{e}_\alpha | \Omega | \mathbf{e}^\beta \rangle, \\ \Lambda_\sigma^\rho &= \varepsilon^\theta f_{\theta\sigma}^\rho. \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

Теперь, когда мы умеем обращаться с модулями Верма, обратим внимание на то, что упомянутая ранее калибровочная группа на самом деле может быть обобщена. Свяжем с каждой струной S генераторы $L_{\alpha,X}$, где α – модуль Верма. Тогда алгебра (8.3.10) незначительно изменяется:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^\sigma L_\sigma, L_{\alpha,X}] &= \varepsilon^\sigma \partial_\sigma L_{\alpha,X} + \varepsilon^\sigma f_{\sigma\alpha}^\beta L_{\beta,X}, \\ [L_{\alpha,X}, L_{\beta,Y}] &= f_{\alpha\beta}^\gamma f_{XY}^Z L_{\gamma,Z}, \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

т.е. мы расширяем нашу первоначальную калибровочную группу, включая преобразования на модулях Верма. В этом выражении были введены новые коэффициенты Клебша–Гордона для тензорного произведения модулей Верма:

$$f_{\alpha\beta}^\gamma: V \otimes V \rightarrow V. \quad (8.4.23)$$

Замечательно, что эти коэффициенты Клебша–Гордона можно определить единственным образом на основании только теории групп. Пусть $|V\rangle$ – новая вершина, такая что

$$\langle \mathbf{e}^\alpha | \langle \mathbf{e}^\beta | \langle \mathbf{e}^\gamma | V \rangle = f^{\alpha\beta\gamma} \quad (8.4.24)$$

и $|V\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\prod_{r=1}^3 \prod_{\sigma_r} [L'_{\sigma_r} - L'_{\pi\alpha, -\sigma_r-1}] |V\rangle = 0. \quad (8.4.25)$$

К счастью, действуя генераторами алгебры Вирасоро на эту вершинную функцию, можно показать, что одного этого условия достаточно для определения всех величин $f^{\alpha\beta\gamma}$. Это значит, что (7.4.12) может быть получена как калибровочно-фиксированный вариант $f^{\alpha\beta\gamma}$ при использовании вершины, определяемой уравнением (8.4.25). Поэтому нам не нужно постулировать форму духовой вершинной функции. Она по-

является автоматически как коэффициент Клебша–Гордона для $V \otimes V \rightarrow V$.

Преимущество этого нового коэффициента Клебша–Гордона заключается в том, что он позволяет перемножать поля, имеющие индекс модуля Верма. Например, выражение

$$A \times B = C \quad (8.4.26)$$

в полной записи означает, что

$$(A \times B)^{\gamma, Z} = A^{\alpha, X} B^{\beta, Y} f_{\alpha\beta}^{\gamma} f_{XY}^Z = C^{\gamma, Z}.$$

Поскольку основные поля будут преобразовываться как модули Верма такой закон умножения окажется наиболее удобным. Другими словами мы определим символ произведения \times формулой

$$\times \equiv f_{\alpha\beta}^{\gamma} f_{XY}^Z. \quad (8.4.27)$$

(Зафиксировав калибровку таким выбором параметризации, как «калибровка, склеивающая в средней точке», мы находим, что наше правило умножения сводится к правилу умножения для операции $*$, введенной в (7.5.1).)

Наконец, мы хотим указать постоянные тензоры для USG. Для обычной группы Лоренца в случае теории точечной частицы, как известно, существует три постоянных тензора: δ_{μ}^{ν} , антисимметричный тензор $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ и матрица Дирака $(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$:

$$\text{Постоянные тензоры} = \delta_{\mu}^{\nu}; \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}; (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}.$$

На самом деле матрица Дирака представляет собой коэффициент Клебша–Гордона, найденный для тензорного произведения спинора и вектора:

$$(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} = \langle e_{\alpha} | \gamma^{\mu} | e_{\beta} \rangle. \quad (8.4.28)$$

Здесь $\langle e_{\alpha} |$ – базисные состояния для четырех спиноров. Как ни странно USG имеет набор постоянных тензоров, весьма отличных от случая лоренцевской группы, что повлияет на форму конструируемых нами инвариантных действий. Во-первых, дельта-функции $\delta^{\sigma\rho}$ и σ^{mn} не являются постоянными тензорами. (В этом можно убедиться, заметив что ни $\Sigma_n L_n L_n$, ни $\Sigma_n L_n L_{-n}$ не инвариантны относительно $\text{Diff}(S)$). Кроме того, хотя и δ_n^m и δ_0^p являются постоянными тензорами, но их нельзя использовать для поднятия или опускания индексов.) Такая ситуация сильно усложняет поиск действия. К примеру, мы получаем, что *отсутствует аналог оператора \square в теории Клейна–Гордона или F^2 – квадратичного тензора кривизны в теории Янга–Миллса.*

Однако именно группа $\text{Diff}(S)$ имеет диракоподобный постоянный тензор $(\gamma^{\sigma})_{\alpha\beta}$, у которого греческие буквы обозначают индексы модулей Верма. Как и матрица Дирака, этот постоянный тензор находится из разложения Клебша–Гордона тензорного произведения модуля Верма

и струнного представления S :

$$(\gamma^\sigma)_{\alpha\beta} = \langle e_\alpha | \gamma^\sigma | e_\beta \rangle. \quad (8.4.29)$$

Простое, но важное наблюдение теории групп позволяет заключить, что действие полевой теории струн будет более походить на уравнение Дирака, чем на уравнение Клейна-Гордона. Таким образом, ∂_σ^2 не инвариант, а $\gamma^\sigma \partial_\sigma$ является таковым. Добавим к этому, что произведение нескольких таких матриц также есть постоянный тензор: $\epsilon^{\sigma\rho\dots} = \gamma^\sigma \gamma^\rho \dots$. Итак, действие полевой теории струн будет отлично от действия типа Клейна-Гордона, поскольку постоянные тензоры для $\text{Diff}(S)$ таковы:

$$\text{Постоянные тензоры: } \delta_\sigma^\rho; (\gamma^\sigma)_{\alpha\beta}; (\epsilon^{\sigma\rho\dots})_{\alpha\beta}.$$

§ 8.5. ДУХОВЫЙ СЕКТОР И КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

До сих пор многие из манипуляций с представлениями USG без практического применения к известным струнным полевым теориям могли казаться несколько формальными. Однако единственная цель этого экскурса в теорию групп состоит в том, чтобы объяснить некоторые из довольно загадочных аспектов теории BRST. Поэтому мы сейчас покажем, что теория USG способна ответить на следующие вопросы:

- (а) Почему базисное поле BRST равно транкированному полю $\Phi(X, b, c)$ с духовым числом $-1/2$?
- (б) Каково происхождение «духового сектора» теории?
- (в) В чем состоит значение тождества $Q^2 = 0$?
- (г) Каким образом можно получить свободное действие $\langle \Phi | Q | \Phi \rangle$?

Теория групп дает ответы на все эти вопросы.

Начнем с основного поля BRST:

$$\Phi_{\text{BRST}}(X, b, c) = \mathbf{P}_{-1/2} \sum_{\{p\}\{q\}} \Phi_{\{p\}\{q\}}(X) \{b_{-p}\} \{c_{-q}\} | - \rangle. \quad (8.5.1)$$

Здесь мы суммируем по всем возможным духовым возбуждениям при наличии ограничения, вносимого оператором $\mathbf{P}_{-1/2}$, который транкирует поле к сектору с духовым числом $-1/2$.

Хотя это поле постулировалось в подходе в BRST, в геометрической теории оно имеет довольно простое происхождение. Можно показать, что это поле в точности является модулем Верма [1], т. е. что

$$|e^\alpha\rangle \leftrightarrow \mathbf{P}_{-1/2} \{b_{-p}\} \{c_{-q}\} | - \rangle. \quad (8.5.2)$$

Доказательство основывается на вычислении «характера» каждого пространства. Характер пространства V — это такая функция переменной x , у которой n -й коэффициент разложения в ряд Тейлора представляет собой число состояний, существующих на n -м уровне V_n :

$$\text{ch } V = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \dim V_n. \quad (8.5.3)$$

Если пространство является неприводимым модулем Верма, то можно показать, что размерность n -го уровня V_n равна числу делителей числа n . (Это можно увидеть, подсчитывая число состояний на n -м уровне.) Таким образом, характер неприводимого модуля Верма равен

$$\text{ch } V = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1} (1 - x^n)^{-1}. \quad (8.5.4)$$

(Отметим, что этот результат просто воспроизводит корреляционную функцию однопетлевой амплитуды.)

Можно показать, что характер неприводимого модуля Верма и характер транкированного по духовому числу $-1/2$ духового спектра совпадают на всех уровнях:

$$\text{ch}(|e^a\rangle) = \text{ch}(\mathbf{P}_{-1/2} \Pi \{b_{-p}\} \{c_{-q}\} |0\rangle).$$

После того как мы убедились, что модуль Верма и пространство BRST имеют одинаковое число состояний, последний шаг тривиален: нужно показать, что два модуля Верма имеют одни и те же величины $[h, c]$.

Итак, BRST-поле $\Phi(X, b, c)$ является *приводимым* представлением группы USG. Смысл транкирования по духовому числу $-1/2$ поля BRST в том, что оно дает *неприводимое представление*. Следовательно, мы имеем простую интерпретацию операции транкирования, которая всегда должна выполняться в подходе BRST. Она соответствует переходу от приводимого к неприводимому представлению группы USG.

В последнем разделе, посвященном формализму BRST, мы видели, что прием транкирования для замкнутых струн и суперструн с несколькими взаимоисключающими выборами вызвал большое замешательство. В геометрическом подходе существует только одно транкирование — неприводимое.

Далее мы покажем, что весь духовой сектор соответствует *касательному пространству* USG. Рассмотрим, например, обычное четырехкомпонентное поле Дирака ψ^a . При глобальном преобразовании Лоренца лоренцевский генератор имеет две части, радиальную (зависящую от X) и орбитальную (спинорную):

$$M_{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}, \quad (8.5.5)$$

где $\sigma^{\mu\nu}$ — спинорное представление лоренцевских генераторов.

Аналогично, глобальные репараметризации струны естественным образом разбиваются на радиальную (зависящую от X) и орбитальную (модуль Верма) части:

$$M_\sigma = L_\sigma^X + L_\sigma^V, \quad (8.5.6)$$

где второй оператор действует только на модули Верма. Коммутирование полного генератора с самим собой дает

$$[M_\sigma, M_\rho] = f_{\sigma\rho}^\omega M_\omega + (D - 26)\dots \quad (8.5.7)$$

(Полный генератор репараметризации, который является суммой

радиальных и орбитальных мод, имеет правильные коммутационные соотношения только при $D = 26$. Отсюда в геометрической теории возникает 26-мерное пространство.)

Однако при рассмотрении локальных преобразований ситуация становится более сложной как для частицы Дирака, так и для струны. В частности, необходимо касательное пространство, потому что никаких конечномерных спинорных представлений группы $GL(4)$ не существует. Вот почему мы вынуждены вводить касательное пространство для спиноров в общей теории относительности. У нас просто нет выбора. Иными словами, спинорные и радиальные компоненты моды дираковского спинора преобразуются под действием двух совершенно различных локальных групп:

$$\begin{aligned} O(3, 1): \delta\psi^\alpha &= \varepsilon_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi^\beta(x), \\ GL(4): \delta\psi^\alpha(x) &= \varepsilon^\mu \partial_\mu \psi^\alpha(x). \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu}$ параметризует локальные преобразования Лоренца, а ε^μ — общие координатные преобразования.

Сходная ситуация сохраняется и в теории струн. Ранее мы видели, что L_n генерируют группу $\text{Diff}(S)$, в то время как четные генераторы $L_n - L_{-n}$ генерируют только подгруппу $\text{Diff}(S)_-$:

$$\begin{aligned} L_n &: \text{Diff}(S), \\ L_n - L_{-n} &: \text{Diff}(S)_-. \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

Суть дела в том, что $X_\mu(\sigma)$ не может содержать все диффеоморфизмы струны, т. е. представление $\text{Diff}(S)$ на одном струнном поле не существует. При σ -репараметризации поле $\varphi(X)$ преобразуется только под действием подгруппы, генерируемой $L_n - L_{-n}$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(X) &= \int d\sigma \varepsilon(\sigma) X'_\mu(\sigma) \frac{\delta}{\delta X_\mu(\sigma)} \varphi(X) \\ &= \varepsilon^\sigma \partial_\sigma \varphi(X). \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Отсюда мы видим, что радиальные и орбитальные части поля $\varphi^\alpha(X)$ должны преобразовываться под действием двух различных групп. Модуль Верма может преобразовываться под действием полной группы $\text{Diff}(S)$, тогда как радиальная часть — нет. Итак, при локальных преобразованиях радиальная и орбитальная части преобразуются под действием двух различных групп:

$$\begin{aligned} \text{Diff}(S): \delta\varphi^\alpha(X) &= \varepsilon^\sigma f^\alpha_{\sigma\beta} \varphi^\beta(X), \\ \text{Diff}(S)_-: \delta\varphi^\alpha(X) &= \varepsilon^\sigma \partial_\sigma \varphi^\alpha(X). \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

Отметим, что у каждой струнной координаты X существует отдельное преобразование $\text{Diff}(S)$, действующее на модуль Верма. В результате $\text{Diff}(S)$ является группой симметрии касательного пространства, но не группой преобразования переменных, зависящих от X .

Назовем представление $\text{Diff}(S)$ конформным (следовательно, модуль Верма конформный). Тогда наш основной результат таков: *необходимо введение касательного пространства, поскольку конформного представления $\text{Diff}(S)_-$ не существует.* Этот результат объясняет происхождение духового сектора. Итак:

Духовой сектор \rightarrow Касательное пространство.

Аналогичным образом, исходя из соображений теории групп, можно также объяснить, почему $Q^2 = 0$. В обычной теории точечной частицы $d^2 = 0$, где $d = dx^\mu \partial_\mu$ следует из того факта, что плоское пространство-время инвариантно при параллельных перемещениях, т. е.

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \rightarrow d^2 = 0. \quad (8.5.12)$$

Для того чтобы доказать подобное утверждение для теории струн, найдем аналог оператора дифференцирования. Сначала вспомним, что наш первый принцип требует глобальной инвариантности теории относительно полной группы $\text{Diff}(S)$, а не только относительно ее подгруппы $\text{Diff}(S)_-$. Однако мы замечаем, что производная

$$\partial_{\mu\sigma} = \frac{\delta}{\delta X^{\mu\sigma}} \quad (8.5.13)$$

не подходит, поскольку она преобразуется только под действием $\text{Diff}(S)_-$, а не полной группы $\text{Diff}(S)$. Таким образом, $\partial_{\mu\sigma}$ не удовлетворяет первому принципу. Оператор дифференцирования с правильными свойствами имеет вид

$$\nabla_{\mu\sigma} = -i\partial_{\mu\sigma} + X'_{\mu\sigma}. \quad (8.5.14)$$

При преобразованиях, генерируемых $L_n + L_{-n}$, $\partial_{\mu\sigma}$ превращается в $X'_{\mu\sigma}$ и наоборот. Определим теперь ковариантную относительно глобальных преобразований производную

$$\partial_\sigma = \nabla_{\mu\sigma} \nabla_{\mu\sigma}. \quad (8.5.15)$$

(Здесь фурье-компоненты ∂_σ включают *полный* набор генераторов L_n .)

Остановимся на наиболее общей производной веса 2, которая представляет собой сумму радиальной и орбитальной частей:

$$\nabla_\sigma = \partial_\sigma + aL_\sigma, \quad (8.5.16)$$

где a произвольно. Вычислим коммутатор $[\nabla_\sigma, \nabla_\rho]$. Для этого нужно определить действие ∇_σ на смешанный тензор:

$$\nabla_\sigma A_\rho^\alpha = \partial_\sigma A_\rho^\alpha + b f_{\sigma\rho}^\theta A_\theta^\alpha + c f_{\sigma\alpha}^\beta A_{\rho\beta}. \quad (8.5.17)$$

Требую обращения в нуль коммутатора

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\rho] = 0, \quad (8.5.18)$$

находим, что следует выбрать либо $a = -c = -2b = 1$, либо $a = -b = c = 1/2$. Если мы хотим устранить аномальные члены, то первый

выбор исключается, а второй сохраняется с точностью до слагаемых, обращающихся в нуль при свертке с γ^σ . Примем первую из этих возможностей. Тогда легко показать, что

$$\gamma^\sigma \nabla_\sigma = Q \quad (8.5.19)$$

и $\gamma^\sigma \nabla_\sigma$ — нильпотентная комбинация.

Таким образом, нильпотентность оператора Q означает вращение в нуль коммутатора двух ковариантных производных $[\nabla_\sigma, \nabla_\rho]$, т. е. имеет то же самое происхождение, что и нильпотентность комбинации $d = dx^\mu \partial_\mu$, которая является следствием обращения в нуль коммутатора ковариантных производных $[\partial_\mu, \partial_\nu]$.

Наконец, объясним, откуда берется $\langle \Phi | Q | \Phi \rangle$. Так как $\delta^{\sigma\rho}$ не есть постоянный тензор, то действия типа Клейна–Гордона, содержащие \square , не существуют. (Возможны только действия типа Дирака, включающие $\gamma^\sigma \nabla_\sigma$) В частности, неприемлемы следующие действия:

$$\Phi [L_0 - 1] \Phi; \quad \partial_{\mu\sigma} \Phi \partial_{\mu\sigma} \Phi; \quad \partial_\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi. \quad (8.5.20)$$

Их веса суть 2, 2 и 4 соответственно, тогда как инвариант должен иметь вес 1. Фактически легко видеть, что *построить действие из одних скалярных струнных полей невозможно*. В течение ряда лет предпринималось множество попыток, но только сейчас теория групп показала их тщетность.

Иногда задается вопрос: действительно ли необходим в ковариантной струнной полевой теории духовый сектор? Ответ, который мы теперь получаем из теории групп, — да. Касательное пространство абсолютно необходимо, потому что $\delta^{\sigma\rho}$ не является постоянным тензором, а действия типа Клейна–Гордона неинвариантны.

Хотя скалярные поля должны быть исключены из рассмотрения, но инвариантное действие с высшими тензорными полями φ^a и A_σ^a написать можно:

$$\langle \varphi | \gamma^\sigma \nabla_\sigma | \varphi \rangle, \quad \langle A_\sigma | \varepsilon^{\sigma\rho\omega} \nabla_\rho | A_\omega \rangle. \quad ; \quad (8.5.21)$$

Эти действия, в свою очередь, инвариантны при преобразованиях

$$\begin{aligned} \delta | \varphi \rangle &= \gamma^\sigma \nabla_\sigma | \Lambda \rangle, \\ \delta | A_\sigma \rangle &= \nabla_\sigma | \Lambda \rangle. \end{aligned} \quad (8.5.22)$$

Можно также показать, что первое действие, включающее φ^a , является на самом деле вариантом второго действия с фиксированной калибровкой, причем A_σ^a инвариантно при преобразованиях

$$\delta | A_\sigma \rangle = | \Sigma_\sigma \rangle; \quad \gamma^\sigma | \Sigma_\sigma \rangle = 0. \quad (8.5.23)$$

Это означает возможность устранения всей зависимости от σ в A_σ^a , т. е. замены $| A_\sigma \rangle$ на $| \varphi \rangle$, так что первое действие получается при фиксации калибровки второго.

§ 8.6. СВЯЗНОСТИ И КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Определив представления USG и следуя основной стратегии (8.1.1), мы теперь должны построить поля и ковариантные производные. Снова мы начинаем рассмотрение по точной аналогии с калибровочной теорией точечной частицы.

В теории Янга–Миллса и общей теории относительности для локализации калибровочной группы $SU(N)$ и группы Лоренца нам необходимы поля связности A_μ^i и ω_μ^{ab} . В теории струн для того, чтобы сделать локальной как струнную группу, так и $\text{Diff}(S)$, требуются калибровочные поля A_σ^a и $\omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta$. Соответствие между связностями точечной частицы и связностями струны имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} SU(N): A_\mu^i \\ O(3,1): \omega_\mu^{ab} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} SG: A_\sigma^a \\ \text{Diff}(S)_-: \omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta \end{array} \right\}.$$

Наконец, нам также понадобится струнная тетрада, аналог e_μ^a , найденной в общей теории относительности, которая позволит умножать и интегрировать поля, сохраняя локальную инвариантность относительно $\text{Diff}(S)$. Так как основная струнная переменная имеет два сорта индексов, $X_\mu(\sigma) = X^{\mu\sigma}$, струнная тетрада должна обязательно содержать четыре индекса:

$$e_\mu^a \rightarrow e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}. \quad (8.6.1)$$

В итоге минимальный набор, необходимый для локализации теории Янга–Миллса и общей теории относительности, состоит из трех полей: A_μ^a , ω_μ^{ab} , e_μ^a ; минимальный набор полей, необходимых для локализации полевой теории струн, также содержит три поля: A_σ^a , $\omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta$, $e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}$.

Теперь, определив основные поля, согласно стратегии (8.1.1), построим из $\nabla_{\mu\sigma}$ и ∇_σ ковариантные производные. Прежде всего заметим, что ни та ни другая производная не ковариантны относительно струнной группы. Например, действие оператора производной ∇_σ на произведение двух модулей Верма определяется формулой

$$\nabla_\sigma [A \times B] = \nabla_\sigma A \times B + A \times \nabla_\sigma B + \Sigma_\sigma, \quad (8.6.2)$$

где правило умножения дается (8.4.27) и

$$\gamma^\sigma \Sigma_\sigma = 0. \quad (8.6.3)$$

Следовательно, оператор ∇_σ действует дистрибутивно как дифференцирование по модулю членов, обращающихся в нуль при свертке с γ^σ . (В общем случае Σ^σ будет содержать члены типа $\gamma_\sigma Q - k\nabla_\sigma$, где k – собственное значение $\gamma^\sigma \gamma_\sigma$.)

Перейдем к анализу трансформационных свойств производных относительно струнной группы. В общем случае под действием струнной группы поле φ^a преобразуется как

$$U\varphi^a U^{-1} = \varphi^a + [\varphi \times \Lambda - \Lambda \times \varphi]^a. \quad (8.6.4)$$

Важно осознать, что производная поля φ^a преобразуется под действием струнной группы неправильно, что делает необходимым введение поля связности. Действительно, находим

$$U \nabla_\sigma \varphi U^{-1} = \nabla_\sigma [U \varphi U^{-1}] + \varphi \times \nabla_\sigma \Lambda - \nabla_\sigma \Lambda \times \varphi + \Sigma_\sigma, \quad (8.6.5)$$

что не соответствует (8.6.4). (Индексы V опущены.)

Введем поле связности A_σ^a , аналог поля Янга–Миллса, которое поглотит нежелательные локальные факторы. Для него определим

$$\delta A_\sigma^a = [\nabla_\sigma \Lambda + A_\sigma \times \Lambda - \Lambda \times A_\sigma]^a, \quad (8.6.6)$$

где мы для ясности опустили все индексы V . Это позволяет написать производную

$$D_\sigma = \nabla_\sigma + A_\sigma, \quad (8.6.7)$$

которая преобразуется правильным образом:

$$U D_\sigma \varphi U^{-1} = D_\sigma \varphi + D_\sigma \varphi \times \Lambda - \Lambda \times D_\sigma \varphi + \Sigma_\sigma. \quad (8.6.8)$$

Мы получили то уравнение, которое хотели. Оно показывает, что с добавлением поля связности можно построить производные, ковариантные относительно действия полной группы USG.

Следует подчеркнуть, что предыдущие уравнения были записаны в компактных обозначениях. Например, в теории Янга–Миллса ковариантные производные в развернутой форме имеют вид

$$\nabla_\mu = \partial_\mu \delta_{ab} + A_\mu^i (\tau^i)_{ab}. \quad (8.6.9)$$

В геометрической теории мы также должны подставить групповую матрицу, определенную в (8.4.27). Таким образом, ковариантная производная, выписанная со всеми ее индексами, равна

$$\nabla_\sigma + A_\sigma = \nabla_{\sigma X} \delta_{a,X}^{\beta,Y} + A_\sigma^{Y,Z} (\tau_{\gamma,Z})_{a,X}^{\beta,Y}, \quad (8.6.10)$$

где

$$(\tau_{\gamma,Z})_{a,X}^{\beta,Y} = f_{a\gamma}^\beta f_{XY}^Z.$$

До сих пор мы занимались построением ковариантной производной ∇_μ струнной группы. Теперь мы должны сконструировать ковариантную производную $\nabla_{\mu\sigma}$, связанную с локальными репараметризациями группы $\text{Diff}(S)$ или с универсальной ковариантностью. Чтобы ввести локальную $\text{Diff}(S)$ -инвариантность, последуем примеру общей теории относительности и введем струнные тетрады и струнные поля связности. Определим, как $\hat{\partial}_{\mu\sigma}$ и $\partial X^{\mu\sigma}$ преобразуются под действием группы

$$\frac{\partial}{\partial X^{\mu\sigma}} = \frac{\partial \bar{X}^{\nu\rho}}{\partial X^{\mu\sigma}} \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\nu\rho}}, \quad (8.6.11)$$

$$dX^{\mu\sigma} = \frac{\partial X^{\mu\sigma}}{\partial \bar{X}^{\nu\rho}} d\bar{X}^{\nu\rho}.$$

Полагая

$$\bar{X}^{\mu\rho} = X^{\mu\sigma} + \varepsilon^\sigma(X) X'_{\mu\sigma}, \quad (8.6.12)$$

находим

$$\begin{aligned} \partial_{\mu\sigma} &= \partial_{\mu\sigma} [\varepsilon^\rho(X) X'_{\nu\rho}] \partial_{\nu\rho}, \\ dX^{\mu\sigma} &= -\partial_{\nu\rho} [\varepsilon^\sigma(X) X'_{\mu\sigma}] dX^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (8.6.13)$$

Как и в общей теории относительности, мы найдем удобным ввести в теорию струнную тетраду, чтобы сделать меру интегрирования инвариантной, и поле связности, поскольку производные ковариантных полей уже не являются ковариантными.

Как и в общей теории относительности, два принципа приводят к выбору единственной функциональной меры. В струнной полевой теории мы вынуждены выбрать меру так, чтобы интегрировать один раз по каждой физической пространственно-временной конфигурации S . Для задания такой функциональной меры определим

$$d\mu_X = \det |e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}| DX, \quad (8.6.14)$$

так что она преобразуется как струнная плоскость. Если $\Phi(X)$ – скалярное поле, то мы хотим, чтобы

$$\delta \int d\mu_X \Phi(X) = 0. \quad (8.6.15)$$

Это, в свою очередь, фиксирует вариацию тетрады:

$$\delta e_{\mu\sigma}^{\nu\rho} = \partial_{\mu\sigma} [\varepsilon^\theta(X) X'_{\lambda\theta}] e_{\lambda\theta}^{\nu\rho} + e_{\mu\sigma}^{\nu\omega} f_{\omega\theta}^\rho e(X)^\theta. \quad (8.6.16)$$

Тщательный анализ этой формулы показывает, что наш выбор для функциональной меры интегрирования правилен.

Обратим внимание на очень важный факт, а именно: не все компоненты тетрадного поля независимы, так как в действительности вышеприведенные тождества можно выразить через меньшее векторное поле ζ^σ , преобразующееся под действием S . Это не удивительно, поскольку мы не строим теорию с общекоординатной инвариантностью на струне. В противном случае благодаря преобразованию

$$\delta X^{\mu\sigma} = \Lambda^{\mu\sigma}(X) \quad (8.6.17)$$

наша теория не была бы больше струнной теорией. Такой трансформационный закон просто означает, что каждая точка струны может свободно двигаться в любом направлении 26-мерного пространства, что разрушило бы струну. Вместо этого мы хотим, чтобы каждая точка струны перемещалась вдоль самой струны, т.е. вдоль касательного вектора $X'_{\mu\sigma}$. Таким образом, универсальная ковариантность может быть параметризована через векторное поле ζ^2 , а не через полную тетраду. Мы все же будем использовать тетрадный формализм, поскольку он обеспечивает компактную форму записи теории.

Введение локальных $\text{Diff}(S)$ привносит в теорию неинвариантные

производные типа

$$\partial_{\mu\sigma} \Phi_\alpha. \quad (8.6.18)$$

Как и в общей теории относительности, решение заключается во введении поля связности. Определим связность $\omega_{\mu\sigma, \alpha}^\beta$ так, чтобы следующие производные преобразовывались под действием $\text{Diff}(S)$ как истинные тензоры:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu\sigma} \Phi_\alpha &= \partial_{\mu\sigma} \Phi_\alpha + \omega_{\mu\sigma, \alpha}^\beta \Phi_\beta, \\ \nabla_{\mu\rho} \Phi_\rho &= \partial_{\mu\sigma} \Phi_\rho + \omega_{\mu\sigma, \rho}^\theta \Phi_\theta, \\ \nabla_{\mu\sigma} \Phi_{\nu\rho} &= \partial_{\mu\sigma} \Phi_{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\sigma, \nu\rho}^{\lambda\theta} \Phi_{\lambda\theta}. \end{aligned} \quad (8.6.19)$$

Если индексы A, B и C представляют индексы V или S , то можно восстановить локальную инвариантность, полагая

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\mu\sigma, A}^B &= - [\partial_{\mu\sigma} \varepsilon^\rho] f_{\rho A}^B + \varepsilon^\rho f_{\rho A}^C \omega_{\mu\sigma, C}^B \\ &\quad + \varepsilon^\rho f_{\rho C}^B \omega_{\mu\sigma, A}^C + \partial_{\mu\sigma} [\varepsilon^\rho X'_{\nu\rho}] \omega_{\nu\rho, A}^B. \end{aligned} \quad (8.6.20)$$

Можно также построить тензор кривизны для $\text{Diff}(S)$, полагая

$$R_{\mu\sigma, \nu\rho, \alpha}^\beta = [\nabla_{\mu\sigma}, \nabla_{\nu\rho}]_\alpha^\beta. \quad (8.6.21)$$

Отметим, что мы теперь должны обобщить определение производной (8.5.15):

$$\partial_\sigma = \frac{1}{2} (e^{-1})_{\mu\sigma}^{\nu\rho} (e^{-1})_{\mu\sigma}^{\lambda\theta} \nabla_{\nu\rho} \nabla_{\lambda\theta}. \quad (8.6.22)$$

Контравариантные индексы тетрады преобразуются как часть линейного касательного пространства, которая ковариантна относительно полной локальной группы $\text{Diff}(S)$, содержащей все диффеоморфизмы (а не только элементы, генерированные σ -репараметризацией.) Отсюда берет начало двумерная конформная инвариантность нашей теории, которая не была бы очевидной, если бы теория являлась инвариантной только относительно σ -репараметризаций. Хотя касательное пространство тетрады может преобразовываться полной группой $\text{Diff}(S)$, заметим, что преобразования любого функционала от X ограничиваются только σ -репараметризациями. (Если бы функционал от X преобразовывался полной группой $\text{Diff}(S)$, тогда формализм описывал бы теорию на «массовой поверхности», что нам не нужно. Мы избегаем этой проблемы, полагая, что касательное пространство тетрады преобразуется полной группой $\text{Diff}(S)$.)

Теперь можно суммировать соответствие между нашими полями и обычными тетрадой e_μ^λ , связностью ω_μ^{ab} и калибровочным полем A_μ^a :

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\sigma^a, \\ e_\mu^\lambda &\rightarrow e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (8.6.23)$$

$$\omega_{\mu}^{ab} \rightarrow \omega_{\mu\sigma, \alpha}^{\beta}.$$

Как было упомянуто выше, основное различие заключается в параметризации универсальной ковариантности векторным полем ζ^{σ} . Фактически можно показать, что ковариантная производная тетрады равна нулю и тензор кривизны, определенный на касательном пространстве $\text{Diff}(S)$, также есть нуль:

$$\begin{aligned} R_{\mu\sigma, \nu\rho, \alpha}^{\beta} &= 0, \\ \nabla_{\mu\sigma} e_{\nu\rho}^{\lambda\theta} &= 0, \\ e_{\mu\sigma}^{\nu\rho} &= \nabla_{\mu\sigma} [X^{\nu\rho} + \zeta^{\rho}(X) X'_{\nu\rho}] + \dots \end{aligned} \tag{8.6.24}$$

Отсюда видно, что единственное независимое поле, содержащееся в тетраде и в поле связности, — это вектор ζ^{σ} . Путем утомительных, хотя и совершенно прямолинейных вычислений можно выразить поле связности через тетраду и саму тетраду через векторное поле. Симметрию тетрады и поля связности можно вывести теперь, полагая

$$\delta\zeta^{\sigma}(X) = \varepsilon^{\sigma}(X). \tag{8.6.25}$$

Это в свою очередь позволяет зафиксировать параметризацию посредством устранения из теории ζ^{σ} . Фиксируя калибровку, мы имеем свободу выбрать

$$e_{\mu\sigma}^{\nu\rho} \rightarrow \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\sigma}^{\rho}. \tag{8.6.26}$$

Следует отметить, что добавление в нашу теорию тетрады, как кажется на первый взгляд, портит свойства оператора трансляций, в силу чего окончательное действие уже не будет инвариантным. Однако, вычисляя явный вид этих поправок, мы находим, что дополнительные члены исчезают благодаря обращению в нуль ковариантной производной тетрады и тензора кривизны. Таким образом, все важнейшие свойства оператора трансляций сохраняются.

§ 8.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВЫВОД ДЕЙСТВИЯ

Последние шесть разделов посвящались разработке основной стратегии (8.1.1) и установлению теоретико-групповых свойств универсальной струнной группы USG. Мы должны были потратить много времени, рассматривая разложение тензорных произведений на неприводимые представления группы USG, из-за отсутствия математического исследования проблемы. По сути, все предыдущее рассмотрение служило введением к этому разделу, составляющему основное содержание геометрического формализма. На этом математическая подготовка заканчивается, и мы можем построить само действие в несколько строк. Аналогично, в общей теории относительности значительные усилия требуются на то, чтобы развить тензорное исчисление общей ковариантности, но затем вывод действия укладывается лишь в несколько строк.

Существует только один скаляр, который содержит две производные и состоит из метрики, — это свертка тензора кривизны.

Построим из ковариантной производной $D_\sigma = \nabla_\sigma + A_\sigma$ кривизну:

$$[D_\sigma, D_\rho] = F_{\sigma\rho}. \quad (8.7.1)$$

Здесь мы опустили индексы V . Под действием струнной группы она преобразуется как

$$\delta F_{\sigma\rho} = F_{\sigma\rho} \times \Lambda - \Lambda \times F_{\sigma\rho} + \Sigma_{\sigma\rho}, \quad (8.7.2)$$

причем член $\Sigma_{\sigma\rho}$ обращается в нуль при свертке с γ^σ . Наш первый выбор для инвариантного действия мог бы иметь форму F^2 , но он не годится, поскольку $\delta^{\sigma\rho}$ не является постоянным тензором группы. Итак, такая свертка невозможна. На самом деле единственно возможный выбор есть

$$\det |e| \langle F_{\sigma\rho} | \varepsilon^{\sigma\rho\theta\omega} | F_{\theta\omega} \rangle, \quad (8.7.3)$$

где $\varepsilon^{\sigma\rho\theta\omega}$ — произведение четырех матриц.

Как можно показать, это выражение, в свою очередь, представляет собой полную производную. Выделяя топологический инвариант Черны–Саймонса, связанный с этим членом, находим окончательную форму нашего действия:

$$L = \det |e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}| \left[A_\sigma \times \nabla_\rho A_\theta + \frac{2}{3} A_\sigma \times A_\rho \times A_\theta \right]. \quad (8.7.4)$$

В такой записи подразумевается свертка индексов модуля Верма и тензора $\varepsilon^{\sigma\rho\theta}$.

Данное действие имеет несколько локальных калибровочных инвариантностей. Калибровочное поле A под действием струнной группы преобразуется как

$$U A_\sigma^\alpha U^{-1} = A_\sigma^\alpha(X + \delta X) + \Lambda_\beta^\alpha(X) A_\sigma^\beta + \Lambda_\sigma^\rho(X) A_\sigma^\alpha + [\nabla_\sigma \Lambda]^\alpha + [A_\sigma \times \Lambda - \Lambda \times A_\sigma]^\alpha. \quad (8.7.5)$$

Действие также обладает инвариантностью:

$$\delta |A_\sigma\rangle = |\Sigma_\sigma\rangle, \quad \gamma^\sigma |\Sigma_\sigma\rangle = 0. \quad (8.7.6)$$

Окончательно наше действие может быть написано в виде (8.7.4); эта форма инвариантна относительно преобразований (8.7.5) и (8.7.6). Еще раз обратим внимание на то, что после того, как была подготовлена математическая база, вывод самого действия занял всего несколько строк, как и для общей теории относительности.

Подытожим теперь все, что мы узнали из одной лишь теории групп. Многие ее следствия объясняют странные особенности, найденные в формализме BRST:

(а) $\delta_{\sigma\rho}$ не является постоянным тензором группы $\text{Diff}(S)$, что налагает жесткие ограничения на те инварианты, которые можно написать для

нашей теории. Это приводит к тому, что лоренцевские инварианты \square и $F_{\mu\nu}^2$ не имеют аналогов в полевой теории струн. Вот почему струнное действие отличается от обычных действий, найденных в калибровочной теории. Однако дираковское действие $\gamma^\sigma \nabla_\sigma$ и форма Черны–Саймонса инвариантны относительно преобразований из USG.

- (б) Действие, инвариантное относительно глобальных преобразований группы $\text{Diff}(S)$, нельзя написать, пользуясь одними лишь скалярными полями. Это заставляет обратиться к высшим представлениям этой группы.
- (в) Полный набор неприводимых представлений группы $\text{Diff}(S)$ неизвестен. Однако мы обходимся знанием двух представлений: модуля Верма и струнного представления S . В частности, это объясняет странное появление поля $\Phi(X, \theta, \bar{\theta})$, которое, как теперь видно, есть сумма приводимых представлений группы $\text{Diff}(S)$.
- (г) Таинственный духовый сектор струнной полевой теории BRST – это всего лишь касательное пространство геометрической теории. Более того, духовое поле Фаддеева–Попова, которое входит в формализм BRST через заднюю дверь, легко интерпретировать как коэффициент Клебша–Гордона для тензорного произведения $S^{[-1]} \otimes V \rightarrow V$. Таким образом, геометрический формализм объясняет странное появление духового поля, выполняющего в геометрическом подходе две функции: заполнение представления для V и обеспечение важнейшего коэффициента Клебша–Гордона, который присутствует в свободном действии.
- (д) Одни лишь теоретико-групповые соображения приводят к двум свободным действиям, основанным на полях φ_a и A_σ^a , которые инвариантны относительно глобальных преобразований группы $\text{Diff}(S)$:

$$\langle \varphi | \gamma^\sigma \nabla_\sigma | \varphi \rangle, \quad \langle A_\sigma | \varepsilon^{\sigma\rho} \nabla_\theta | A_\rho \rangle. \quad (8.7.7)$$

Эти выражения инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta | \varphi \rangle &= \gamma^\sigma \nabla_\sigma | \Lambda \rangle, \\ \delta | A_\sigma \rangle &= \nabla_\sigma | \Lambda \rangle. \end{aligned} \quad (8.7.8)$$

- (е) Мы находим, что генератор группы $\text{Diff}(S)$ в общем случае состоит из двух частей:

$$M_\sigma = \partial_\sigma + L_\sigma. \quad (8.7.9)$$

Руководствуясь нашим первым принципом, мы требуем, чтобы M_σ не имел центрального члена. Это требование объясняет, почему размерность пространства-времени равна 26.

- (ж) Геометрический формализм объясняет, почему $Q^2 = 0$. Это следует из того, что

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\rho] = 0, \quad (8.7.10)$$

или равняется нулю с точностью до члена, который исчезает при свертке с γ^σ . Подобная ситуация имеет место в теории форм, где тождество $d^2 = 0$ появляется из-за того, что $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

- (з) Инвариантный относительно $U(1)$ оператор $\gamma^\sigma \gamma_\sigma$ называется в формализме BRST «оператором духового числа». Здесь мы видим, что он является артефактом частного представления $\text{Diff}(S)$, а не существенной особенностью теории. Действительно, его можно полностью устранить, принимая абстрактную формулировку тензорного произведения представлений $\text{Diff}(S)$.
- (и) Мера интегрирования, которую в формализме BRST приходилось постулировать, в геометрическом формализме единственным образом определяется из второго геометрического принципа:

$$d\mu_X = \det |e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}| \prod_{\mu} \prod_{\sigma} dX^{\mu\sigma}. \quad (8.7.11)$$

- (к) Правило умножения $*$, которое в подходе BRST приходилось постулировать, есть не что иное, как калибровочно-фиксированный вариант умножения \times , определенного в (8.4.27). В итоге в подходе BRST приходилось постулировать правила интегрирования и умножения. В геометрическом подходе правила умножения и интегрирования сами выводятся из фундаментальных принципов. Такая ситуация аналогична имеющейся в общей теории относительности, где одной общей ковариантности достаточно для того, чтобы определить правило умножения тензоров и правила интегрирования.
- (л) В формализме BRST происхождение конформной инвариантности в двумерии не ясно. В нашем подходе двумерная конформная инвариантность возникает благодаря тому, что касательное пространство теории инвариантно относительно полной локальной группы $\text{Diff}(S)$, которая генерируется всей совокупностью L_n . (Хотя касательное пространство преобразуется под действием полной группы, переменная X всегда преобразуется подгруппой $\text{Diff}(S)_-$.)
- (м) В формализме BRST переход к полевой теории в калибровке светового конуса может быть осуществлен только на массовой поверхности. Но вводя тетраду $e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}$ и поля связности $\omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta$ для $\text{Diff}(S)_-$, мы можем выбрать калибровку светового конуса в лагранжиане вне массовой поверхности.
- (н) Фундаментальным полем полевой теории струн является поле связности для струнной группы. Следовательно, оно должно преобразовываться как смешанный тензор A_σ^a в том же самом смысле, в котором поле связности в теории Янга–Миллса из-за одних лишь теоретико-групповых соображений должно преобразовываться как A_μ^a .
- (о) Основная причина, по которой струнная группа замыкается без использования параметризационной средней точки, состоит в том, что физические струны S имеют произвольные параметризационные длины. Фактически две струнные теории BRST являются калибро-

вочно-фиксированными вариантами геометрической теории. Одна называется «калибровкой, склеивающей струны в средней точке», а другая – «калибровкой, склеивающей струны концами».

Наша следующая задача состоит в фиксации калибровки и устранении множества нежелательных полей. Локальная калибровочная инвариантность позволяет устранить в A_σ^α параметр σ . Σ_σ всегда можно выбрать так, чтобы заменить A_σ^α на φ^α :

$$\gamma^\sigma |A_\sigma\rangle = 0. \quad (8.7.12)$$

Тогда, делая подстановку

$$A_\sigma^\alpha \rightarrow \varphi^\alpha, \quad (8.7.13)$$

получаем, что действие теперь записывается в виде

$$L = \det|e| \left[\langle \varphi | Q | \varphi \rangle + \frac{2}{3} \langle \varphi | \langle \varphi | \langle \varphi | V_{123} \rangle \right] \quad (8.7.14)$$

и оказывается инвариантным относительно преобразований

$$\delta |\varphi\rangle = Q |\Lambda\rangle + \langle \varphi | \langle \Lambda | V \rangle - \langle \Lambda | \langle \varphi | V \rangle. \quad (8.7.15)$$

Наконец, мы всегда можем выбрать наше поле ζ^σ так, чтобы все струны имели одинаковые параметризационные длины. Тогда $\det|e| \rightarrow 1$.

В этот момент геометрическая теория оказывается сведенной к обычному формализму BRST. Фактически можно показать, что из наших двух аксиом при ковариантной фиксации калибровки и выделении средней параметризационной точки получаются пять аксиом формализма BRST. Более того, можно проверить, что редукционное поле равно сектору духового числа $-1/2$ поля $\Phi(X, \theta, \bar{\theta})$ во всех порядках.

§ 8.8. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ КАЛИБРОВКА

На первый взгляд симметричная вершина BRST, которую образуют струны, взаимодействующие через свои средние точки, и вершина типа светового конуса, в которой струны взаимодействуют на концах, кажутся совершенно различными. Однако обе они являются калибровочно-фиксированными вариантами геометрической теории. В результате мы называем первый формализм «калибровкой, склеивающей в средней точке» (MP), а второй – «калибровкой, склеивающей концами» (EP).

В геометрической теории мы можем выбрать еще одну калибровку, «интерполяционную», которая равномерно интерполирует между калибровками MP и EP. Интерполяционная калибровка также представляет собой калибровочно-фиксированный формализм, так как она основывается на Y-образной вершине с произвольными длинами струн. Налагая условие равенства всех параметризационных длин, мы имеем калибровку MP; требуя, чтобы одна нога в Y-конфигурации имела нулевую параметризационную длину, получаем калибровку EP.

Очень важно обратить внимание на то, что геометрическая вершина (8.3.9) содержит обе калибровки, как МР, так и ЕР. Когда мы функционально интегрируем по $\zeta'(\sigma)$, мы интегрируем по всем возможным параметризациям одной и той же пространственно-временной конфигурации. Поэтому в это интегрирование также входят обе параметризации — и МР, и ЕР. Имеется важнейшее утверждение, состоящее в том, что мы можем параметризовать физическую триплетную вершину либо в МР-, либо в ЕР-калибровке. Таким образом, фиксация калибровки соответствует выделению единственного представителя из каждого класса эквивалентности физически различных струнных конфигураций.

Покажем, что МР- и ЕР-калибровки отличаются друг от друга только мерой. Для этого построим интерполяционную вершину в явном виде.

Интерполяционная вершина удовлетворяет связи

$$\prod_{r=1}^3 \prod_{0 \leq \sigma_r \leq l_r} \{X'_\mu(\sigma_r) - X'^{-1}_\mu(\pi|\alpha_{r-1}| - \sigma_r)\} |V\rangle = 0, \quad (8.8.1)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^3 \alpha_r &= 2l_2, \quad \alpha_3 \leq 0, \quad \alpha_{1,2} \geq 0, \\ 0 \leq \sigma_r &\leq \pi|\alpha_r| = \pi(l_r + l_{r+1}). \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

Полагая абсолютную величину α_r равной π , мы получаем отсюда МР-калибровку; фиксируя $\sum_{r=1}^3 \alpha_r = 0$, приходим к ЕР-калибровке.

Чтобы построить такую вершину, необходимо конформное преобразование, которое переводит верхнюю часть z -плоскости в многолистную ρ -плоскость. Такое преобразование определяется [3] формулами

$$\rho(z) = \alpha_1 \log(z-1) + \alpha_2 \log z + \sum_{r=1}^3 \beta_r \log [(az^2 + bz + c)^{1/2} + a_r z + b_r],$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_1}; \quad a_2 = \frac{-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_2}; \quad a_3 = -\alpha_3,$$

$$b_1 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{2\alpha_1}; \quad b_2 = -\alpha_2; \quad b_3 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{-2\alpha_3},$$

$$a = \alpha_3^2; \quad b = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2; \quad c = \alpha_2^2; \quad \beta_r = -\alpha_r. \quad (8.8.3)$$

На многолистной плоскости обязательно имеется риманов разрез. Мы выбираем его расположенным вертикально от $\rho(z_0)$ до $\rho(\bar{z}_0)$. Выберем знак «+» для квадратного корня при $z \rightarrow \infty$ и знак «-» при $z \rightarrow -\infty$.

Путем утомительных, но прямолинейных вычислений находим

$$\frac{d\rho}{dz} = -\alpha_3 \frac{(z - z_0)^{1/2} (z - \bar{z}_0)^{1/2}}{z(z - 1)} \quad (8.8.4)$$

(z_0 и \bar{z}_0 — корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$). Теперь, используя технику, разработанную в теории светового конуса, можно найти из конформного преобразования функции Неймана для нашей вершины. Вычисление основывается на разложении функции ρ по коэффициентам $a_j^{(r,i)}$. Мы можем проверить, что в пределе светового конуса $l_2 \rightarrow 0$ снова получается вершина в калибровке светового конуса. В симметричном пределе $\alpha_r \pm 1$ получается новый степенной ряд для функций Неймана, который должен быть эквивалентен вычислениям в МР-калибровке.

Используя интерполяционную вершину $|V_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}\rangle$, запишем действие в интерполяционной калибровке:

$$L = \langle \varphi | \alpha Q | \varphi \rangle_\alpha + \frac{2}{3} \langle \varphi | \alpha_1 | \langle \varphi_{\alpha_2} | \langle \varphi_{\alpha_3} | | V_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \rangle, \quad (8.8.5)$$

где $Q = \gamma^\sigma \nabla_\sigma$. Параметризационную длину всегда можно изменить следующим преобразованием:

$$U_{\alpha_1, \alpha_2} | \varphi \rangle_{\alpha_2} = | \varphi \rangle_{\alpha_1}; \quad U_{\alpha_1, \alpha_2} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (L_n - L_{-n})}. \quad (8.8.6)$$

Отметим, что мы квантуем теорию с фиксированной величиной $\pi\alpha$. Струнные поля различных струнных длин определяются через $\pi\alpha$. Иными словами,

$$\langle \varphi(X_{\alpha_1}), \varphi(Y_{\alpha_2}) \rangle = U_{\alpha_1, \alpha_2} \langle \varphi(X_{\alpha_2}), \varphi(Y_{\alpha_2}) \rangle. \quad (8.8.7)$$

Если бы фактор U , появившийся в предыдущем уравнении, был заменен на $\delta_{\alpha_1, \alpha_2}$, мы бы имели ненужное бесконечное количество гильбертовых пространств для каждой возможной струнной длины.

Фейнмановские правила для интерполяционной калибровки таковы:

$$\text{Правила Фейнмана: } \begin{cases} \text{Вершина} \rightarrow |V_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}\rangle, \\ \text{Пропагатор} \rightarrow U_{\alpha, \alpha} D_\alpha U_{\alpha, \alpha}^{-1} \end{cases} \quad (8.8.8)$$

для произвольного α_i . Явно сокращая эти факторы U , находим, что мы можем тривиальным образом вернуться к МР-калибровке. Однако, когда мы устраняем эти факторы и переходим к ЕР-калибровке, возникает ряд замечательных тождеств для функций Неймана, позволяющих вывести четырехструнное взаимодействие (6.7.6) [4]. Мы находим, что четырехструнное взаимодействие не следует включать в действие при использовании тетрады; это калибровочный артефакт, аналог четырехфермионного кулоновского члена, найденного в КЭД. В калибровках МР, интерполяционной и ЕР ($t - u$)-диаграммы связываются объединенной струнной группой следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{tu} &= \langle V_{\alpha\alpha\alpha} | D_{5,\alpha}(t) | V_{\alpha\alpha\alpha} \rangle + \langle V_{\alpha\alpha\alpha} | D_{7,\alpha}(u) | V_{\alpha\alpha\alpha} \rangle \\
&= \langle V_{\alpha_1\alpha_4\alpha_5} | D_{5,\alpha_5}(t) | V_{\alpha_2\alpha_3\alpha_6} \rangle + \langle V_{\alpha_2\alpha_4\alpha_7} | D_{7,\alpha_7}(u) | V_{\alpha_1\alpha_3\alpha_8} \rangle \\
&\quad + \int_{\alpha_1 - |\alpha_4| + 2\delta}^{\alpha_1 + |\alpha_4| - 2\delta} (V_{\alpha_1\alpha_4\alpha_x} | V_{\alpha_2\alpha_3\alpha_x} \rangle \mu d\alpha_x, \tag{8.8.9}
\end{aligned}$$

где $|\alpha_3| \geq \alpha_1$, $\alpha_2 \geq |\alpha_4|$ и $-\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_1 - |\alpha_4| + 2\delta$; $-\alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_2 - |\alpha_4| + 2\delta$. Для t -рассеяния имеем $1 + 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 + 3$, для u -рассеяния $2 + 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 + 3$. При $\delta = 0$ последний член становится обычным четырехструнным взаимодействием формализма светового конуса. Если же $\delta \neq 0$, то мы имеем четырехструнное взаимодействие для интерполяционной калибровки. При $|\alpha_i| = \alpha$ и $\delta = \alpha$ получаем исчезновение четырехструнного взаимодействия в МР-калибровке:

$$\begin{cases} \delta = 0 & \text{ЕР-калибровка,} \\ \delta \neq 0 & \text{интерполяционная калибровка,} \\ \delta = \alpha (|\alpha_i| = \alpha) & \text{МР-калибровка.} \end{cases} \tag{8.8.10}$$

Итак, мы видим, что четырехструнное взаимодействие не является фундаментальным взаимодействием, а представляет собой побочный продукт преобразования четырехточечной функции от МР- к ЕР-калибровке. Фактически из (8.8.9) можно видеть, что оно в точности равняется квадрату интерполяционной вершины. Аналогичная ситуация имеет место в КЭД, где мгновенный четырехфермионный кулоновский член есть точный квадрат трехвершинной свертки поля A_0 с двумя фермионными полями.

В случае замкнутых струн ситуация еще более удивительна. Все предшествующие формулировки для замкнутой струны нарушали модулярную инвариантность. Пространство модулей или избыточно (благодаря лишнему бесконечному интегрированию по фиктивным струнным длинам), или недостаточно полно (из-за недостающей области интегрирования, если мы используем обобщение вершины Виттена). Решение проблемы состоит в использовании геометрической струнной полевой теории.

Во-первых, решается проблема многократного учета пространства модулей, поскольку фиктивные параметризационные длины являются калибровочными параметрами. Во-вторых, когда мы переходим к МР-калибровке, возникает *новое четырехструнное взаимодействие замкнутых струн*, которое точно заполняет недостающую область интегрирования. Это новое четырехструнное взаимодействие замкнутых струн имеет топологию тетраэдра. Каждая грань тетраэдра соответствует одному из четырех состояний замкнутых струн. Детальное компьютерное вычисление показало, что новый тетраэдрический граф заполняет недостающую область комплексной плоскости [2].

Гладко подходя к калибровке светового конуса, находим, что тетраэдрический граф исчезает. Когда же мы гладко изменяем пара-

метризационные длины до их равенства, то обнаруживаем, что тетраэдрический граф теперь занимает большую часть комплексной плоскости. В промежуточной области интерполяционной калибровке соответствует тетраэдрический граф, который гладко связывает калибровки МР и ЕР. Заметим, что эта ситуация прямо противоположна найденной в полевой теории открытых струн.

Детали этого построения можно найти в [2].

§ 8.9. ЗАМКНУТЫЕ СТРУНЫ И СУПЕРСТРУНЫ

В геометрическом формализме так же, как и для открытых струн, мы можем построить тензорное исчисление для замкнутых струн, основанное на тетрадах и связностях. Однако для замкнутых струн новая характерная черта — это отсутствие необходимости в транкировании или наложении связей извне, т.е. в операциях, являющихся основным недостатком подхода BRST. Ключевая особенность геометрической теории состоит здесь в существовании единственного вакуума для группы $\text{Diff}(S)$. Как мы видели, духовые состояния есть не что иное, как коэффициенты Клебша–Гордона для $\text{Diff}(S)$, и, следовательно, в геометрическом подходе духовый вакуум не является фундаментальным физическим объектом. В сущности, специфические духовые поля, появляющиеся в BRST-формализме, представляют собой лишь один из нескольких способов получить коэффициенты Клебша–Гордона. Следовательно, духовый вакуум сам по себе не важен.

Тот факт, что духовый вакуум не является фундаментальным объектом, можно видеть уже на уровне открытых струн. Заметим, что контравариантная матрица

$$\langle e^\alpha | e^\beta \rangle = S^{\alpha\beta} \quad (8.9.1)$$

упрощается путем перемещения операторов L_n направо до тех пор, пока они не аннигилируют с вакуумом справа. Конечно, в этом процессе возникает огромное количество членов, которые объединяются в матрицу $M^{\alpha\beta}$, что приводит к выражению

$$\langle e^\alpha | e^\beta \rangle = M^{\alpha\beta} \langle 0|0 \rangle. \quad (8.9.2)$$

Очевидно, что всегда можно выбрать $\langle 0|0 \rangle$ равным 1, так что $M^{\alpha\beta}$ совпадает с $S^{\alpha\beta}$. Обратим внимание, что мы при этом пользовались только чисто теоретико-групповыми свойствами $\text{Diff}(S)$, безо всякого упоминания «духовых вакуумов».

Повторим теперь то же самое вычисление, пользуясь явным духовым представлением. Например, выбирая $| - \rangle = |0 \rangle$ и $\langle - | = \langle 0 |$, получаем выражение

$$\langle e^\alpha | e^\beta \rangle = M^{\alpha\beta} \langle - | - \rangle = 0, \quad (8.9.3)$$

что явно бессмысленно. Таким образом, мы не можем наивно использовать духовый вакуум как замену специального вакуума группы

$\text{Diff}(S)$. В действительности такой пример показывает, что эрмитово сопряжение не сохраняет духовое число. Это обусловлено тем, что «счет духов» – это не внутреннее свойство группы $\text{Diff}(S)$, а только свойство ее специального представления.

Повторим вычисление, приведенное выше для сектора открытых струн, чтобы найти матричный элемент $(\gamma^\sigma)_{\alpha\beta}$, но теперь мы будем использовать духовые координаты. На этот раз, извлекая урок из предыдущего примера, предположим, что эрмитово сопряженным к вектору $|-\rangle$ является вектор $\langle +|$:

$$\langle \mathbf{e}_\alpha | \gamma^\sigma | \mathbf{e}_\beta \rangle = (\gamma^\sigma)_{\alpha\beta} \langle + | \gamma^0 | - \rangle = 0. \quad (8.9.4)$$

Мы снова обнаруживаем разрушение матричного элемента при наивном выборе духового вакуума. Таким образом, истинный вакуум $\text{Diff}(S)$ не обязан строго соответствовать $|-\rangle$ или $|+\rangle$. Еще раз мы находим, что «счет духов» не выживает при эрмитовом сопряжении.

Применим сейчас это значение к сектору замкнутых струн, в котором возможны четыре вакуума:

$$|\pm\rangle \pm \rangle. \quad (8.9.5)$$

В подходе BRST мы вынуждены взять в качестве духового вакуума $|-\rangle|-\rangle$, а в качестве его эрмитово сопряженного $\langle -|\langle -|$, что приводит ко всем трудностям, связанным со счетом духов. Снова начнем рассуждать в рамках геометрического формализма, вооружившись тем фактом, что духовый вакуум и духовая арифметика – это не фундаментальные особенности $\text{Diff}(S)$, а только особенности специального представления соответствующей алгебры.

Обратимся вновь к универсальной обертывающей алгебре

$$|\mathbf{e}^\alpha\rangle = L_{-\alpha_1}^{\lambda_1} \dots L_{-\alpha_n}^{\lambda_n} \bar{L}_{-\bar{\alpha}_1}^{\bar{\lambda}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{\alpha}_m}^{\bar{\lambda}_m} |0\rangle, \quad (8.9.6)$$

где $|0\rangle$ – вакуум $\text{Diff}(S)$. Как и выше, свободный пропагатор имеет вид

$$\varphi_\alpha \nabla_\sigma \varphi_\beta; \quad \varphi_\alpha \bar{\nabla}_\sigma \varphi_\beta, \quad (8.9.7)$$

где мы имеем удвоение операторов дифференцирования. Как обычно, для образования из данного выражения инварианта необходим коэффициент Клебша–Гордона. Нам, очевидно, нужны матрицы

$$\begin{aligned} (\gamma^\sigma)_{\alpha\beta} &= \langle \mathbf{e}_\alpha | \gamma^\sigma | \mathbf{e}_\beta \rangle, \\ (\bar{\gamma}^\sigma)_{\alpha\beta} &= \langle \mathbf{e}_\alpha | \bar{\gamma}^\sigma | \mathbf{e}_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (8.9.8)$$

Повторяя рассуждения, найденные для открытой струны, мы видим, что можно выбрать

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |-\rangle|-\rangle, \\ \langle 0| &= \langle +|\langle -| + \langle -|\langle +|. \end{aligned} \quad (8.9.9)$$

Такой выбор не является обычным эрмитовым сопряжением духового вакуума. Но, как мы сказали выше, единственный критерий заключается

в том, чтобы получить постоянные матрицы $(\gamma^\sigma)_{\alpha\beta}$, преобразующиеся как коэффициенты Клебша–Гордона.

Для случая взаимодействующих струн определим триплет замкнутых струн, являющийся обобщением рис. 8.1, в котором три струны имеют топологию греческой буквы «тэта». Однако когда мы выписываем струнную группу для замкнутых струн в пространстве петель, возникают нетривиальные осложнения. Во-первых, поскольку замкнутые струны не имеют концов и могут вращаться, антитриплет не существует. (Триплет в действительности есть свой собственный антитриплет.) Во-вторых, в пространстве петель не существует антисимметричных структурных констант. Возможны только симметричные тензоры. В-третьих, тождество Якоби не замыкается правильным образом на триплетах. Хотя все это может разочаровывать, на самом деле решение существует.

Определим триплет как три замкнутые струны, которые можно расположить в виде «восьмерки» (т.е. конфигурации типа светового конуса, в которой три физические длины дают в сумме нуль). Пусть \hat{i}_{123} будет грассмановой переменной, определяемой в точке взаимодействия трех струн на этой восьмерке. Определим симметричный постоянный тензор:

$$f_{c_1 c_2 c_3} = \begin{cases} +1(-1) & \text{для триплетов, если } C_3 = \text{внутренняя} \\ & \text{(внешняя) струна,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (8.9.10)$$

$$\hat{f}_{c_1 c_2}^{c_3} = f_{c_1 c_2 c_3} \hat{i}_{123}.$$

Тогда струнная алгебра и тождества Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} \{L_{c_1}, L_{c_2}\} &= \hat{f}_{c_1 c_2}^{c_3} L_{c_3}, \\ [L_{c_1}, \{L_{c_2}, L_{c_3}\}] &= 0. \end{aligned} \quad (8.9.11)$$

Отметим несколько особенностей струнной алгебры. Во-первых, сами структурные константы должны быть *грассмановыми*. Эта алгебра вовсе не является традиционной алгеброй Ли из-за грассманового оператора, определенного в точке расщепления. Тщательно выписав тождества Якоби для трех замкнутых струн (которые содержат теперь как коммутаторы, так и антикоммутаторы) и рассмотрев их граф за графом, убеждаемся, что результирующая сумма есть точный нуль.

Вводя в алгебру параметризацию, можно показать, что появляется обычная алгебра Ли, а таинственный оператор, определенный в точке распада струн, становится в действительности оператором «вставки духа», известным из теорий замкнутых струн. В [2] мы показываем возможность локализации этой алгебры, а также находим действие, которое вновь есть форма Черны–Саймонса, ассоциированная с $F\hat{F}$.

Мы опишем кратко только геометрический подход для открытых суперструн. Снова мы можем ввести тетрады и поля связности с тем отличием, что все они теперь имеют суперсимметричных партнеров.

Для физической струны C к генератору струнной группы мы должны теперь добавить суперсимметричного партнера F_C :

$$(L_C, F_C).$$

Суперструнная группа (SSG), являющаяся обобщением струнной группы (SG), определяется следующим образом:

$$\text{SSG: } \begin{cases} [L_{C_1}, L_{C_2}] = f_{C_1, C_2}^{-C_3} L_{C_3}, \\ [L_{C_1}, F_{C_2}] = f_{C_1, C_2}^{-C_3} F_{C_3}, \\ \{F_{C_1}, F_{C_2}\} = f_{C_1, C_2}^{+C_3} L_{C_3}. \end{cases} \quad (8.9.12)$$

Здесь структурные константы суть

$$f_{\pm C_1, C_2, C_3} = \begin{cases} +1 & \text{для триплета,} \\ \pm 1 & \text{для антитриплета,} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (8.9.13)$$

и

$$\begin{aligned} f_{C_1, C_2}^{\pm C_3} &= f_{\pm C_1, C_2, C_3}, \\ f_{C_2, C_1}^{\pm C_3} &= \pm f_{\pm C_2, C_1, C_3}. \end{aligned} \quad (8.9.14)$$

Мы можем показать выполнение супертождеств Якоби. Основное поле, которое мы хотим проквантовать, теперь удваивается:

$$\Phi^X L_X + \Psi^X F_X, \quad (8.9.15)$$

где Φ – функционал как бозонных, так и фермионных переменных:

$$\Phi = \{X(\sigma_1), X(\sigma_2), \dots, \psi(\sigma_1), \psi(\sigma_2), \dots, \psi(\sigma_N)\}. \quad (8.9.16)$$

Мы также можем ввести два неприводимых представления V и S . Как и ранее, важнейшее обстоятельство заключается в существовании собственного коэффициента Клебша–Гордона для разложения тензорного произведения. Для $\text{Superdiff}(S)$ по-прежнему имеется обобщение представлений S и V .

Начнем с определения модулей Верма для

$$|e^a\rangle = G_{-a_1}^{\lambda_1} G_{-a_2}^{\lambda_2} \dots G_{-a_n}^{\lambda_n} |0\rangle. \quad (8.9.17)$$

Подобным образом мы можем также написать

$$|f^a\rangle = F_{-a_1}^{\lambda_1} F_{-a_2}^{\lambda_2} \dots F_{-a_m}^{\lambda_m} |0\rangle. \quad (8.9.18)$$

Коэффициент Клебша–Гордона, который мы хотим вычислить, это

$$(\gamma^\sigma)_{\alpha\beta} = \langle f_\alpha | \gamma^\sigma | f_\beta \rangle. \quad (8.9.19)$$

Учитывая, что F – произвольный контравариантный вектор, можно еще раз прокоммутировать различные γ^σ направо. Подобно тому, что было

в предыдущем случае, мы находим члены вроде

$$\langle 0 | \gamma_0 | 0 \rangle. \quad (8.9.20)$$

Если $\langle 0 |$ является BRST-вакуумом, то данное выражение обращается в нуль. Однако если $\langle 0 |$ равняется настоящему вакуумному состоянию Superdiff(S) с наивысшим весом, то в общем случае оно не равно нулю. Дело здесь в том, что повторными коммутациями можно построить матрицу, преобразующуюся относительно Superdiff(S) подобно правильному коэффициенту Клебша–Гордона независимо от точной величины предыдущего матричного элемента. Преимущество этого подхода состоит в том, что мы находим существенные коэффициенты Клебша–Гордона, основанные на истинном вакууме Superdiff(S), вместо того чтобы связываться с бесконечным числом возможных духовых вакуумов.

Получив численную величину этого коэффициента Клебша–Гордона, можно использовать ее для вывода инвариантного действия путем свертки со следующим действием:

$$\bar{\Psi}_\alpha \nabla_\sigma \Psi_\beta. \quad (8.9.21)$$

Снова наше действие есть форма Черны–Саймонса, ассоциированная с

$$s \det |e| P \langle A_\sigma | \varepsilon^{\sigma\rho\theta} \nabla_\rho | A_\theta \rangle. \quad (8.9.22)$$

Аналогично, возможна фиксация калибровки, поскольку универсальная суперструнная группа (USSG) представляет полупрямое произведение группы Superdiff(S) и суперструнной группы:

$$\frac{\text{USSG}}{\text{Superdiff}(S)} = \text{SSG}. \quad (8.9.23)$$

Фиксацией калибровки мы можем нарушить универсальную ковариантность и получить теорию, которая имеет только суперструнную группу. Таким способом можно снова получить подход BRST.

К сожалению, недостаток места не позволяет нам обсудить более детально замкнутую взаимодействующую струну и пространственно-временную суперсимметрию в геометрическом формализме. Отметим, однако, одно важное обстоятельство, состоящее в том, что теория замкнутых струн в геометрическом формализме является модулярно инвариантной, тогда как BRST-теория замкнутых струн этим свойством не обладает. Кроме того, добавляя пространственно-временную суперсимметрию к (бозонной) универсальной струнной группе, мы получаем объединенную струнную группу. Для более детального рассмотрения читателю следует обратиться к [1, 2].

§ 8.10. РЕЗЮМЕ

На рис. 8.5 мы видим связь между различными полевыми теориями струн. Цель геометрического формализма – вывести всю теорию из ее

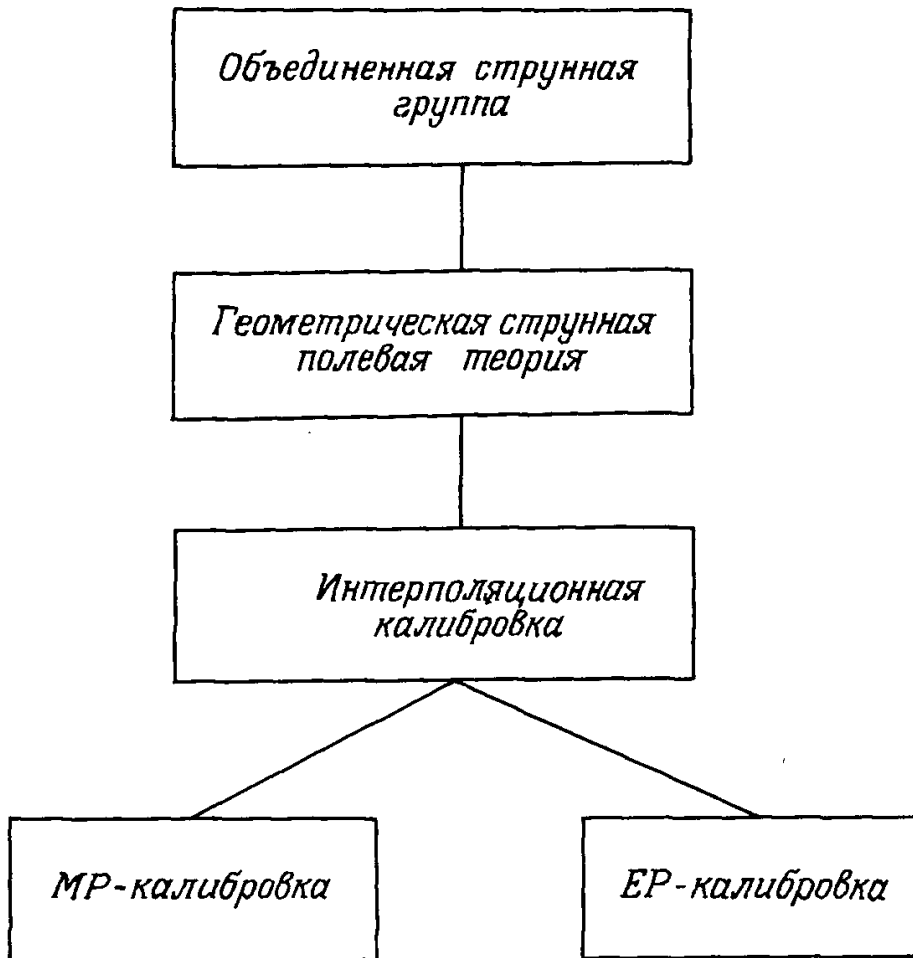


Рис. 8.5. Связь между различными струнными полевыми теориями. Геометрическая струнная полевая теория определяется в пространстве петель. Фиксируя калибровку геометрической струнной полевой теории и фиксируя параметризацию, мы получаем интерполяционную калибровку (в которой струны имеют произвольные параметризационные длины). Выбирая различные величины параметризационных длин, можно прийти как к EP калибровке (типа калибровки светового конуса), так и к MP калибровке.

основных физических допущений. Замечательным образом мы обнаруживаем, что вся полевая теория струн и, следовательно, вся теория струн как таковая могут быть выведены из двух простых предположений:

Глобальная инвариантность. Поля A_σ^a и $e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}$ должны преобразовываться по неприводимым представлениям группы $\text{Diff}(S)$.

Локальная инвариантность. Теория должна быть локально инвариантной относительно действия объединенной струнной группы.

Полную полевую теорию струн можно получить как единственное решение, удовлетворяющее этим двум геометрическим принципам.

В самом деле, первый принцип является достаточно мощным, чтобы определить единственным образом свободное действие. Тогда второй принцип определяет теорию целиком. Следовательно, поиск действия полевой теории струн сводится к теоретико-групповой задаче: нахождению инварианта объединенной струнной группы.

Таким образом, полевая теория струн является калибровочной теорией универсальной струнной группы (USG) в почти таком же смысле, в каком теория Янга–Миллса есть калибровочная теория локальной группы $SU(N)$. В действительности, мы сейчас понимаем, что полевая теория струн выглядит столь отличной от обычной калибровочной полевой теории просто потому, что неприводимые представления и тензорные произведения этих групп различны.

Мы определяем универсальную струнную группу как группу преобразований, отображающих физическую струну C в себя или в ее сопряжения \bar{C} :

$$\begin{aligned} C &\rightarrow C, \\ C &\rightarrow \bar{C}, \end{aligned} \quad (8.10.1)$$

а объединенную струнную группу как ее суперсимметричное расширение. Далее можно найти генераторы этой группы:

$$\begin{aligned} [L_\sigma, L_\rho] &= f_{\sigma\rho}^{\bar{\sigma}} L_{\bar{\sigma}}, \\ [L_\sigma, L_X] &= \partial_{\sigma^-} L_X, \\ [L_X, L_Y] &= f_{XY}^Z L_Z, \end{aligned} \quad (8.10.2)$$

$$\begin{aligned} f_{XYZ} &= \prod_{r=1}^3 \prod_{0 \leq \sigma, \leq \pi/2} \delta(X_r(\bar{\sigma}_r) - X_{r-1}(\pi\alpha_{r-1} - \bar{\sigma}_r)), \\ \bar{\sigma} &= \sigma + \xi^\sigma(X) \end{aligned} \quad (8.10.3)$$

и

$$f_{XY}^Z = f_{XYZ}. \quad (8.10.4)$$

Чтобы построить действие, мы следуем пути, проложенному калибровочными теориями:

$$\begin{aligned} \text{Калибровочная группа} &\rightarrow \text{Связности} \rightarrow \text{Ковариантные} \\ &\text{производные} \rightarrow \text{Тензоры кривизны} \rightarrow \text{Действие}. \end{aligned} \quad (8.10.5)$$

Для построения ковариантных производных мы строим две «связности» для каждой из двух локальных симметрий: A_σ^a для струнной группы и $\omega_{\mu\sigma}^\rho$ для репараметризационной группы $\text{Diff}(S)_-$. Это в свою очередь дает нам право написать для этих двух групп ковариантные производные и тензоры кривизны:

$$\begin{aligned} D_\sigma &= \partial_\sigma + A_\sigma, \\ \nabla_{\mu\sigma} &= \partial_{\mu\sigma} + \omega_{\mu\sigma}^\rho f_{\rho,a}^\beta, \end{aligned}$$

$$E_{\sigma,\rho} = [D_\sigma, D_\rho], \quad (8.10.6)$$

$$R_{\mu\sigma,\nu\rho,\alpha}^\beta = [\nabla_{\mu\sigma}, \nabla_{\nu\rho}]_\alpha^\beta.$$

Мы можем показать наличие строгого соответствия между полями калибровочной теории и полями, возникающими в струнной полевой теории:

$$\begin{aligned} A_\mu^i &\rightarrow A_\sigma^a, \\ e_\mu^a &\rightarrow e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}, \\ \omega_\mu^{ab} &\rightarrow \omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta. \end{aligned} \quad (8.10.7)$$

Здесь A_μ^a – поле Янга–Миллса, e_μ^λ – тетрада, ω_μ^{ab} – связность, тогда как A_σ^a – калибровочное поле струны, $e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}$ – струнная тетрада, $\omega_{\mu\sigma,\alpha}^\beta$ – струнное поле связности.

Окончательное действие есть

$$L = \det |e_{\mu\sigma}^{\nu\rho}| \left[A_\sigma + \nabla_\rho A_\theta + \frac{2}{3} A_\sigma \times A_\rho \times A_\theta \right],$$

где мы опустили индексы V и тензор $\varepsilon^{\sigma\rho\theta}$. Сходство между обычной калибровочной теорией и полевой теорией струн можно выразить в следующем виде:

Глобальные преобразования Лоренца \rightarrow Глобальные диффеоморфизмы группы $\text{Diff}(S)$,

Локальная $SU(N)$ -инвариантность \rightarrow Струнная ковариантность,

Общая ковариантность \rightarrow Универсальная ковариантность,

Касательное пространство: Лоренцевская симметрия \rightarrow

Касательное пространство: симметрия $\text{Diff}(S)$.

Как и в общей теории относительности, мы видим, что из полей, преобразующихся под действием универсальной струнной группы, можно построить только один инвариант, который имеет две производные, и этот инвариант есть действие. Более того, правила умножения и интегрирования постулировать не нужно, а можно вывести из фундаментальных физических принципов.

Трудность, связанная с «перевернутым» подходом, как мы упоминали, состоит в том, что многие особенности, появление которых в первично квантованной теории естественно, при экстраполяции во вторично квантованный подход выглядят странными и надуманными. Это происходит потому, что первично квантованный подход является калибровочно-фиксированным и содержит все атрибуты фиксации калибровки, например духи Фаддеева–Попова. Только после рассмотрения геометрического подхода эти неестественные объекты получают, наконец, замечательное математическое объяснение, возникающее из одной лишь теории групп. Фактически мы найдем, что духовые поля

Часть III

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Глава 9

АНОМАЛИИ И ТЕОРЕМА АТЬИ–ЗИНГЕРА

§ 9.1. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ТВО И ВЫХОД ЗА ЕЕ ПРЕДЕЛЫ

В идеале нам бы хотелось, чтобы истинно единая полевая теория всех известных взаимодействий удовлетворяла по крайней мере двум критериям:

- (1) Она должна быть основана на простых физических предположениях, выраженных в терминах новой геометрии, которая будет допускать не более одной константы взаимодействия.
- (2) Она должна приводить к конечной теории гравитации, соединенной с минимальной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -моделью взаимодействий частиц.

До сих пор в этой книге мы только начали исследовать первую возможность, показывая, что вторично квантованная теория поля, основанная на этих двух физических принципах, существует. Однако достижения теории струн, которые мы описали, пока были чисто формальными. Если мы не сможем сопоставить теорию с известными экспериментальными данными, то, сколь элегантна бы она ни была, ее придется отбросить. Подлинной проверкой для единой полевой теории является требование, чтобы при низких энергиях она могла воспроизвести известные экспериментальные данные.

Проблема, однако, заключается в том, что размерная редукция 10-мерной теории до 4 измерений может происходить только непертурбативно. Для любого конечного порядка теории возмущений размерность пространства–времени представляется совершенно неизменной. Вообще говоря, полевая теория дает единственный надежный формализм, в котором можно проводить непертурбативные вычисления, поскольку первично квантованный формализм непременно является пертурбативным. К сожалению, мы пока не понимаем, как выполнять непертурбативные вычисления в теории струн – в основном потому, что полевая теория струн находится пока в младенческом состоянии. Так, например, физики не в состоянии просчитать устойчивость ни одного из классических вакуумных решений. Поэтому мы не будем касаться квантовой устойчивости в части III этой книги и сосредоточимся исключительно на классических решениях уравнений движения.

Удивительно, что при таком серьезном ограничении уже самые первые попытки исследовать экспериментальные следствия классической теории струн дали очень много новых феноменологических следствий, выводящих нас за рамки ТВО. В части III мы в первую очередь поставили вопрос: согласуется ли теория струн с результатами стандартной ТВО? Особенно нас будет интересовать, может ли она воспроизвести теории Великого объединения с калибровочными группами $SU(5)$, $O(10)$ или E_6 . В этом отношении теория струн сумела достичь определенного успеха. Мы покажем в гл. 11, что, например, гетеротическая струна $E_8 \times E_8$ может быть легко редуцирована классическими методами к теории с калибровочной группой E_6 , которая имеет решения с киральными фермионами и приемлема с точки зрения феноменологии ТВО.

Но мы должны также потребовать, чтобы теория струн выходила за рамки стандартной феноменологии ТВО. А именно мы должны поставить перед ней следующие вопросы, относящиеся к струнной модели:

- (1) Может ли она объяснить три поколения киральных фермионов?
- (2) Может ли она объяснить экспериментальные результаты по распаду протонов?
- (3) Может ли она объяснить малость массы электрона?
- (4) Может ли она объяснить обращение в нуль космологической постоянной после нарушения суперсимметрии?

Хотя еще рано утверждать это категорически, все же есть указания на то, что теория струн достаточно содержательна и что она опирается на математический аппарат, с помощью которого можно получить ответы на поставленные выше вопросы. В частности, существенно используется топология, так что основные феноменологические понятия, такие как число поколений, переформулируются теперь на языке топологии. *Топология есть тот новый математический аппарат, который позволит нам выйти за рамки стандартной феноменологии ТВО.*

Мы начнем эту главу с обсуждения изотопических групп, которые допустимы в теории струн. Мы найдем, что свойства S -матриц, такие как циклическая симметрия и свойство факторизации, дают самые слабые ограничения на калибровочную группу теории. Затем мы покажем, что требование сокращения аномалий в теории струн приводит к сильным ограничениям на допустимые калибровочные группы теории. В частности, калибровочная группа суперсимметричной теории должна содержать в точности 496 генераторов, что приводит нас либо к $SO(32)$, либо к $E_8 \times E_8$.

Чтобы понять, как происходит процесс сокращения аномалий, полезно будет рассмотреть некоторые элементарные свойства характеристических классов. В частности, последние достижения в суперсимметрии позволили получить доказательство *теоремы Атьи–Зингера об индексе*, основанное на использовании простого лагранжиана. Раньше доказательство теоремы Атьи–Зингера было недоступно большинству

физиков из-за запутанности и сложности математических формулировок. Однако одна из удивительных черт суперсимметрии – способность этой теории дать относительно простое доказательство теоремы Атьи–Зингера об индексе, которое мы представим в конце этой главы.

Мы начнем обсуждение феноменологии введением изотопического спина в рассматриваемую модель с помощью факторов Чана–Патона [1]. С самых первых дней теории струн было известно, что изоспиновые факторы могут быть тривиально введены в модель с помощью простых множителей. (В следующей главе мы обсудим более изощренный способ введения калибровочных групп через компактификацию и алгебры Каца–Мули.)

Метод Чана–Патона дает амплитуду рассеяния T при помощи простого умножения члена Венециано–Борна A на след от произведения изоспиновых матриц, причем $\text{Tr}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ циклически симметричен относительно перестановки $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и последующего суммирования по различным перестановкам внешних линий:

$$T(1, 2, 3, \dots, N) = \sum_{\text{перестановки}} \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_N) A(1, 2, 3, \dots, N). \quad (9.1.1)$$

Поскольку след циклически симметричен для любой изотопической группы, у нас нет ограничений на выбор самой группы. Поэтому мы хотим наложить дополнительные ограничения, которые позволят избежать физически необоснованного выбора калибровочной группы. Сначала мы вставим полный набор промежуточных состояний в амплитуду рассеяния. После этого потребуем:

- (1) чтобы амплитуда T полностью факторизовалась;
- (2) чтобы поворот внешних линий имел собственные значения ± 1 ;
- (3) чтобы безмассовая янг-миллсовская частица на внешних линиях и во внутреннем факторизованном канале принадлежала присоединенному представлению калибровочной группы.

Начнем с наложения первого условия, заключающегося в полной факторизации амплитуды. На рис. 9.1 мы делим N внешних частиц на две группы a и b . Пусть промежуточная линия обозначает частицу X . На левой части рисунка показано рассеяние частиц группы a в X , а на правой – распад частицы X в частицы группы b . Следуя (5.1.7), находим

$$T(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{s - m_X^2} \sum_X T(a \rightarrow X) T(b \rightarrow X) + \dots \quad (9.1.2)$$

Перепишем теперь эту формулу факторизации в терминах амплитуд Венециано. Каждая из амплитуд удовлетворяет условию

$$A(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{s - m_X^2} \sum_X A(1, 2, \dots, X) A(X, p, p + 1, \dots, N). \quad (9.1.3)$$

Отметим, что амплитуды Венециано автоматически факторизуемы и циклически симметричны, так что коэффициент $T(a \rightarrow X)$ должен содер-

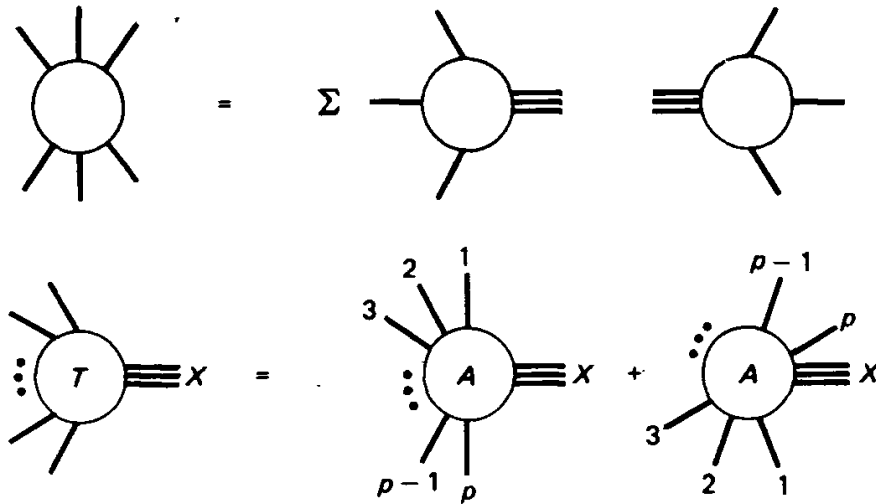


Рис. 9.1. Ограничения наложены условием унитарности. Изоспин может быть введен в модель умножением амплитуд на изоспиновые факторы Чана-Патона, подчиняющиеся более сильным условиям, возникающим из условия унитарности. Факторизованная амплитуда рассеяния должна состоять из суммы множителей Чана-Патона, в одном из которых внешние линии направлены по часовой, а в другом – против часовой стрелки (X представляет набор факторизованных состояний).

жать два члена: с циклическим и с антициклическим порядком расположения внешних линий. Поэтому произведение двух таких членов должно содержать в целом 2×2 членов. Выпишем эти четыре члена явно:

$$\begin{aligned}
 T(1, 2, \dots, N) = & \frac{1}{s - m_X^2} \{ \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{p-1} \lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_{N-1} \lambda_N) \\
 & \times A(1, 2, \dots, p-1, p, X) A(X, p+1, \dots, N-1, N) \\
 & + \text{Tr}(\lambda_p \lambda_{p-1} \dots \lambda_2 \lambda_1 \lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_N) \\
 & \times A(p, p-1, \dots, 2, 1, X) A(X, p+1, p+2, \dots, N-1, N) \\
 & + \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \lambda_N \lambda_{N-1} \dots \lambda_{p+1}) \\
 & \times A(1, 2, \dots, p, X) A(X, N, \dots, p+1) \\
 & + \text{Tr}(\lambda_p \lambda_{p-1} \dots \lambda_1 \lambda_N \lambda_{N-1} \dots \lambda_{p+1}) \\
 & \times A(p, \dots, 1, X) A(X, N, \dots, p+1) \}. \tag{9.1.4}
 \end{aligned}$$

Хотелось бы упростить это выражение. Используем для этого наше второе предположение, что оператор поворота соответствует

$$\Omega = (-1)^{N+1}. \tag{9.1.5}$$

Заметим, что если мы применим оператор твиста ко всем внешним линиям, то это изменит циклический порядок на антициклический. Согласно предположению, мы рассматриваем только рассеяние безмассовых векторных частиц, для которых $N = 0$. Таким образом, оператор твиста приобретает множитель (-1) для каждой внешней линии.

Поэтому полный вклад в оператор твиста есть

$$A(1, 2, \dots, p, X) = (-1)^{p+1} A(X, p, p-1, \dots, 2, 1). \quad (9.1.6)$$

Соберем теперь все члены и сформулируем некоторые выводы. Получаем

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p - (-1)^p \lambda_p \lambda_{p-1} \dots \lambda_1] \\ & \quad \times [\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_N - (-1)^{N-p} \lambda_N \lambda_{N+1} \dots \lambda_{p+1}] \} \\ & \quad \times A(1, 2, \dots, X) A(X, p+1, \dots, N). \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

Вставим полный набор изоспиновых матриц λ_a в предыдущее уравнение. Мы всегда можем это сделать, поэтому возьмем

$$\delta_{\alpha\beta} = \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta). \quad (9.1.8)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ [\lambda_1 \dots \lambda_p - (-1)^p \lambda_p \dots \lambda_1] \\ & \quad \times [\lambda_{p+1} \dots \lambda_N - (-1)^{N-p} \lambda_N \dots \lambda_{p+1}] \} \\ & = \sum_a \text{Tr} \{ [\lambda_1 \dots \lambda_p - (-1)^p \lambda_p \dots \lambda_1] \lambda_a \} \\ & \quad \times \text{Tr} \{ \lambda_a [\lambda_{p+1} \dots \lambda_N - (-1)^{N-p} \lambda_N \dots \lambda_{p+1}] \}. \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

А теперь наложим третье, последнее условие. Это условие требует, чтобы комбинация λ -матриц в скобках была частью алгебры калибровочной группы:

$$\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_p - (-1)^p \lambda_p \dots \lambda_1. \quad (9.1.10)$$

Наш вывод заключается в том, что калибровочная группа, для которой множители Чана–Патона сохраняют присоединенное представление безмассовых векторных частиц, должна быть такой, что приведенная выше комбинация генераторов также является генератором алгебры. Это вынуждает нас ограничиться матрицами из $\text{Usp}(N)$, $\text{SO}(N)$ и $\text{U}(N)$. (На самом деле $\text{U}(N)$ также отбрасывается, но уже по другим причинам. Мы не можем последовательно ввести взаимодействие открытых и замкнутых суперструн с калибровочными полями группы $\text{U}(N)$, потому что $N=2$ -супергравитация не может взаимодействовать с $N=1$ -мультиплетами материи.)

К сожалению, этот анализ не дает никаких других ограничений, так что такая модель имеет очень небольшую предсказательную силу. Вернемся теперь к вопросу об аномалиях, что фиксирует калибровочную группу, которая будет либо $\text{SO}(32)$, либо $E_8 \times E_8$. Как и в случае калибровочных теорий, где сокращение аномалий между кварками и лептонами играет центральную роль при построении модели, сокращение аномалий сыграет важную роль в фиксации калибровочной группы теории струн.

§ 9.2. АНОМАЛИИ И ФЕЙНМАНОВСКИЕ ДИАГРАММЫ

Аномалии имеют очень глубокое происхождение [2–4]. Они проливают свет на динамику квантовой теории поля.

Аномалии возникают в том случае, когда симметрии классического действия не сохраняются на квантовом уровне. Классические симметрии не сохраняются, вообще говоря, после процедуры регуляризации квантовой теории. Существует два типа аномалий: глобальные и локальные.

Глобальные аномалии в калибровочных теориях на самом деле желательны. Например, глобальная аномалия масштабной инвариантности в КХД с безмассовыми кварками может порождать кварковые массы. Поэтому нарушение глобальной масштабной инвариантности из-за аномалий может быть причиной возникновения кварковых масс. Другая глобальная аномалия может быть ответственна за нарушение $U(N)_R \times U(N)_L$ -инвариантности кварковых моделей КХД до $SU(N) \times SU(N)$, которая желательна с точки зрения феноменологии. Для модели суперструн глобальные аномалии, напротив, нежелательны. Например, если глобальные аномалии нарушают модулярную инвариантность многопетлевых амплитуд, это может иметь катастрофические последствия для внутренней согласованности и конечности теории. К счастью, можно показать, что глобальные аномалии, нарушающие модулярную инвариантность, отсутствуют в теории струн [5].

Локальные же аномалии и в калибровочной теории, и в теории суперструн должны быть устранены любой ценой, в противном случае эти теории не имеют смысла. Например, устранение киральных аномалий является одним из основных способов построения новых моделей кварков и лептонов. В стандартной модели кварки и лептоны имеют как раз такие киральности, которые необходимы для сокращения киральной аномалии. В теории суперструн локальные аномалии конформной инвариантности и киральной симметрии также должны быть устранены. Условие сокращения конформной аномалии фиксирует размерность пространства–времени, а также набор фермионов теории, тогда как требование сокращения киральных аномалий зафиксировывает калибровочную группу теории.

Мы начнем обслуживание с исследования простейшей локальной аномалии, киральной аномалии, которая появляется вследствие того, что процесс регуляризации (такой, как регуляризация Паули–Вилларса или размерная регуляризация) не сохраняет киральной инвариантности. А именно, если мы имеем теорию с инвариантностью вида

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \epsilon} \psi, \quad (9.2.1)$$

то из (1.9.8) следует ожидать сохранения на классическом уровне кирального тока

$$\partial_\mu J^{\mu,5} = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi) = 0. \quad (9.2.2)$$

Однако вследствие квантования возникают осложнения. Метод

Паули-Вилларса, например, вводит мнимую массивную частицу в теорию для того, чтобы сделать все фейнмановские диаграммы сходящимися:

$$\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + M^2} = \frac{M^2 - m^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2)}. \quad (9.2.3)$$

Пропагаторы, которые обычно сходятся как p^{-2} , теперь сходятся как p^{-4} , что делает все расходящиеся фейнмановские диаграммы сходящимися. Раз мы получили конечную S -матрицу, то мы полагаем, что масса M мнимой частицы стремится к бесконечности. Однако массовые члены явно нарушают киральную инвариантность:

$$\delta(\bar{\psi} \psi) \neq 0. \quad (9.2.4)$$

Таким образом, метод регуляризации Паули-Вилларса не сохраняет этой симметрии, и мы ожидаем, что дивергенция аксиального тока отлична от нуля. Мы не можем обеспечить сохранение тока и регуляризацию фейнмановских амплитуд одновременно. Но поскольку регуляризация теории более важна (иначе теории просто нет), это означает, что мы должны пожертвовать сохранением тока.

Аналогично, размерная регуляризация делает невозможным сохранение киральной инвариантности. Размерная регуляризация предполагает, что можно аналитически продолжить фейнмановские диаграммы на пространство комплексной размерности заменой

$$\sum_{\mu=0}^3 p_{\mu}^2 \rightarrow \sum_{A=0}^{D-1} p_A^2, \quad \int d^4 p \rightarrow \int d^D p. \quad (9.2.5)$$

Нетрудно обобщить след дираковских матриц для взаимодействия векторных частиц, но это нарушает вид взаимодействия аксиальных векторов, так как в пространстве комплексной размерности нет аналога матрицы γ_5 :

$$\gamma_5 \nrightarrow \Gamma_{D+1}. \quad (9.2.6)$$

Метод размерной регуляризации не работает для киральных фермионов, потому что в этой регуляризации невозможно обобщить матрицу γ_5 на комплексную размерность.

Мы ожидаем поэтому, что дивергенция аксиального тока не сохраняется. Действительно, диаграмма «вектор-вектор-аксиальный вектор» (ВВА) нарушает сохранение аксиального тока. Треугольная диаграмма требует аккуратной регуляризации, так как каждая внутренняя фермионная линия, циркулирующая внутри треугольной диаграммы, сходится только как p^{-1} , что недостаточно для того, чтобы дать нам сходящийся граф, и, следовательно, приводит к неоднозначности.

Тщательно регуляризуя треугольную диаграмму, мы получаем в итоге

$$\partial_\mu J^{\mu,5} = \frac{-1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\gamma\delta\rho} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\delta\rho}), \quad (9.2.7)$$

что представляет собой топологический член или полную производную от тока, заданного формулой

$$-\frac{1}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma). \quad (9.2.8)$$

Этот результат для треугольной диаграммы получается в четырех измерениях. Однако вывод аномалии может также быть обобщен на D -мерные киральные теории, в которых треугольный граф заменяется многоугольным графом. Начнем с записи фейнмановских правил для внешних векторных и аксиально-векторных частиц, взаимодействующих с фермионом спина $1/2$. Возьмем $N-1$ внешнюю векторную частицу, одну аксиально-векторную частицу с внешним импульсом k_i^μ , поляризацией $\zeta_i^\mu(k)$ и изотопическими индексами a, b, c , взаимодействующую с фермионом, имеющим внешний импульс p_i^μ . Фейнмановские правила заключаются в сопоставлении

$$\begin{aligned} \text{пропагатор} &\rightarrow \frac{\Gamma \cdot p}{p^2} \delta_{ab}, \\ \text{вершина (вектор)} &\rightarrow \Gamma \cdot \zeta \lambda_a, \\ \text{вершина (аксиальный вектор)} &\rightarrow \Gamma_{D+1} \Gamma \cdot \zeta \lambda_a. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Мы предполагаем, что внешние частицы находятся на массовой поверхности, что векторы поляризации обращаются в нуль при свертке с внешними импульсами и что сумма внешних импульсов равна нулю, так что

$$\begin{aligned} k_{i,\mu}^2 &= 0, \\ k_i \cdot \zeta_i(k_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N k_i &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

Тогда фейнмановские правила для многоугольного графа дают

$$G \sim \int d^D p \text{Tr}(\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_N}) \text{Tr} \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma \cdot p_i \Gamma \cdot \zeta_i}{p_i^2} \frac{1}{2} [1 + \Gamma_{D+1}] \right\}. \quad (9.2.11)$$

Выделим наиболее сильно расходящуюся часть этой диаграммы. Отметим, что след по членам, содержащим Γ_{D+1} , может быть вычислен в явном виде:

$$\text{Tr}(\Gamma_{\mu_1} \Gamma_{\mu_2} \dots \Gamma_{\mu_D} \Gamma_{D+1}) \sim \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}. \quad (9.2.12)$$

Заметим, что антисимметричная матрица возникает только тогда, когда мы берем след от D Γ -матриц, умноженных на Γ_{D+1} . Перегруппируем различные содержащие импульсы множители, которые теперь должны быть свернуты в антисимметричную матрицу. Заметим, что сохранение импульса редуцирует число независимых импульсных коэффициентов до одного. В общем случае остаются только члены вида

$$G \sim \int d^D p \operatorname{Tr}(\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_N}) \prod_{i=1}^N \frac{1}{p_i^2} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} \zeta^{\mu_1} \zeta^{\mu_2} \dots k^{\mu_D}. \quad (9.2.13)$$

Теперь мы имеем прямую корреляцию между числом внешних линий и числом измерений пространства-времени, так как антисимметричный тензор имеет ранг D . Таким образом, для ведущего расходящегося члена должно выполняться соотношение

$$D = 2N - 2. \quad (9.2.14)$$

В четырех измерениях это означает, что треугольная диаграмма расходится. В 10 измерениях это означает, что *шестиугольный граф* расходится. Отметим также, что (9.2.14) дает явное выражение для аномальных членов. Внешние импульсы $k_{i,\mu}$ могут быть заменены производными ∂_μ , тензор поляризации ζ^{μ_i} может быть заменен полем A^μ , так что можно заменить свертки с $k_{[\mu} \zeta_{\nu]}$ сверткой с тензором Янга-Миллса $F_{\mu\nu}$. Следовательно, после преобразования Фурье мы получим соответствие:

$$\begin{aligned} k_\mu &\rightarrow \partial_\mu, \\ \zeta_\mu &\rightarrow A_\mu, \\ k_{[\mu} \zeta_{\nu]} &\rightarrow F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Собирая все множители, получаем [6-8]

$$\partial_\mu J^{\mu,5} = \frac{i^{(1/2)D}}{2^{D-1} \pi^{(1/2)D} \left(\frac{1}{2}D\right)!} \operatorname{Tr} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-1} \mu_D}. \quad (9.2.16)$$

Аналогично, в теории гравитации, взаимодействующей с киральными фермионами, также существует аномалия, которая по-прежнему пропорциональна полной производной или топологическому члену. Если мы присоединим внешние гравитонные линии к распространяющимся во внутренней области однопетлевого графа киральным фермионам, то мы можем повторить наш предыдущий анализ, использующий фейнмановские диаграммы. Главное отличие определяется тремя факторами:

- (1) Теперь мы должны включить взаимодействие фермионов с тензором энергии-импульса, а не с киральным током. Взаимодействие гравитонов с фермионами происходит через тетрады (поскольку $GL(N)$ не имеет конечномерных спинорных представлений; см. приложение).

- (2) Внешний вектор поляризации ζ_μ заменяется при этом на внешний тензор поляризации $\zeta_{\mu\nu}$.
- (3) Вертексные функции содержат теперь тензорные компоненты более высокой степени.

Однако главная расходящаяся часть диаграммы по-прежнему содержит тензор $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}$, свернутый с внешними импульсами k_i и внешними тензорами поляризации $\zeta_{\mu\nu}$. Как и прежде, нетрудно перегруппировать все множители и показать, что ведущая расходимость в x -пространстве может быть собрана в тензоры кривизны. Например, для взаимодействия аксиального вектора и двух тензоров энергии-импульса в четырех измерениях получаем

$$D_\mu J^{\mu,5} = -\frac{1}{768\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\sigma\tau} R_{\alpha\beta}^{\sigma\tau}. \quad (9.2.17)$$

В теории гравитации в двух и четырех измерениях имеются два хорошо известных выражения, являющиеся полными производными. Возьмем знаменитое тождество Гаусса-Бонне

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} R = 2 - 2g, \quad (9.2.18)$$

которое мы докажем ниже. Здесь $\chi(M)$ — эйлерова характеристика двумерного многообразия M , R — свернутый тензор кривизны и g — род замкнутого многообразия¹⁾ (т. е. число дырок или ручек). Это тождество возможно в силу того, что скалярная кривизна в двух измерениях является полной производной.

В четырех измерениях при некоторых определенных значениях чисел a , b и c мы имеем следующее тождество:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}) = a\sqrt{g} R_{\mu\nu\sigma\rho}^2 + b\sqrt{g} R_{\mu\nu}^2 + c\sqrt{g} R^2 \\ = \text{полная производная.} \quad ; \quad (9.2.19)$$

Обычно интеграл от полной производной равен нулю. Однако это неверно, если многообразие имеет границу или нетривиальную топологию. В этом случае интеграл от полной производной зависит от границы и топологии. Так, интеграл от свернутого тензора кривизны двумерного замкнутого многообразия является линейной функцией рода поверхности, т. е. числа дырок на поверхности, являющегося топологическим числом. В этом и заключается связь между аномалиями, полными производными и топологическими числами.

Как калибровочные, так и гравитационные аномалии могут быть получены из фейнмановских диаграмм. Однако для более высоких размерностей это становится крайне затруднительным. Для более высоких размерностей число индексов очень быстро растет. Вместо того

¹⁾ Точнее будет сказать — род римановой поверхности. В (9.2.18) одной буквой g обозначен детерминант метрики и род римановой поверхности. — *Прим. перев.*

чтобы обобщать эти результаты на высокие размерности, мы получим нужные нам выражения с помощью функционального формализма, не апеллируя к фейнмановским диаграммам.

§ 9.3. АНОМАЛИИ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

До сих пор наше описание аномалий было фрагментарным. Однако нам хотелось бы иметь систематический метод, позволяющий вычислять все такие полные производные для произвольной калибровочной группы и произвольной размерности.

Начнем с функционального интеграла для взаимодействия фермионов с внешними векторными или гравитационными частицами:

$$\int D\psi D\bar{\psi} e^{-S} = \int D\psi D\bar{\psi} \exp - \left\{ \int d^D x \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{D+1}) \hat{D} \psi \right\}. \quad (9.3.1)$$

Здесь ковариантная производная описывает взаимодействие фермионов с внешними янг-миллсовским и гравитационным полями:

$$\hat{D} = \Gamma^\mu (\partial_\mu + i\lambda^a A_\mu^a + \omega_\mu^{ab} M^{ab}). \quad (9.3.2)$$

Здесь Γ^μ – гамма-матрицы в D измерениях, умноженные на реперное (тетрадное) поле, а M^{ab} – генераторы группы Лоренца $O(D-1,1)$.

Заметим, что функциональный интеграл квадратичен по фермионным полям, поэтому этот интеграл является гауссовым. Используя изложенные в приложении результаты об интегрировании по грасмановым переменным, мы можем выполнить интегрирование и получить детерминант. Теперь можно внести логарифм от детерминанта под знак экспоненты и получить $\Gamma(A, g)$, зависящее от калибровочных полей явным образом. Взяв гауссов интеграл (9.3.1), мы получаем следующий детерминант:

$$e^{i\Gamma(A, g)} = \det \left\{ \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{D+1}) \hat{D} \right\}. \quad (9.3.3)$$

Здесь A и g – янг-миллсовское и гравитационное поля. Используем теперь соотношение

$$\det M = e^{\text{Tr} \ln M}. \quad (9.3.4)$$

(Оно наиболее легко доказывается при помощи преобразования подобия, диагонализующего матрицу M . При этом M становится диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали. После этого доказательство тождества становится тривиальным. И наконец, выполняя обратное преобразование подобия, мы восстанавливаем матрицу M .) Таким образом, можно взять \ln от (9.3.3):

$$\begin{aligned} \Gamma(A, g) &= \ln \left\{ \det \left[\frac{1}{2} (1 + \Gamma_{D+1}) \hat{D} \right] \right\} \\ &= \text{Tr} \ln \left\{ \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{D+1}) \hat{D} \right\}. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Вычислим теперь калибровочную вариацию этого функционала. После калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - D_\mu \varepsilon \quad (9.3.6)$$

и после разложения в ряд Тейлора по ε мы находим, что функционал преобразуется так:

$$\begin{aligned} \Gamma(A'_\mu) &= \Gamma(A_\mu - D_\mu \varepsilon) \\ &= \Gamma(A_\mu) - \int d^D x \operatorname{Tr} D_\mu \varepsilon \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \dots \\ &= \Gamma(A_\mu) + \int d^D x \operatorname{Tr} \varepsilon D_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \dots \\ &= \Gamma(A_\mu) + \int d^D x \operatorname{Tr} \varepsilon D_\mu J^{\mu,5} + \dots \end{aligned} \quad (9.3.7)$$

В последнем выражении для $\Gamma(A'_\mu)$ мы воспользовались тем, что генерируемый калибровочным преобразованием ток определяется так:

$$J_\mu = \frac{\delta \Gamma(A)}{\delta A_\mu}. \quad (9.3.8)$$

Появляющееся в (9.2.13) G можно переписать на функциональном языке:

$$G = D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma(A_\mu). \quad (9.3.9)$$

Тогда

$$D_\mu J^\mu = G. \quad (9.3.10)$$

Значит, несохранение аксиального тока означает отличие G от нуля.

Аномалия должна также удовлетворять условию самосогласованности, т.е. условию Весса–Зумино [9]. Заметим, что генератор калибровочного преобразования равен

$$\delta_\Lambda = \frac{\delta}{\delta \Gamma} = D_\mu \frac{\cdot \delta}{\delta A_\mu}. \quad (9.3.11)$$

После этого мы получаем новый способ записи G :

$$G(\Lambda) = \delta_\Lambda \Gamma(A_\mu). \quad (9.3.12)$$

Но также известно, что генераторы локальных калибровочных преобразований образуют замкнутую алгебру:

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] = \delta_{\Lambda_3}. \quad (9.3.13)$$

Это означает, что G должны удовлетворять уравнению связи

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) - (1 \leftrightarrow 2) = G(\Lambda_3). \quad (9.3.14)$$

Если записать G как вариацию $\Gamma(A_\mu)$, то очевидно, что условие согласованности Весса–Зумино удовлетворяется. Но если мы запишем

Запишем

$$G = \int_M \omega_D. \quad (9.4.9)$$

Используя теорему Стокса, можно показать, что

$$G = \int_M \omega_D = \int_{\Sigma} d \omega_D = \delta_{\Lambda} \int_{\Sigma} \omega_{D+1}, \quad (9.4.10)$$

где многообразия M и Σ связаны следующим образом: $M = \partial \Sigma$.

Это и есть нужный нам результат. Мы сейчас показали, что аномальный член G является калибровочной вариацией другой формы. Таким образом, G автоматически удовлетворяет условию согласованности Весса-Зумино, поскольку

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) = \delta_{\Lambda_1} \delta_{\Lambda_2} \int \omega_{D+1}. \quad (9.4.11)$$

Мы будем использовать эту конструкцию, когда начнем сокращать аномалии в теории суперструн.

Вооружившись теорией дифференциальных форм, можно построить характеристические полиномы.

Мы найдем четыре основных характеристических класса:

- (1) классы Черна;
- (2) классы Понтрягина;
- (3) классы Эйлера;
- (4) классы Штифеля-Уитни.

Ограничимся формой кривизны Ω , принимающей значение в алгебре $GL(k, \mathbb{C})$, т. е. произвольной $(k \times k)$ -матрицей с комплексными элементами. Определим полную форму Черна для этой алгебры как

$$c(\Omega) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi} \Omega\right) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots, \quad (9.4.12)$$

где мы использовали разложение по степеням Ω . Обрывающееся в конечном счете разложение имеет следующие слагаемые:

$$c_0 = 1,$$

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} \Omega,$$

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) - \text{Tr}(\Omega) \wedge \text{Tr}(\Omega)),$$

$$c_3 = \frac{i}{48\pi^2} (-2 \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega \wedge \Omega) + 3 \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) \wedge \text{Tr} \Omega - \text{Tr} \Omega \wedge \text{Tr} \Omega \wedge \text{Tr} \Omega),$$

...

$$c_n = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \det \Omega, \quad (9.4.13)$$

где

$$dc_j(\Omega) = 0. \quad (9.4.14)$$

Заметим, что ряд в конечном счете обрывается, потому что Ω в достаточно высокой степени равно нулю в силу того, что dx^μ являются образующими грассмановой алгебры. В дополнение к классам Черна c_i можно также ввести *характер Черна*

$$\text{Tr } e^\Omega. \quad (9.4.15)$$

Всегда можно диагонализировать матрицу Ω так, что на ее диагонали будут стоять собственные значения x_i . То есть всегда можно найти матрицу S , такую что

$$S\Omega S^{-1} = (-2\pi i) \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (9.4.16)$$

После диагонализации $c_i(\Omega)$ и $c(\Omega)$ приобретают простой вид:

$$c(\Omega) = \prod_{j=1}^n (1 + x_j). \quad (9.4.17)$$

Заметим, что в пространстве четырех измерений топологический инвариант для группы $SU(2)$ имеет вид

$$c(M) = \det \left(1 + \frac{1}{4\pi} \lambda_a F^a\right) = 1 + \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F). \quad (9.4.18)$$

Кроме классов Черна существуют тесно связанные с ними *классы Понтрягина*. Пусть Ω принадлежит алгебре Ли $\mathcal{O}(k)$; тогда определим форму Понтрягина

$$p(\Omega) = \det \left(I - \frac{1}{2\pi} \Omega\right) = 1 + p_1 + p_2 + \dots \quad (9.4.19)$$

Класс Эйлера, однако, определяется несколько иначе. Его определение основывается не на детерминанте, как в случае классов Черна и Понтрягина, а на пфаффиане. Рассмотрим два-форму

$$\alpha = \frac{1}{2} a_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Возьмем ее в r -ю степень:

$$\alpha^r = r! (2\pi)^r e(\alpha) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{2r}. \quad (9.4.20)$$

Заметим, что $\alpha = (\alpha_{ij})$ является антисимметричной матрицей. Мы не можем диагонализировать антисимметричную матрицу так, чтобы ее диагональные элементы совпадали с ее собственными значениями x_i . Однако ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & -x_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (9.4.21)$$

Инвариант $e(\alpha)$, который строится по антисимметричной матрице α , называется пфаффианом. В терминах собственных значений x_i пфаффиан равен

$$e(M) = x_1 x_2 \dots x_{2r}. \quad (9.4.22)$$

Легко видеть, что пфаффиан $e(M)$ является квадратным корнем из старшего класса Понтрягина:

$$p(M) = x_1^2 x_2^2 \dots x_{2r}^2 = e^2(M). \quad (9.4.23)$$

Приведем некоторые примеры классов Эйлера:

$$D = 2: \quad e(M) = \frac{1}{2\pi} R_{12},$$

$$D = 4: \quad e(M) = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}. \quad (9.4.24)$$

Они представляют собой не что иное, как упоминавшиеся ранее в (9.2.18) и (9.2.19) тождества, причем

$$\chi(M) = \int_M e(M). \quad (9.4.25)$$

В заключение выпишем некоторые другие представляющие интерес характеристические полиномы. Если через x_i обозначить собственные значения формы кривизны, то

$$\text{Класс Тодда} = td(M) = \prod_i \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}},$$

$$\text{Класс Хирцебрука} = L(M) = \prod_i \frac{x_i}{\text{th } x_i},$$

$$\hat{A}\text{-полином} = \hat{A}(M) = \prod_i \frac{\frac{1}{2}x_i}{\text{sh } \frac{1}{2}x_i}. \quad (9.4.26)$$

Мы увидим, что \hat{A} -полином, например, играет решающую роль в

вычислении аномалии для взаимодействующих с гравитацией частиц спина 1/2.

Наконец, можно определить классы Штифеля–Уитни, которые, к сожалению, не связаны с какой-либо формой кривизны. В то же время классы Штифеля–Уитни необходимы, чтобы определить, является ли данное многообразие спинорным многообразием, т.е. допускающим введение спиноров. Многие многообразия, которые, как кажется на первый взгляд, допускают спиноры, на самом деле не являются спинорными многообразиями. Приведем важные факты, касающиеся связи свойств многообразий с индексами классов Штифеля–Уитни. Обращение в нуль индекса первого класса Штифеля–Уитни означает, что многообразие является ориентируемым:

$$\omega_1 = 0 \leftrightarrow M \text{ ориентируемо.} \quad (9.4.27)$$

Наиболее важный факт заключается в том, что многообразие M допускает спиноры, если индекс его второго класса Штифеля–Уитни равен нулю:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \rightarrow M \text{ является спинорным многообразием.} \quad (9.4.28)$$

§ 9.5. ИНДЕКС ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Теперь, когда мы перечислили некоторые важные свойства характеристических классов, покажем, что интегралы от характеристических классов приводят к элегантным теоремам об индексе. Одной из наиболее важных будет теорема об индексе оператора Дирака, определенном на спинорном многообразии. Другие инварианты на самом деле можно выразить в терминах индекса оператора Дирака. На N -мерном спинорном многообразии можно задать уравнение Дирака

$$\Gamma^A D_A \psi = \hat{D} \psi = 0, \quad (9.5.1)$$

где Γ^A – матрицы Дирака (умноженные на тетраду). Изучим оператор \hat{D} , заданный формулой (9.3.2), и его собственные значения:

$$i \hat{D} \psi_n = \lambda_n \psi_n. \quad (9.5.2)$$

Ядро оператора Дирака \hat{D} состоит по определению из тех решений, которые переводятся оператором в нуль, т.е. соответствуют нулевому собственному значению.

Для четномерных многообразий пространство спиноров делится пополам в зависимости от собственного значения (± 1) оператора Γ_{D+1} :

$$\Gamma_{D+1} \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}. \quad (9.5.3)$$

Мы назовем такие решения решениями положительной и отрицательной киральности. Вообще говоря, для ненулевых собственных значений λ_n киральные решения всегда встречаются парами. Это связано с тем, что собственное значение λ_n имитирует массовый член в уравнении Дирака, а массивные фермионные состояния не могут быть расщеплены на два

вейлевских, которые всегда безмассовы. Но в случае нулевого собственного значения киральные решения не обязаны встречаться парами. Мы можем иметь неравное число положительных и отрицательных киральных состояний для фермионов с нулевым собственным значением.

Определим n_{\pm} как число независимых решений положительной (отрицательной) киральности с нулевым собственным значением. Определим также индекс оператора Дирака как разность между числом независимых нулевых мод положительной и отрицательной киральности:

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = n_{+} - n_{-}. \quad (9.5.4)$$

Необходимо отметить, что это число является топологическим числом, т. е. оно инвариантно относительно непрерывных преобразований многообразия, не меняющих его топологии. Индекс оператора Дирака является топологическим инвариантом, поскольку хотя после преобразования многообразия и происходит переход между фермионными состояниями с нулевым и ненулевым собственным значением, *но только пары фермионов с ненулевым собственным значением могут переходить в состояния с нулевым собственным значением или возникать из них.* Это связано с тем, что для того, чтобы стать массивным, каждое киральное состояние должно найти себе пару. Таким образом, изменение индекса происходит только за счет пар, но каждая пара дает нулевой вклад в индекс. Следовательно, индекс должен быть топологическим инвариантом (см. рис. 9.2). Например, если мы имеем N пар фермионов, переходящих в состояние с нулевым собственным значением, то

$$\delta \text{ Индекс } (\hat{D}) = \delta n_{+} - \delta n_{-} = N - N = 0. \quad (9.5.5)$$

Существуют различные способы записи индекса оператора Дирака. Поскольку ядро оператора определено как множество состояний, которые он зануляет, можно также записать

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \dim \ker (\hat{D}_{+}) - \dim \ker (\hat{D}_{-}), \quad (9.5.6)$$

где оператор Дирака расщеплен на части положительной и отрица-

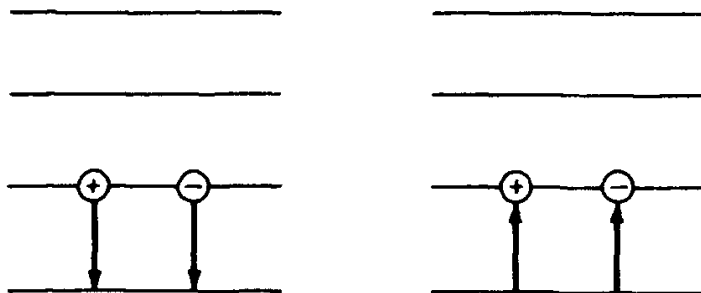


Рис. 9.2. Парное испускание или поглощение в основном состоянии. Фермионы могут переходить в основное состояние или покидать его только парами противоположной киральности. Таким образом, полная разность между положительными и отрицательными вакуумными киральными состояниями всегда остается неизменной. Эта постоянная называется индексом оператора Дирака.

тельной киральности.

Другим способом записи формулы индекса является

$$\begin{aligned}
 \text{Индекс } (\hat{D}) &= \sum_n \langle n | \Gamma_{D+1} | n \rangle \\
 &= \text{Tr}(\Gamma_{D+1}) \\
 &= \sum_+ 1 - \sum_- 1 \\
 &= n_+ - n_-.
 \end{aligned} \tag{9.5.7}$$

Заметим, что каждое состояние положительной киральности дает вклад $+1$ в сумму, в то время как каждое состояние отрицательной киральности дает вклад -1 , так что в результате суммирования получаем индекс оператора Дирака.

Хотя приведенная выше формула достаточно элегантна, она требует осторожной регуляризации. Заметим, что небрежное определение индекса приводит к бессмысленным результатам:

$$\sum n_+ - \sum n_- = \infty - \infty. \tag{9.5.8}$$

Поскольку сокращение происходит уровень за уровнем, неправильно суммировать сначала по всем положительным уровням и затем вычитать сумму по всем отрицательным уровням. Суммы по всем положительным или по всем отрицательным уровням являются бесконечными. Только их разность конечна и корректно определена.

Разумным способом регуляризации индекса оператора Дирака является введение множителя, позволяющего находить потенциально расходящиеся суммы по всем положительным и отрицательным уровням отдельно. При этом сумма будет функцией от параметра. Приведем одно простое выражение для регуляризованного индекса оператора Дирака:

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \text{Tr}(\Gamma_{D+1} e^{-\beta D^2}). \tag{9.5.9}$$

Здесь β – произвольное положительное число, а D^2 – квадрат оператора Дирака. Поскольку мы берем след, можно диагонализировать квадрат оператора Дирака и переписать след через собственные значения λ_i оператора D^2 :

$$\begin{aligned}
 \text{Индекс } (\hat{D}) &= \sum_i \text{sign}(i) e^{-\beta \lambda_i}, \\
 \text{Знак } (i) &= \pm.
 \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

Поскольку ненулевые собственные значения соответствуют равному числу решений положительной и отрицательной киральности, они сокращаются, так как входят с различным $\text{sign}(i)$ и поэтому не дают вклада в сумму. Для нулевых собственных значений $\lambda_i = 0$ числа $n_{i\pm}$, однако, необязательно соответствуют числам состояний положительной и отрицательной киральности, и, следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
\text{Индекс}(\hat{D}) &= \sum_i \text{sign}(i) e^{-\beta\lambda_i} \\
&= \sum_{\lambda_i=0} [n_{i+} + (-n_{i-})] + \sum_{\lambda_i \neq 0} [e^{-\beta\lambda_i} - e^{-\beta\lambda_i}] \\
&= n_+ - n_-.
\end{aligned} \tag{9.5.11}$$

Короче говоря, фермионы могут переходить в состояние с нулевым собственным значением и покидать его только киральными парами. Фермионы с ненулевыми собственными значениями всегда встречаются парами, и поэтому их вклады в индекс взаимно сокращаются. Следовательно, их присутствие не влияет на разность между числом положительных и отрицательных киральных состояний. Таким образом, фермионные состояния с ненулевыми собственными значениями вообще не влияют на индекс.

Этот вопрос представляет не только академический интерес, поскольку имеет прямое отношение к аномалиям. Например, мы знаем; что киральный ток может быть записан как

$$J_\mu^{5a} = \bar{\psi} \lambda^a \gamma_5 \gamma_\mu \psi. \tag{9.5.12}$$

Наивно можно ожидать, что этот ток сохраняется в силу уравнений движения. Ковариантная дивергенция (изотопические индексы опускаем) равна

$$\begin{aligned}
D_\mu J^{\mu,5} &= \partial_\mu J^{\mu,5} + [A_\mu, J^{\mu,5}] \\
&= \bar{\psi} \gamma_5 \hat{D} \psi - (D \bar{\psi}) \gamma_5 \psi.
\end{aligned} \tag{9.5.13}$$

Обычно это выражение в точности равно нулю, поскольку $\gamma^\mu D_\mu \psi = 0$. Однако мы должны быть осторожны при учете вклада вакуумного среднего от дивергенции тока, которое, вообще говоря, может быть ненулевым. Определим

$$\begin{aligned}
S_F(x, y) &= \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle, \\
\gamma^\mu D_\mu S_F(x, y) &= \delta(x, y)
\end{aligned} \tag{9.5.14}$$

и вычислим значение вакуумного среднего значения дивергенции тока. Получаем

$$\begin{aligned}
D_\mu J^{\mu 5} &= 2 \text{Tr}(\gamma_5 \hat{D} S_F(x, y))_{x=y} \\
&= 2 \text{Tr}(\gamma_5 \delta(x, x)).
\end{aligned} \tag{9.5.15}$$

Последнее выражение, содержащее $\delta(x, x)$, не имеет смысла до тех пор, пока мы не регуляризуем интеграл. Этого следовало ожидать, поскольку ранее мы видели, что треугольный граф расходился и требовал осторожной регуляризации.

Один из стандартных методов регуляризации называется методом ядра теплопроводности. Он заключается во введении сходящегося

множителя в выражение

$$D_{\mu} J^{\mu 5} = \lim_{\tau \rightarrow 0} 2 \operatorname{Tr} \{ \gamma_5 e^{-\tau D^2} \delta(x, y) \}_{x=y}, \quad (9.5.16)$$

где след берется по спинорам, так что выражение становится конечным (для положительных τ).

Заметим, что выражение для аномального члена в (9.5.16) в точности совпадает с определением индекса оператора Дирака. Таким образом, мы установили прямую связь между индексом оператора Дирака и несохранением аксиального тока.

Вообще говоря, след может быть вычислен явно. В конце этой главы мы покажем, что использование суперсимметрии позволяет дать наиболее простое и самое красивое доказательство теоремы Атьи–Зингера об индексе, что позволит нам вывести все известные теоремы об индексе в одну строчку.

Вычисляя этот след для произвольного спинорного многообразия и используя (9.4.19), (9.4.26), находим

$$\begin{aligned} \text{Индекс } (\hat{D}) \int_M \hat{A}(M) &= \\ &= 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760} (7 p_1^2 - 4 p_2) + \dots, \end{aligned}$$

где размерность пространства-времени кратна четырем. В четырех измерениях имеем

$$D = 4: \quad \text{Индекс } (\hat{D}) = -\frac{1}{24} p_1 = \frac{1}{24 \cdot 8 \pi^2} \int \operatorname{Tr}(R \wedge R). \quad (9.5.17)$$

В случае заданной фоновой метрики для взаимодействия спинора с полем Янга–Миллса индекс становится интегралом от произведения двух множителей-рода \hat{A} , происходящего из гравитационной части, и члена, происходящего из калибровочной части:

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \int_M \hat{A}(M) \operatorname{ch}(V). \quad (9.5.18)$$

Заметим, что эта формула определена для четных размерностей, не обязательно кратных четырем. Для $D = 2$ имеем

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \int_M c_1(V) = \frac{i}{2\pi} \int \operatorname{Tr} F. \quad (9.5.19)$$

Для $D = 4$ имеем

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \frac{\dim V}{24 \cdot 8 \pi^2} \int \operatorname{Tr}(R \wedge R) - \frac{1}{8 \pi^2} \int \operatorname{Tr}(F \wedge F). \quad (9.5.20)$$

Для интересующего нас случая шести измерений имеем

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \frac{1}{48 \cdot 8 \pi^3} \int \text{Tr}(F \wedge F \wedge F) - \frac{1}{8} \int \text{Tr}(F \wedge \text{Tr} R \wedge R). \quad (9.5.21)$$

§ 9.6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ АНОМАЛИИ

Теперь, когда мы описали мощный аппарат, с помощью которого можно построить любой инвариантный полином, используя метод характеристических классов, исследуем аномалии в теориях, в которых спиноры взаимодействуют с калибровочными и гравитационными полями. Эти аномалии вычислили Альварес-Гомэ и Виттен [12]. Начнем с обзора некоторых элементарных свойств спиноров.

В любой четной размерности $D = 2k$ матрицы Дирака являются комплексными 2^k -мерными матрицами. Эти матрицы Дирака расщепляются на представления положительной и отрицательной киральности. При нечетном числе измерений $D = 2k + 1$ матрицы Дирака также являются 2^k -мерными, но в этом случае существует только одно представление. При нечетном D нет состояний положительной и отрицательной киральности (и, следовательно, нет аномалии). Поэтому мы ограничимся рассмотрением четных размерностей.

Введем матрицу

$$\Gamma_{D+1} = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_{D-1}. \quad (9.6.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_{D+1}^2 &= +1, \quad \text{если } D = 4k + 2, \\ \Gamma_{D+1}^2 &= -1, \quad \text{если } D = 4k. \end{aligned} \quad (9.6.2)$$

Таким образом, Γ_{D+1} имеет собственные значения ± 1 , если $D = 4k + 2$. Следовательно, при *СТР*-преобразовании киральность любого выделенного состояния не меняется. Состояния положительной киральности отображаются в положительные и аналогично для состояний отрицательной киральности. Получаем

$$\text{СТР}(D = 4k + 2): \begin{cases} \psi_+ \leftrightarrow \psi_+, \\ \psi_- \leftrightarrow \psi_-. \end{cases} \quad (9.6.3)$$

Таким образом, числа состояний положительной и отрицательной киральности могут быть не равны, и, следовательно, возможно появление аномалии.

Однако Γ_{D+1} имеет собственные значения, равные $\pm i$, если $D = 4k$. Следовательно, при *СРТ*-преобразовании состояния с $\Gamma_{D+1} = i$ преобразуются в состояния с $\Gamma_{D+1} = -i$. Состояния положительной киральности превращаются в состояния отрицательной киральности и наоборот:

$$\text{СТР}(D = 4k): \begin{cases} \psi_+ \leftrightarrow \psi_-, \\ \psi_- \leftrightarrow \psi_+. \end{cases} \quad (9.6.4)$$

Если $D = 4k$, то состояния положительной и отрицательной киральности встречаются парами и гравитационное взаимодействие не приводит к аномалиям.

Вывод: гравитационные аномалии возможны только при $D = 4k + 2$.

Проанализируем теперь спиноры Дирака, Вейля и Майораны. Вейлевские фермионы могут быть определены в любой четной размерности. Это связано с тем, что оператор $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{D+1})$ может быть задан в любой четной размерности. Спиноры же Майораны могут существовать в $2, 3, 4 \pmod{8}$ измерениях. Состояния, которые одновременно являются майорановскими и вейлевскими, могут быть введены только в размерности $2 \pmod{8}$. Соберем результаты в таблицу:

Спинор	Размерность	
Дирака	Любые D	
Вейля	D четные	
Майораны	$D = 2, 3, 4 \pmod{8}$	(9.6.5)
Майораны-Вейля	$D = 2 \pmod{8}$	

Нас интересует частный случай фермионов Майораны-Вейля при $D = 10$.

В десяти измерениях три типа частиц во внутренних линиях диаграмм Фейнмана могут давать вклад в гравитационную аномалию:

- (1) фермионы спина $1/2$, взаимодействующие с N внешними гравитонами,
- (2) фермионы спина $3/2$, взаимодействующие с N внешними гравитонами, и
- (3) антисимметричные тензорные поля ранга 4, взаимодействующие с N гравитонами.

Нетрудно понять, почему спиноры должны давать вклад в аномалию. Их пропагаторы сходятся только как $1/p$, и обычные методы регуляризации, такие как методы Паули-Вилларса и метод размерной регуляризации, оказываются неприменимыми, потому что мы берем киральные поля с множителями γ_5 .

Автодуальный антисимметричный тензор четвертого ранга также должен рассматриваться, потому что для этого тензора не существует ковариантного действия. В силу того что он не может быть корректно определен ковариантно, а только в калибровке светового конуса, можно ожидать, что он содержит аномалию.

Начнем с частицы спина $1/2$, взаимодействующей с гравитоном:

$$S = \int d^D x e e^{\mu a} \bar{\psi} i \gamma^a D_\mu \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \right] \psi. \quad (9.6.6)$$

Разложим репер $e^{\mu a}$ в окрестности репера $\delta^{\mu a}$ плоского пространства:

$$e^{\mu a} = \delta^{\mu a} + h^{\mu a} + \dots \quad (9.6.7)$$

Нас интересует низший порядок взаимодействия поля репера (тетрады) со спинором:

$$L_1 = -\frac{1}{4} i h^{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu (1 - \gamma^5) \psi,$$

$$L_2 = -\frac{1}{16} (h_{\lambda\alpha} \partial_\mu h_{\nu\alpha}) \bar{\psi} \Gamma^{\mu\lambda\nu} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi. \quad (9.6.8)$$

Особенно нас интересует однопетлевая диаграмма с фермионами спина $1/2$ во внутренних линиях, взаимодействующими с внешними гравитационными линиями. Первый член дает стандартную трехчастичную вершинную функцию с фейнмановской вершиной, состоящей из одного импульса и комбинации тензоров поляризации. Второй член, однако, является четырехточечным фейнмановским графом, так называемой «чайкой».

На первый взгляд кажется безнадежным вычислять однопетлевую фермионную диаграмму с произвольным числом гравитонных линий, но существуют обходные пути сведения вычислений к достаточно простой задаче. В частности, используя соображения симметрии, находим, что эту задачу можно свести к задаче рассеяния заряженной скалярной частицы, взаимодействующей с постоянным электромагнитным полем. К счастью, задача описания заряженных скаляров в КЭД хорошо изучена и ее решение известно. Таким образом, ключом к решению проблемы является сведение сложной задачи к одной из уже известных.

Этот обходной маневр обобщается также для двух других случаев. Нас также интересует рассеяние внутренних полей спина $3/2$ и антисимметричных тензорных полей на внешних гравитонах. Соображения симметрии снова позволяют свести проблему к более простой. Циркулирующая во внутренних линиях частица спина $3/2$ может быть сведена к внутренней векторной частице, а антисимметричное тензорное поле может быть сведено к частице спина $1/2$:

$$\text{спин } \frac{1}{2} \text{ и спин } 2 \rightarrow \text{спин } 0 \text{ и спин } 1,$$

$$\text{спин } \frac{3}{2} \text{ и спин } 2 \rightarrow \text{спин } 1 \text{ и спин } 1,$$

$$\text{антисимметричный тензор и спин } 2 \rightarrow \text{спин } \frac{1}{2} \text{ и спин } 1. \quad (9.6.9)$$

Используя правила Фейнмана, нетрудно построить многоугольный граф. Известно, что амплитуда рассеяния частиц спина $1/2$ может быть представлена как

$$I_{1/2} = i 2^{2k+1} M^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) Z(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}), \quad (9.6.10)$$

где M – регуляризирующая масса, а

$$R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) = -\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_{4k+2}} p_{\mu_1}^{(1)} \varepsilon_{\mu_2}^{(1)} \dots p_{\mu_{4k+1}}^{(2k+1)} \varepsilon_{\mu_{4k+2}}^{(2k+1)} \quad (9.6.11)$$

и где тензор поляризации i -го внешнего гравитона может быть задан следующим образом:

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(i)} = \varepsilon_{\mu}^{(i)} \varepsilon_{\nu}^{(i)}. \quad (9.6.12)$$

Заметим, что в этом уравнении можно по-разному выбирать поляризацию i -го внешнего гравитона как произведения двух векторов поляризации частиц спина 1. Это решающее обстоятельство позволяет переписать исходную амплитуду рассеяния частиц спина 2 через амплитуду рассеяния частиц спина 1.

Теперь Z сведена к амплитуде рассеяния распространяющейся заряженной скалярной частицы (заряда $1/4$), взаимодействующей с постоянным электромагнитным полем, которая была вычислена Швингером [13] десять лет назад. Представим электромагнитное поле в виде

$$F_{\mu\nu} = -i \sum_{j=0}^{2k+1} (p_{\mu}^{(j)} \varepsilon_{\nu}^{(j)} - p_{\nu}^{(j)} \varepsilon_{\mu}^{(j)}). \quad (9.6.13)$$

Выше в (9.3.5) мы использовали функциональный формализм для того, чтобы показать, что аномальный член связан с логарифмом от детерминанта пропагатора. Мы показали, что

$$\Gamma(A_{\mu}) = \ln \det \left(\frac{1}{2} (1 + \Gamma_{D+1}) \hat{D} \right). \quad (9.6.14)$$

При этом Z равно

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\text{vol}} \ln \det (-D_{\mu} D^{\mu} + M^2) \\ &= \frac{-1}{\text{vol}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{s(D_{\mu} D^{\mu})} e^{-sM^2}. \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

Швингер доказал, что

$$\frac{1}{\text{vol}} \text{Tr} e^{sD_{\mu} D^{\mu}} = \frac{1}{4\pi} \frac{eB}{\text{sh } ebs}, \quad (9.6.16)$$

где B – эффективное магнитное поле для заданного электромагнитного поля, e – заряд. (Мы представим более общее доказательство этого утверждения в конце этой главы.) Антисимметрический тензор Максвел-

ла нельзя диагонализировать, но всегда можно привести к следующему виду:

$$F_{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & -x_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (9.6.17)$$

Тогда аномальный вклад равен

$$I_{1/2} = -i(2\pi)^{-2k-1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}x_i}. \quad (9.6.18)$$

Как и ожидалось, это выражение в точности совпадает с выражением для индекса оператора Дирака или интегралом от \hat{A} .

Затем мы должны вычислить аномалию для внутренней петли фермионов спина $3/2$, взаимодействующих с произвольным числом внешних гравитонов. И опять используются соображения симметрии для сведения задачи к более простой. Действие для частицы спина $3/2$, взаимодействующей с гравитацией, имеет вид

$$L = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma^5 \gamma_\nu D_\lambda \psi_\rho. \quad (9.6.19)$$

Заметим, что спинор ψ_μ имеет как векторный индекс μ , так и спинорный индекс, который мы опускаем. Как и выше, выпишем члены взаимодействия только низкой степени по полям $h_{\alpha\beta}$ и ψ_μ :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{i}{2} h^{\alpha\beta} \bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha \partial_\beta \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi^\mu, \\ L_2 &= \frac{i}{16} (h_\lambda^\alpha \partial_\sigma h_{\tau\alpha}) \bar{\psi}_\mu \Gamma^{\sigma\lambda\tau} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi^\mu, \\ L_3 &= \frac{i}{2} (\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu}) \bar{\psi}^\sigma \gamma^\nu \psi^\alpha. \end{aligned} \quad (9.6.20)$$

И снова общий вид однопетлевой амплитуды можно записать в форме

$$I_{3/2} = 2^{2k+1} i M^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) Z(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}), \quad (9.6.21)$$

где Z представляет амплитуду рассеяния внутреннего заряженного векторного мезона, взаимодействующего с постоянным электрическим полем. Выпишем эффективную теорию заряженных векторных мезонов, воспроизводящую Z до одной петли:

$$Z = \operatorname{Tr} \ln H = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \operatorname{Tr} e^{-sH}, \quad (9.6.22)$$

где

$$H\varphi_\mu = -(\partial_\sigma + \frac{1}{4}iA_\sigma)^2 \varphi_\mu + \frac{1}{2}iF_{\mu\nu}\varphi^\nu. \quad (9.6.23)$$

Все определители могут быть вычислены явно, и мы получаем

$$I_{3/2} = -i(2\pi)^{-2k-1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}x_i} \sum_{j=0}^{2k+1} (2\operatorname{ch}x_j - 1). \quad (9.6.24)$$

Последний аномальный член, который мы хотим вычислить, происходит из вклада антисимметричного тензорного поля. Следует быть осторожным при вычислении аномалии для тензорной частицы, поскольку для этой частицы не определено ковариантное действие. Итак, рассмотрим антисимметричное тензорное поле в $4k+2$ измерениях и его кривизну:

$$F_{\mu_1 \dots \mu_{2k+1}} = \partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{2k+1}} + \text{циклические перестановки}. \quad (9.6.25)$$

Если мы наложим на этот тензор условия автодуальности

$$F_{\mu_1 \dots \mu_{2k+1}} = \frac{1}{(2k+1)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2k+1} \mu_{2k+2} \dots \mu_{4k+2}} F_{\mu_{2k+2} \dots \mu_{4k+2}}, \quad (9.6.26)$$

то возникнут затруднения. Можно показать, что в силу тождеств Бьянки условия автодуальности эквивалентны уравнениям движения. Другими словами, обычным уравнениям движения, следующим из стандартного действия

$$L \sim F_{\mu_1 \dots \mu_{2k+1}}^2, \quad (9.6.27)$$

удовлетворяют не только автодуальные, но и антиавтодуальные поля. В этом и заключается проблема. Можно доказать, что такого ковариантного действия, для которого распространяющимися будут только автодуальные поля, не существует [14].

Однако для вычисления амплитуды рассеяния можно действовать обходным путем. Хотя для тензорной частицы и не существует ковариантного действия, правила Фейнмана для нее могут быть записаны ковариантно. Трюк заключается в использовании спинорного поля, имитирующего антисимметричное тензорное поле.

Тензор энергии-импульса для этого поля имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{(2k)!} F_{\mu a_1 \dots a_{2k}} F_{\nu}^{a_1 \dots a_{2k}} - \frac{1}{2(2k+1)!} g_{\mu\nu} F_{a_1 \dots a_{2k+1}}^2. \quad (9.6.28)$$

К счастью, все фейнмановские правила для антисимметричного тензора F известны, даже если действия для него не существует. Запишем теперь этот антисимметричный тензор в терминах полей. Положим по определению

$$\varphi_{\alpha\beta} = 2^{-N/4} \sum_{n=0}^N \text{Tr} (\Gamma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n})_{\alpha\beta} F^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}. \quad (9.6.29)$$

Отсюда получаем

$$F_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = 2^{-N/4} (\Gamma_{\mu_n\dots\mu_1})_{\beta\alpha} \varphi^{\alpha\beta}. \quad (9.6.30)$$

Использование этого вложения выгодно тем, что с фермионными полями работать намного легче, чем с антисимметричными тензорами. Двухточечная функция имеет вид

$$\langle \varphi_{\alpha\beta}(q) \varphi_{\gamma\delta}(-q) \rangle = (2q^2)^{-1} ((\gamma^5 \gamma^\mu g_\mu)_{\alpha\gamma} (\gamma^5 \gamma^\mu g_\mu)_{\beta\delta} + q^2 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}). \quad (9.6.31)$$

Окончательно амплитуда может быть записана в виде

$$I_A = \frac{-i}{2} M^2 2^{2k+1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) Z, \quad (9.6.32)$$

где Z представляет взаимодействие заряженного скаляра с внешними фотонами:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu D_\mu + iM) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sM^2} \text{Tr} \exp(-s(-D_\mu D^\mu + i\Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})). \end{aligned} \quad (9.6.33)$$

Известно, однако, что

$$\text{Tr} e^{-is\Gamma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}} = 2^{2k+1} \prod_{i=1}^{2k+1} \text{ch} \frac{1}{2} x_i. \quad (9.6.34)$$

Окончательное выражение для вклада антисимметричного тензорного поля в аномалию имеет вид

$$I_A = \frac{1}{4} i 2^{2k+1} 2\pi^{-2k-1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2} x_i}{\text{sh} \frac{1}{2} x_i}. \quad (9.6.35)$$

Конечно, мы также должны вычислить вклад в аномалию внешних калибровочных полей. Это вычисление полностью идентично тому, которое мы уже провели, только теперь мы должны брать n калибровочных частиц, соответствующих n генераторам калибровочной симметрии.

Соберем (9.6.18), (9.6.24) и (9.6.35) вместе, включая вклад от смешанных аномалий из калибровочного сектора. Запишем для удобства полный вклад в аномалию в терминах I_{D+2} , что является, как показано в (9.4.7), подходящей формой для записи аномалии, поскольку можно показать, что в таком виде аномальный член явно удовлетворяет условию согласованности Весса–Зумино. Имеем

$$\begin{aligned}
I_{12} = & \frac{-1}{720} \text{Tr } F^6 + \frac{1}{24 \cdot 48} \text{Tr } F^4 \text{Tr } R^2 \\
& - \frac{1}{256} \text{Tr } F^2 \left(\frac{1}{45} \text{Tr } R^4 + \frac{1}{36} (\text{Tr } R^2)^2 \right) \\
& + \frac{(n-496)}{64} \left[\frac{1}{2 \cdot 2835} \text{Tr } R^6 + \frac{1}{4 \cdot 1080} \text{Tr } R^2 \text{Tr } R^4 \right. \\
& \left. + \frac{1}{8 \cdot 1296} (\text{Tr } R^2)^3 \right] + \frac{1}{384} \text{Tr } R^2 \text{Tr } R^4 + \frac{1}{1536} (\text{Tr } R^2)^3,
\end{aligned} \tag{9.6.36}$$

где R – тензор кривизны, F – тензор Янга–Миллса. Это и есть наш окончательный результат. На первый взгляд, только ряд чудесных совпадений может обратить в нуль это ужасное выражение. Однако в данном случае это как раз и происходит. Необходимо, в частности, показать, что модель струны согласуется со следующими условиями:

- (I) $n = 496$, что обращает в нуль половину слагаемых в выражении для аномалии;
- (II) остающиеся ненулевые члены могут быть переписаны в факторизованном виде; и
- (III) можно сократить факторизованные члены с другими, возникающими из эффективного действия ΔS точечной частицы.

Замечательно, что все эти три условия могут быть наложены одновременно.

Во-первых, условию (I) легко удовлетворить, положив $n = 496$. Тогда большое число членов в (9.6.36) обращается в нуль. (В следующей главе мы предьявим $SO(16) \times SO(16)$ -модель, в которой можно устранить эти члены выбора другого представления для киральных полей.)

Во-вторых, хотя условию (II) удовлетворить намного труднее, но можно показать, что остающиеся в (9.6.36) члены факторизуются в произведение двух членов, если $\text{Tr } F^6$ может быть переписан в терминах $\text{Tr } F^2 \text{Tr } F^4$ и $(\text{Tr } F^2)^3$, т. е.

$$\text{Tr } F^6 = \frac{1}{48} \text{Tr } F^2 \wedge \text{Tr } F^4 - \frac{1}{14400} (\text{Tr } F^2)^3. \tag{9.6.37}$$

Если это странное уравнение выполняется, то мы имеем следующее сведение:

$$I_{12} \sim (\text{Tr } R^2 + k \text{Tr } F^2) X_8. \tag{9.6.38}$$

Аномалия (9.6.36) обратится в нуль, если $k = -1/30$ и если

$$X_8 = \frac{1}{24} \text{Tr } F^4 - \frac{1}{7200} (\text{Tr } F^2)^2 - \frac{1}{240} \text{Tr } F^2 \wedge \text{Tr } R^2 + \frac{1}{8} \text{Tr } R^4 + \frac{1}{32} (\text{Tr } R^2)^2. \tag{9.6.39}$$

Кажется замечательным, что при выполнении этих жестких соотношений в любом случае можно удовлетворить условию (II).

Чтобы удовлетворить условию (II), необходимо проверить, какие группы Ли совместимы с этим странным ограничением (9.6.37). Заметим, что след матриц алгебры Ли калибровочной группы был определен в присоединенном представлении. При вычислении следа в фундаментальном представлении (см. приложение) мы будем использовать символ «tr».

Доказательство существования групп, удовлетворяющих условию (9.6.37), проводится непосредственно. Во-первых, известно, что в фундаментальном представлении алгебры $SO(l)$ матрица F может быть представлена как антисимметричная $(l \times l)$ -матрица. В присоединенном представлении F можно записать в виде

$$F_{ab,cd} = \frac{1}{2} (F_{ac} \delta_{bd} - F_{bc} \delta_{ad} - F_{ad} \delta_{bc} + F_{bd} \delta_{ac}). \quad (9.6.40)$$

Можно подставить явное выражение для F в формулу следа для F^6 . Получаем

$$\text{Tr } F^6 = (l - 32) \text{tr } F^6 + 15 \text{tr } F^2 \text{tr } F^4. \quad (9.6.41)$$

Для того чтобы удовлетворить условию факторизации, необходимо устранить ряд членов, содержащих шестую степень кривизны F^6 . Заметим, что это возможно при $l = 32$, и соответствующая этому значению l алгебра имеет в точности 496 генераторов. Итак, мы снова возвращаемся к группе $SO(32)$.

Доказательство того, что группа $E_8 \times E_8$ также удовлетворяет (9.6.37), несколько сложнее. Нам необходимо узнать, позволяют ли коэффициенты Клебша–Гордона этой группы записать независимые инварианты, что дало бы нам возможность осуществить свертку четырех или шести F . С точки зрения математики нам необходимо выяснить, существуют ли для этой группы независимые операторы Казимира порядка четыре и шесть. К счастью, есть теорема, говорящая о том, что если группа гомотопий $\pi_{2n-1}(E_8)$ содержит \mathbf{Z} , то существует независимый оператор Казимира порядка n . (Гомотопия есть способ образования классов эквивалентности, элементами которых являются не пространства или поверхности, а непрерывные отображения.) Можно показать, что первыми гомотопическими группами, удовлетворяющими этому условию, являются π_3 и π_{15} :

$$\pi_3(E_8) = \mathbf{Z}; \quad \pi_{15}(E_8) = \mathbf{Z}; \quad \pi_i(E_8) = 0 \text{ для } 3 < i < 15. \quad (9.6.42)$$

Таким образом, единственный представляющий интерес независимый инвариант имеет порядок два. Его существование означает, что $\text{Tr } F^4$ и $\text{Tr } F^6$ не являются независимыми и могут быть переписаны в терминах $\text{Tr } F^2$. Последним шагом является явное вычисление коэффициента, появляющегося в $\text{Tr } F^6 \sim (\text{Tr } F^2)^3$. Поскольку нас интересует только общий коэффициент, его всегда можно вычислить, выбирая специальное

представление подгруппы $SO(16)$ в E_8 , при этом присоединенное представление 248 может быть разложено относительно $SO(16)$ в прямую сумму $120 + 128$. Таким образом, для $E_8 \times E_8$ (9.6.37) может быть доказано так же, как и для $SO(32)$. (Можно показать, что это уравнение тривиально удовлетворяется и для групп $U(1)^{496}$ и $E_8 \times U(1)^{248}$.)

Это еще не окончательный ответ. Необходимо еще показать, что выполняется условие (III) и существует эффективный низкоэнергетический контрчлен ΔS , окончательно уничтожающий аномалию. Если мы наивно возьмем десятимерную киральную супергравитацию, взаимодействующую с 496 полями супер-Янга-Миллса, то найдем, что член X_8 не обращается в нуль. Следовательно, десятимерная киральная супергравитация должна быть отброшена как неприемлемая квантовая теория. Однако теория суперструн в пределе нулевого наклона имеет новые члены взаимодействия, которые могут аннулировать оставшиеся члены.

В низкоэнергетическом приближении суперструны могут иметь в своем действии больше членов, чем появляется в действии десятимерной киральной супергравитации. Сначала это может показаться удивительным, потому что супергравитация является низкоэнергетическим пределом теории суперструн. Однако даже на низкоэнергетических уровнях существует различие: сумма по всему бесконечному числу состояний Редже будет, вообще говоря, давать нам больше фейнмановских графов, чем можно наивно ожидать. (Например, теория Янга-Миллса имеет действие, содержащее в лагранжиане поля не старше четвертой степени. Однако первично квантованная теория струн предсказывает только трехреджеонные взаимодействия. Где же недостающая четырехчастичная вершина? Она получается суммированием по бесконечному числу состояний Редже, что даст нам эффективные четырехчастичные состояния в низкоэнергетическом пределе. Вообще говоря, деревья и петли более высокой степени дают нам все члены, необходимые для получения теории Янга-Миллса и гравитации.)

Действительно, можно показать, что на древесном уровне существует эффективный член, который будет сокращать аномальный член. Чтобы показать это, выпишем сначала 12-форму

$$I_{12} \sim (\text{Tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_8, \quad (9.6.43)$$

которая может быть переписана в виде

$$I_{12} \sim (d \omega_{3L} - d \omega_{3Y}) X_8 \quad (9.6.44)$$

в силу тождеств

$$\text{Tr } R^2 = d \omega_{3L},$$

$$\text{tr } F^2 = d \omega_{3Y},$$

$$\omega_{3Y} = \text{tr} \left(AF - \frac{1}{2} A^3 \right),$$

$$\omega_{3L} = \text{Tr} \left(\omega R - \frac{1}{3} \omega^3 \right). \quad (9.6.45)$$

Имеем также

$$\begin{aligned}\delta \omega_{3Y} &= -d\omega_{2Y}^1, \\ \delta \omega_{3L} &= -d\omega_{2L}^1,\end{aligned}\tag{9.6.46}$$

где ω_{3Y} , ω_{3L} — 3-формы Черна-Саймонса, соответствующие либо связности Янга-Миллса (Y), либо связности Лоренца (L). Хотелось бы записать 12-форму I_{12} , которую мы аккуратно вычислили, в терминах новой 10-формы ω_{10} , чтобы условия согласованности Весса-Зумино явно удовлетворялись. Как и в (9.4.10), наша стратегия заключается в нахождении члена G при помощи конструирования таких форм ω_{10} и ω_{11} , что

$$\begin{aligned}I_{12} &= d\omega_{11}, \\ G &= \delta_\Lambda \int_\Sigma \omega_{11} = \int_\Sigma d\omega_{10} = \int_M \omega_{10}.\end{aligned}\tag{9.6.47}$$

Оказывается, что при переходе от 12-формы к 10-форме в конечном выражении появляется произвольная константа α . Нетрудно показать, что от I_{12} можно перейти к 11-форме, а потом к 10-форме. Выпишем окончательный результат:

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \frac{1}{3}(\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_8 + \frac{2}{3}(\text{Tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_7 \\ &\quad + \alpha d((\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_7),\end{aligned}\tag{9.6.48}$$

где α — произвольная константа, а также

$$\omega_{10} = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) (\text{Tr } R^2 - \text{tr } F^2) X_6 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) (\omega_{2L} - \omega_{2Y}) X_8,\tag{9.6.49}$$

где для X_6 и X_7 имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}dX_7 &= X_8, \\ dX_7 &= dX_6.\end{aligned}\tag{9.6.50}$$

Собирая все вместе, получаем для G следующее выражение:

$$G = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) \int (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) dX_6 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) \int (\omega_{2L} - \omega_{2Y}) X_8.\tag{9.6.51}$$

Это и есть тот самый множитель G , который мы хотели вычислить. Теперь необходимо выяснить, может ли десятимерная супергравитация, взаимодействующая с теорией супер-Янга-Миллса, давать в аномальный член вклад, сокращающий G . Используя все эти тождества, нетрудно показать, что добавление следующего эффективного действия даст новый вклад в аномальный член, в точности сокращающий G :

$$\Delta S \sim \int BX_8 - \left(\frac{2}{3} + \alpha\right) \int (\omega_{3L} - \omega_{3Y}) X_7.\tag{9.6.52}$$

Здесь α – константа, ω_{3L} и ω_{3Y} – формы Черна–Саймонса, ω – спинорная связность¹⁾, а $B = (B_{MN})$ – 2-форма, появляющаяся в суперсимметричной теории Янга–Миллса, взаимодействующей с десятимерной супергравитацией (действие Чаплина–Мантона). Тщательное сравнение показывает, что мы получим свободную от аномалий теорию, если выберем вариацию поля B в виде

$$\delta B = \omega_{2L}^1 - \omega_{2Y}^1. \quad (9.6.53)$$

Важно заметить, что это выражение *не является* обычной вариацией поля B , которую используют в теории супергравитации. Следовательно, супергравитационное действие Чаплина–Мантона не свободно от аномалий. Это обескураживает, пока мы не поймем, что в теории суперструн есть эффективные члены, возникающие из петель и суммирования по бесконечному числу резонансных состояний. Поэтому можно получить вариацию поля B вида (9.6.53) и приемлемую теорию супергравитации. Следующая проблема состоит в том, чтобы показать в явном виде, что, как и обещано, сокращение аномалий имеет место. Во-первых, следует показать, что поле B может иметь правильную вариацию, такую что все аномалии сокращаются. Во-вторых, следует показать, что этого действительно можно достичь таким способом.

Удивительно, но сокращение аномалий для всей суперструны оказывается много проще, чем сокращение аномалий для точечной частицы супергравитационной системы!

§ 9.7. СОКРАЩЕНИЕ АНОМАЛИЙ В ТЕОРИИ СТРУН

Мы видели, что если мы возьмем $n = 496$ и калибровочную группу $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$, то происходит серия чудес, приводящих к сокращению всех аномалий. Эти доводы, однако, были сформулированы только в низкоэнергетическом приближении и должны быть переформулированы для общего случая. Как ни странно, но вычисления для суперструны много легче, чем вычисления для теории супергравитации [15], поскольку модель струн имеет дело сразу со всей башней резонансов.

Начнем с метода регуляризации Паули–Вилларса, заменяя обычный пропагатор массивным:

$$\frac{1}{F_0} \rightarrow \frac{1}{F_0 - im} = \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2}. \quad (9.7.1)$$

Таким образом, мы принимаем философию обычной теории поля, где считается, что аномалия возникает вследствие нарушения киральной

¹⁾ Она входит в определение ω_{3L} . – Прим. перев.

инвариантности процедурой регуляризации Паули–Вилларса (или любой другой схемой регуляризации). В методе Паули–Вилларса добавление массового члена явным образом нарушает киральную инвариантность.

Перед регуляризацией однопетлевая шестиугольная диаграмма, нарушающая четность, выглядит следующим образом:

$$T(0) = \int d^{10}p \operatorname{Tr} \left(\frac{F_0}{L_0} V(1) \dots \frac{F_0}{L_0} V(6) \bar{\Gamma}_{11} \right), \quad (9.7.2)$$

где

$$V(i) = V(k_i, \zeta_i, 1) \quad (9.7.3)$$

и где $\frac{1}{2}(1 + \bar{\Gamma}_{11})$ – оператор проекции, выбирающий состояния с «четной G-четностью» из состояний модели NS – R:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11} &= \Gamma_{11} \Gamma_d, \\ \Gamma_d &= (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot d_n}. \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

(Без GSO-проекции аномалии нет, потому что в теории тогда сохраняется четность.)

Амплитуда, которую мы хотим вычислить, имеет вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [T(0) - T(m)]. \quad (9.7.5)$$

В пределе больших m зависимость от массы должна исчезать, что дает конечный результат. Выполним все операции взятия следа по матрицам Дирака. В результате амплитуда имеет следующий явный вид:

$$G \sim im^2 \varepsilon(\zeta, k) \int d^{10}p \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{L_0 + m^2} V_0(1) \dots \frac{1}{L_0 + m^2} V_0(6) \Gamma_d \right), \quad (9.7.6)$$

где

$$\varepsilon(\zeta, k) = \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3} \zeta_1^{\mu_1} \zeta_5^{\mu_5} k_1^{\nu_1} k_5^{\nu_5}. \quad (9.7.7)$$

Особая осторожность должна быть проявлена при взятии предела $m \rightarrow \infty$. В общем случае мы должны сложить вклады планарных и неориентируемых однопетлевых графов. Находим

$$\begin{aligned} G_P &\sim \varepsilon(\zeta, k) \int \prod_{0 \leq i=1}^5 dv_i \theta(v_{i+1} - v_i) \langle 0 | V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) | 0 \rangle, \\ G_{NO} &\sim \varepsilon(\zeta, k) \int \prod_{0 \leq i=1}^5 dv_i \theta(v_{i+1} - v_i) \langle 0 | V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

Собирая все вместе, включая изоспиновые множители, возникающие из множителей Чана-Патона, имеем

$$G \sim (n + 32l) \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6) \varepsilon(\zeta, k) \int \prod_{i=1}^5 dv_i \times \theta(v_{i+1} - v_i) \langle 0 | V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) | 0 \rangle. \quad (9.7.9)$$

Чтобы получить исчезающий аномальный член, необходимо только показать, что $n + 32l$ равно нулю. Важно проанализировать, откуда возникает множитель $n + 32l$:

- (1) n возникает в результате того, что мы берем след как по внутреннему, так и по внешнему краю диска с отверстием. Внешний след дает множители Чана-Патона; внутренний след (без внешних линий) дает множитель $\text{Tr}(1) = n$.
- (2) Множитель l возникает из изоспиновой группы и равен

$$l = \begin{cases} 1 & \text{Usp}(n), \\ 0 & \text{U}(n), \\ -1 & \text{SO}(n). \end{cases} \quad (9.7.10)$$

- (3) Важно, что множитель 32 возникает в силу нескольких причин. Множитель 32 был в якобиане, поскольку неориентируемый граф содержал интегрирование от 0 до 1/2, а планарный граф содержал интегрирование от 0 до 1. К тому же область интегрирования составляла лишь 1/32 часть от необходимой. И наконец, был другой множитель 32, возникающий вследствие существования 32 способов, которыми нечетное число твистов может быть помещено в шесть внешних пропагаторов. Следовательно, чтобы иметь сокращение, мы должны зафиксировать

$$l = -1 \Rightarrow \text{калибровочная группа совпадает с SO}(n),$$

$$n + 32l = 0 \Rightarrow \text{калибровочная группа совпадает с SO}(32). \quad (9.7.11)$$

Итак, мы получаем свободную от аномалий теорию с множителями Чана-Патона, если выберем $\text{SO}(32)$ в качестве калибровочной группы.

§ 9.8. ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АТЬИ-ЗИНГЕРА ОБ ИНДЕКСЕ

Мы хотим доказать теорему Атьи-Зингера [16] об индексе для операторов Дирака. Поскольку большинство теорем об индексе может быть выведено из комплекса Дирака, нам необходимо доказать теорему только для этого случая. Доказательство теоремы Атьи-Зингера в его первоначальном варианте было недоступно для многих физиков в силу его математической сложности. Однако недавно физики дали замечательно простое доказательство теоремы, использующее подход суперсимметричной сигма-модели. С использованием суперсимметрии

доказательство теоремы Атьи–Зингера может быть выражено на хорошо известном физикам языке [17, 18]. Новый вывод теоремы основан на том факте, что суперсимметричная нелинейная сигма-модель имеет суперсимметричный генератор, совпадающий с оператором Дирака, т. е.

$$Q = \hat{D}. \quad (9.8.1)$$

Чтобы развить аналогию между Q и оператором Дирака, начнем с рассмотрения суперсимметричной теории с суперсимметричным генератором Q и сопряженным к нему Q^* . Поскольку антикоммутатор Q с Q^* пропорционален p_μ и поскольку p_0 совпадает с энергией, имеем

$$H = Q^* Q. \quad (9.8.2)$$

Проанализируем собственные состояния гамильтониана:

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \quad (9.8.3)$$

Следовательно, если состояние имеет нулевую энергию, то

$$Q|E=0\rangle = 0. \quad (9.8.4)$$

Однако если бозонное состояние $|E, B\rangle$ или фермионное состояние $|E, F\rangle$ имеют ненулевую энергию E , то Q переводит одно в другое:

$$\begin{aligned} Q|E, B\rangle &= \sqrt{E}|E, F\rangle, \\ Q|E, F\rangle &= -\sqrt{E}|E, B\rangle. \end{aligned} \quad (9.8.5)$$

Это сильные утверждения, поскольку они означают, что

- (1) Энергия равна нулю или положительна; она никогда не бывает отрицательна.
- (2) Состояния с нулевой энергией не должны встречаться в бозон-фермионных парах. Такие состояния суперсимметричны сами по себе, т. е. они аннигилируются оператором Q .
- (3) Состояния с ненулевой энергией не аннигилируются оператором Q , а образуют суперсимметричные пары бозонов и фермионов, переходящих друг в друга под действием оператора Q .

Введем теперь оператор $(-1)^F$, где F – фермионное число. Для состояний с ненулевой энергией число фермионов и бозонов должно быть одинаковым. Однако, как мы видели, это не должно выполняться для состояний с нулевой энергией. Построим индекс Виттена I , подсчитывающий разность между числом бозонных и фермионных состояний с нулевой энергией:

$$I = \text{Tr}_{H=0} (-1)^F. \quad (9.8.6)$$

Заметим, что если энергия состояния изменяется, то число бозонов и фермионов, переходящих в состояние с нулевой энергией или покидающих его, должно быть равным. Они должны возникать и исчезать парами, поскольку индекс является топологическим инвариантом.

Следовательно, можно также записать

$$I = \text{Tr}(-1)^F e^{-\tau H} \tag{9.8.7}$$

для любого $\tau > 0$. Заметим, что состояния с ненулевой энергией не дают вклада в след по всем состояниям, поскольку образованы равным числом состояний с противоположными фермионными числами. Поэтому, как мы и видели выше, след берется только по состояниям с нулевой энергией.

Обсудим теперь индекс оператора Дирака. Ранее в (9.5.4) мы видели, что этот индекс просто подсчитывает разность между числом нулевых мод положительной и отрицательной киральности. Следовательно, по определению имеем

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \text{Tr}_{D^2=0} (\Gamma_{D+1}), \tag{9.8.8}$$

где

$$D^2 = (\hat{D})^*(\hat{D}). \tag{9.8.9}$$

То, что фермионы могут переходить в состояние с нулевой энергией (нулевые моды) или покидать его только киральными парами, аналогично ситуации, с которой мы сталкивались прежде в суперсимметричном случае. Следовательно, для состояний с произвольными собственными значениями оператора D^2 индекс может быть обобщен:

$$\text{Индекс } (\hat{D}) = \text{Tr} \{ \Gamma_{D+1} e^{-\tau D^2} \}. \tag{9.8.10}$$

Таким образом, нашей целью является построение суперсимметричной модели, что сделает это соответствие точным. К счастью, нелинейная суперсимметричная сигма-модель обладает этим свойством. Поэтому, вычисляя индекс для суперсимметричной сигма-модели, мы будем автоматически получать индекс оператора Дирака. Таким образом, имеем соответствие

σ-модель	Спирное многообразие
Q	\hat{D}
$(-1)^F$	Γ_{D+1}
H	$\hat{D}^* \hat{D}$

(9.8.11)

Начнем с определения лагранжиана для оператора положения $x^\mu(t)$ и его суперпартнера $\psi^\mu(t)$, являющихся функциями от фиктивной переменной собственного времени t :

$$L = \frac{1}{4} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{4} \psi^\mu \dot{\psi}_\mu. \tag{9.8.12}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразования суперсимметрии

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \varepsilon \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu &= -\varepsilon \dot{x}^\mu.\end{aligned}\tag{9.8.13}$$

(Сравните это с действием NS–R в (3.2.1), предположив независимость от δ всех его членов.) Канонические коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}[p_\mu, x^\nu] &= -i\delta_\mu^\nu, \\ \{\psi_\mu, \psi^\nu\} &= 2\delta_\mu^\nu.\end{aligned}\tag{9.8.14}$$

При этом генератор суперсимметрии равен

$$Q = \psi^\mu (i p_\mu),\tag{9.8.15}$$

где

$$\begin{aligned}\delta(x, \psi) &= [\bar{\varepsilon} Q, (x, \psi)], \\ p_\mu &= \frac{1}{2} i \dot{x}_\mu.\end{aligned}\tag{9.8.16}$$

Заметим, что если Q действует на произвольное пространственно-временное спинорное состояние, то ψ^μ следует заменить на γ^μ , а $i p_\mu$ – на ∂_μ , так что Q становится равным $\gamma^\mu \partial_\mu$, что совпадает с оператором Дирака.

Нашей следующей целью является добавление калибровочных и гравитационных полей, чтобы получить теоремы об индексе для произвольных многообразий и калибровочных групп. Введем фермионное поле θ . Тогда в суперпространстве можно ввести следующие поля:

$$X^\mu = x^\mu + \theta \psi^\mu.\tag{9.8.17}$$

Оператор суперсимметрии в суперпространстве выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}Q &= \theta \partial_t + \partial_\theta, \\ D &= \theta \partial_t - \partial_\theta,\end{aligned}\tag{9.8.18}$$

так что $D^2 = -\partial_t$. Введем теперь калибровочные поля

$$g_{\mu\nu}(X); \quad A_\mu(X),\tag{9.8.19}$$

которые также являются суперполями. Наконец, чтобы завершить построение действия, мы также должны ввести еще одно суперполе, являющееся калибровочным объектом:

$$\begin{aligned}N^a &= \eta^a + \theta \varphi^a, \\ \bar{N}_a &= \bar{\eta}_a + \theta \varphi_a.\end{aligned}\tag{9.8.20}$$

Собирая все вместе, получаем следующее выражение для суперсим-

метричного действия:

$$S = \int_0^1 dt \int d\theta L,$$

$$L = k g_{\mu\nu}(X) D X^\mu \partial_t X^\nu - \bar{N} D_A N, \quad (9.8.21)$$

где k – одномерная «метрика», явный вид которой несуществен, и

$$D_A N = [D + D X^\mu A_\mu(X)] N. \quad (9.8.22)$$

После избавления от всех вспомогательных полей получаем

$$L = \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \psi^\mu \nabla_t \psi^\nu) + \bar{\eta} \nabla_t \eta - \frac{1}{2} \bar{\eta} F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \eta, \quad (9.8.23)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_t \psi^\mu &= \partial_t \psi^\mu + \dot{x}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \psi^\rho, \\ \nabla_t \eta &= (\partial_t + \dot{x}^\mu A_\mu) \eta \end{aligned} \quad (9.8.24)$$

и где $F_{\mu\nu}$ – тензор Янга–Миллса, а $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ – обычные символы Кристоффеля, определенные не в t -пространстве, а в реальном D -мерном пространстве–времени. Можно показать, что генератор суперсимметрии является оператором Дирака.

Следующим шагом является вычисление индекса суперсимметрии, который, как мы знаем, должен совпадать с индексом оператора Дирака. Киральная аномалия, как мы видели ранее в (9.5.16), может быть записана в терминах функции Грина ядра теплопроводности:

$$\nabla_\mu J^{\mu 5} = 2 \text{Tr}(\gamma_5 K_\tau(x, x)), \quad (9.8.25)$$

где

$$K_\tau(x, y) = \langle x | e^{-\tau H} | y \rangle. \quad (9.8.26)$$

Мы знаем из гл. 1, что эта функция Грина может быть переписана на языке континуальных интегралов как функциональный интеграл от действия. Основное отличие от найденных в гл. 1 функциональных интегралов заключается в том, что собственные функции должны быть периодическими по подходящему времени. Это связано с тем, что функция Грина является матричным элементом от $e^{-\tau H}$, а не от $e^{i\tau H}$. Таким образом, время становится мнимым (т.е. функции становятся периодическими). Мы будем использовать функциональный интеграл

$$\text{Tr}(\Gamma_{D+1} e^{-\tau D^2}) = \int_{\text{ПГУ}} \prod_t dx(t) d\psi(t) \exp - \int_0^\tau L dt, \quad (9.8.27)$$

где ПГУ означает периодические граничные условия. Следовательно, вычисляя этот функциональный интеграл для одномерной сигма-модели (с полями, зависящими от одной переменной t), мы автоматически

вычисляем индекс оператора Дирака для D -мерного многообразия! Для того чтобы вычислить этот континуальный интеграл, мы должны выполнить интегрирование в окрестности классического решения:

$$X_0^\mu = x_0^\mu + \theta \psi_0^\mu. \quad (9.8.28)$$

Выполним сначала интегрирование по x . Если мы разложим по степеням в окрестности решения $x^\mu = x_0^\mu + \delta x^\mu$, то найдем, что квадратичная часть действия включает член

$$S = \int_0^1 dt dx (-\partial_t + R) \partial_t \delta x + \dots, \quad (9.8.29)$$

где R – матрица, определяемая через тензор кривизны:

$$R_\nu^\mu = \frac{1}{2} \psi_0^\alpha \psi_0^\beta R_{\nu\alpha\beta}^\mu. \quad (9.8.30)$$

К счастью, это функциональное интегрирование выполнить легко. Как и раньше, гауссово интегрирование (9.8.29) дает детерминант

$$\int D \delta x e^{-S} = \det^{-1/2} (\partial_t - R), \quad (9.8.31)$$

где детерминант не включает постоянных мод. Этот детерминант может быть легко вычислен подстановкой в него полного набора собственных состояний. Однако эти собственные состояния периодичны по собственному времени t . Таким образом, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \det^{-1/2} (\partial_t - R) &= \det^{-1/2} \left(\prod_{k \neq 0} \langle \varphi_k | \partial_t - R | \varphi_k \rangle \right) \\ &= \det^{-1/2} \left(\prod_{k \neq 0} (R - 2\pi i k) \right) \\ &= \det^{-1/2} \left\{ \left(\frac{1}{2} R \right)^{-1} \operatorname{sh} \frac{1}{2} R \right\}, \end{aligned} \quad (9.8.32)$$

где произведение по целым числам k возникает вследствие того, что при вычислении детерминанта мы вставляем периодические функции, удовлетворяющие условию

$$\partial_t \varphi_k = 2\pi i k \varphi_k. \quad (9.8.33)$$

Мы также использовали равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{\pi^2 n^2} \right) = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}. \quad (9.8.34)$$

Аналогично можно разложить в ряд в окрестности x_0^μ и ψ_0^μ и

проинтегрировать по η . Таким способом мы получим вклад в интеграл от калибровочных полей. Уравнение движения для поля η отличается от найденного ранее для поля δx . В представлении Гейзенберга оно имеет вид

$$\dot{\eta} + [\bar{\eta} F \eta, \eta] = 0, \quad (9.8.35)$$

где

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \psi_0^\mu \psi_0^\nu.$$

Это означает, что эволюция поля η является следующей:

$$\bar{\eta}(1) = e^{-\bar{\eta} F \eta} \bar{\eta}(0) e^{\bar{\eta} F \eta}. \quad (9.8.36)$$

Таким образом, вклад этого поля в интеграл заключается в умножении на коэффициент e^F . Следовательно, наша окончательная формула для ядра теплопроводности имеет вид

$$K_\tau(x_0, x_0) \sim e^F \det^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{2} R \right)^{-1} \operatorname{sh} \frac{1}{2} R \right]. \quad (9.8.37)$$

Здесь кривизна калибровочного и гравитационного полей записана в терминах ψ_0^μ , а хотелось бы переписать ее в терминах dx^μ . Это возможно, поскольку мы должны еще выполнить функциональное интегрирование по всем фоновым полям ψ_0^μ . Поскольку это интегрирование по грассмановозначным полям, в результате остается только член, пропорциональный

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \psi_{0, \mu_1} \dots \psi_{0, \mu_D}. \quad (9.8.38)$$

Затем мы интегрируем полученное выражение по D -мерному пространству. Однако это эквивалентно подставке только D -мерных антисимметричных комбинаций форм кривизны

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \\ R_\nu^\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\alpha\beta}^\mu dx^\alpha dx^\beta \quad (9.8.39)$$

и последующему интегрированию по D -мерному пространству. Это интегрирование автоматически дает антисимметричное произведение тензоров, так что мы можем свободно заменить $\psi_0^\mu \rightarrow dx^\mu$, поскольку окончательное выражение не зависит от того, используем мы ψ_0^μ или dx^μ .

Таким образом, окончательное выражение для аномального члена дается формулой

$$\begin{aligned} \text{Индекс } (\hat{D}) &= \text{Tr}(-1)^F e^{-\tau D^2} \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{(1/2)D} \int \text{Tr} e^F \det^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{2}R\right)^{-1} \text{sh} \frac{1}{2}R \right]. \end{aligned} \quad (9.8.40)$$

Итак, мы получили теорему Атьи–Зингера для оператора Дирака на замкнутых ориентируемых многообразиях без края (см. (9.4.26) и (9.5.18)).

Детерминант в правой части может быть вычислен «диагонализацией» 2-формы кривизны и записи ее в терминах ее собственных значений x_i . Таким образом, мы воспроизводим \hat{A} -род, приведенный в (9.4.26).

Выражение для индекса оператора D может быть записано как интеграл от произведения двух 2-форм кривизны, одна из которых – для гравитационной части, а другая – для калибровочной части. Для завершенности выпишем четыре классических комплекса и связанные с ними теоремы об индексе:

Комплекс	Индекс	Теорема об индексе
де Рама	Гаусс–Бонне	индекс $(d + \delta) = \chi(M) = \int e(M)$
сигнатура	Хирцебрух	$\tau(M) = \int L(M) \wedge \text{ch}(V)$
Дольбо	Риман–Рош	индекс $(\partial) = \int \text{td}(M) \wedge \text{ch}(V)$
спин	\hat{A} -род	индекс $(\hat{D}) = \int \hat{A}(M) \wedge \text{ch}(V)$

где e – эйлерова характеристика, td – характеристика Тодда, ch – характеристика Черна, где мы удвоили значение формы кривизны, ch – обычная характеристика Черна e^Ω , $\bar{\partial}$ является комплексно сопряженным к ∂_z при использовании комплексных координат z, \bar{z} для описания двумерной поверхности. (Мы будем обсуждать комплексные многообразия в гл. 11.)

§ 9.9. РЕЗЮМЕ

Мы использовали множители Чана–Патона и сокращение аномалии для фиксации калибровочной группы теории струн. Множитель Чана–Патона является просто следом от произведения различных генераторов группы, на который умножается член Борна–Венециано:

$$T(1, 2, 3, \dots, N) = \sum_{\text{перестановки}} \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_N) A(1, 2, 3, \dots, N). \quad (9.9.1)$$

К сожалению, единственное ограничение, налагаемое на выбор группы условием унитарности, состоит в том, что допустимы группы $\text{Usp}(N)$, $\text{SO}(N)$ или $\text{U}(N)$ с произвольным N .

Более сильные ограничения на выбор группы возникают, если мы

потребуем, чтобы модель была свободной от аномалий. Вообще говоря, аномалия возникает всякий раз, когда классическая симметрия лагранжиана не сохраняется в процессе квантования. Киральная аномалия, например, возникает из-за того, что метод регуляризации (Паули–Вилларса, например, или размерной регуляризации) всегда нарушает киральную инвариантность.

В частности, дивергенция аксиального тока не обращается в нуль, а равна

$$\partial_\mu J^{\mu,5} = \frac{-1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}, \quad (9.9.2)$$

что является полной производной или топологическим членом, определяемым через ток

$$J^{\mu,5} = -8\pi^2 \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left(A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right). \quad (9.9.3)$$

Вообще говоря, в более высокой размерности аномалия будет пропорциональна топологическому члену. Например, используя теорию форм, можно показать, что n -кратное произведение тензора кривизны может быть записано как дивергенция от другой формы. Например, можно показать, что след от n -й степени тензора кривизны может быть записан в терминах дивергенции от формы Черна–Саймонса:

$$\text{Tr} \Omega^n = n d \int_0^1 dt t^{n-1} \text{Tr} \{ A (dA + tA^2)^{n-1} \}. \quad (9.9.4)$$

Изучение этих инвариантных полиномов приводит нас к теории характеристических классов. Существует четыре классических характеристических класса. Класс Черна может быть определен как

$$c(\Omega) = \det \left(I + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots \quad (9.9.5)$$

Класс Понтрягина определен для групп $O(k)$ формулой

$$p(\Omega) = \det \left(I - \frac{1}{2\pi} \Omega \right) = 1 + p_1 + p_2 + \dots \quad (9.9.6)$$

Класс Эйлера определяется через пфаффиан:

$$\alpha^r = r! (2\pi)^r e(\alpha) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{2r}. \quad (9.9.7)$$

Наконец, существует класс Штифеля–Уитни, который не может быть записан в терминах форм кривизны. Однако этот класс будет важен при анализе спинорной структуры на многообразиях. В частности, при обращении в нуль ω_1 , ω_2 мы получаем ориентируемое спинорное многообразие, на котором можно задать спиноры:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0 &\leftrightarrow M \text{ ориентируемо,} \\ \omega_1 = \omega_2 = 0 &\rightarrow M \text{ является спиновым многообразием.} \end{aligned} \quad (9.9.8)$$

Теоремы об индексах обычно записываются через следующие инвариантные полиномы:

$$\text{Класс Тодда} = \text{td}(M) = \prod_i \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}},$$

$$\text{Класс Хирцебруха} = L(M) = \prod_i \frac{x_i}{\text{th } x_i},$$

$$\hat{A}\text{-полином} = \hat{A}(M) = \prod_i \frac{\frac{1}{2}x_i}{\text{sh } \frac{1}{2}x_i}. \quad (9.9.9)$$

Наибольший интерес представляет теорема об индексе оператора Дирака, касающаяся разности числа решений уравнения Дирака с нулевым собственным значением положительной и отрицательной киральности. Используя суперсимметричную сигма-модель, можно показать следующее:

$$\begin{aligned} \text{Индекс } (\hat{D}) &= \text{Tr}(-1)^F e^{-\tau D^2} = \frac{1}{2} \int d^D x \partial_\mu J^{\mu 5} \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{(1/2)D} \int \text{Tr} e^F \det^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{2} R\right)^{-1} \text{sh } \frac{1}{2} R \right]. \end{aligned} \quad (9.9.10)$$

Вооружившись этим теоретическим аппаратом, можно вычислить калибровочные и гравитационные аномалии, найденные в теории супергравитации и теории суперструн. В этом случае гравитационные и калибровочные аномальные вклады возникают из-за того, что внутренняя линия может быть

- (1) либо киральным фермионом спина $1/2$,
- (2) либо киральным фермионом спина $3/2$,
- (3) либо антисимметричным тензором, не имеющим ковариантного действия.

Вычисление аномального вклада выполняется точно по фейнмановским диаграммам. Вычисление, однако, чрезвычайно упрощается, поскольку можно сделать некоторые предположения о тензоре поляризации внешних линий, редуцируя, таким образом, его спин. Следовательно, трудная проблема свертки по различным индексам сводится к более простой задаче свертки по частицам более низкого спина. Окончательные результаты таковы:

$$I_{1/2} = -i 2^{2k+1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) (4\pi)^{2k+1} M^2 \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\text{sh } \frac{1}{2}x_i},$$

$$I_{3/2} = -i(2\pi)^{2k+1} R(\epsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\text{sh} \frac{1}{2}x_i} \sum_{j=0}^{2k+1} (2 \text{ch } x_j - 1),$$

$$I_A = \frac{1}{4} i 2^{2k+1} 2\pi^{2k+1} R(\epsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\text{sh} \frac{1}{2}x_i} \text{ch} \frac{1}{2}x_i. \quad (9.9.11)$$

Собирая все вместе, мы находим полный аномальный вклад как от калибровочного, так и от гравитационного секторов:

$$I_{12} = \frac{-1}{720} \text{Tr } F^6 + \frac{1}{24 \cdot 48} \text{Tr } F^4 \text{Tr } R^2$$

$$- \frac{1}{256} \text{Tr } F^2 \left(\frac{1}{45} \text{Tr } R^4 + \frac{1}{36} \left(\text{Tr } R^2 \right)^2 \right)$$

$$+ \frac{(n-496)}{64} \left[\frac{1}{2 \cdot 2835} \text{Tr } R^6 + \frac{1}{4 \cdot 1080} \text{Tr } R^2 \text{Tr } R^4 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8 \cdot 1296} \left(\text{Tr } R^2 \right)^3 \right] + \frac{1}{384} \text{Tr } R^2 \text{Tr } R^4 + \frac{1}{1536} \left(\text{Tr } R^2 \right)^3. \quad (9.9.12)$$

Как ни странно, можно обратить это выражение в нуль, сделав несколько предположений. Вначале мы должны положить n равным 496 (если не касаться модели $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$, которая будет обсуждаться в следующей главе). Затем мы предположим, что можно факторизовать аномалию в произведение двух членов:

$$I_{12} \sim (\text{Tr } R^2 + k \text{Tr } F^2) X_8,$$

$$X_8 = \frac{1}{24} \text{Tr } F^4 - \frac{1}{7200} (\text{Tr } F^2)^2 - \frac{1}{240} \text{Tr } F^2 \wedge \text{Tr } R^2$$

$$+ \frac{1}{8} \text{Tr } R^4 + \frac{1}{32} (\text{Tr } R^2)^2. \quad (9.9.13)$$

Заметим, что десятимерная супергравитация немедленно отбрасывается, потому что указанное выше тождество не может быть удовлетворено. Однако теория струн имеет одно большое преимущество перед теорией супергравитации. Наличие в теории суперструн полей более высокого спина означает, что предел нулевого наклона теории не должен редуцироваться точно к теории супергравитации. В частности, взаимодействия поля B в теории суперструн таковы, что они могут в принципе сократить члены, выписанные выше.

Подлинное доказательство того, что аномальный член обращается в нуль, должно быть выполнено в струнном формализме с помощью

однопетлевого шестиугольного графа. Мы используем регуляризацию типа Паули-Вилларса на промежуточных линиях и потом суммируем по планарным и неориентируемым петлям. Аномалия пропорциональна следующему выражению:

$$G \sim im^2 \varepsilon(\zeta, k) \int d^{10} p \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{L_0 + m^2} V_0(1) \dots \frac{1}{L_0 + m^2} V_0(6) \Gamma_d \right), \quad (9.9.14)$$

где

$$\varepsilon(\zeta, k) = \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3} \zeta_1^{\mu_1} \zeta_3^{\mu_3} k_1^{\nu_1} k_3^{\nu_3} \quad (9.9.15)$$

и

$$\Gamma_d = (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d - n d_n}. \quad (9.9.16)$$

Окончательно, суммирование планарных и неориентируемых диаграмм дает

$$G \sim (n + 32l) \operatorname{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6) \varepsilon(\zeta, k) \int \prod_{i=1}^5 d\nu_i \times \theta(\nu_{i+1} - \nu_i) \langle 0 | V_0(k_1, z_1) \dots V_0(k_6, z_6) | 0 \rangle. \quad (9.9.17)$$

Чтобы обратить этот член в нуль, необходимо положить $n = 32$ и

$$l = \begin{cases} 1 & \text{Usp}(n), \\ 0 & \text{U}(n), \\ -1 & \text{SO}(n). \end{cases} \quad (9.9.18)$$

Следовательно, калибровочная группа должна совпадать с $O(32)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Paton J. E., Chan H. M. Nuch. Phys. **B10**, 516 (1969).
- [2] Adler S. L. Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [3] Bell J. S., Jackiw R. Nuovo Cimento **60A**, 47 (1969).
- [4] Bardeen W. A. Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
- [5] Witten E. In Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology (ed. by W. E. Bardeen and A. R. White). World Scientific, Singapore, 1985.
- [6] Frampton P. H., Kephart T. W. Phys. Rev. Lett. **50**, 1343 (1983); Phys. Rev. **D28**, 1010 (1983).
- [7] Townsend P. K., Sierra G. Nucl. Phys. **B222**, 493 (1983).
- [8] Zumino B., Wu Y. S., Zee A. Nucl. Phys. **B239**, 447 (1984).
- [9] Wess J., Zumino B. Phys. Lett. **37B**, 95 (1971).
- [10] Eguchi T., Gilkey P. B. and Hanson A. J. Phys. Rep. **66**, 213 (1980).
- [11] Nach C., Sen S. Topology and Geometry for Physicists, Academic Press, New York, 1983.
- [12] Alvarez-Gaumé L., Witten E. Nucl. Phys. **B234**, 269 (1983).
- [13] Schwinger J. S. Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [14] Marcus N., Schwarz J. H. Phys. Lett. **115B**, 111 (1982).
- [15] Green M. B., Schwarz J. H. Phys. Lett. **149B**, 117 (1984); **151B**, 21 (1984).
- [16] Atiyah M. F., Singer I. M. Ann. Math. **87**, 485, 546 (1968); **93**, 1, 119, 139 (1971).
- [17] Alvarez-Gaumé, Commun. Math. Phys. **90**, 161 (1983).
- [18] Friedan D., Windey P. Nucl. Phys. **B235** (FS11), 395 (1984).

ГЕТЕРОТИЧЕСКИЕ СТРУНЫ И КОМПАКТИФИКАЦИЯ

§ 10.1. КОМПАКТИФИКАЦИЯ

Одна из серьезных проблем, с которыми сталкивается теория струн, заключается в описании перехода от 26- и 10-мерной теорий к реалистичной 4-мерной теории. До тех пор пока такая размерная редукция не будет выполнена, теория не может претендовать на сколько-нибудь серьезное описание физической реальности.

Пока размерная редукция не выполнена в рамках полевой теории, наилучшее, что можно сделать, — это рассмотреть классические решения, описывающие спонтанную компактификацию дополнительных измерений. В этой главе мы будем исследовать гетеротическую струну с группами $E_8 \otimes E_8$ и $\text{Spin}(32)/Z_2$, возникающими в результате компактификации 26-мерного пространства к 10 измерениям.

Как мы видели в предыдущей главе, сокращение аномалий возможно для групп $O(32)$ и $E_8 \otimes E_8$. Мы видели, однако, что метод Чана–Патона не работает для исключительных групп. Поэтому для получения модели с группой $E_8 \otimes E_8$ необходимо применить другой метод, использующий компактификацию на автодуальную решетку. Хотя теория гетеротических струн является теорией замкнутых струн, она содержит поле супер-Янга–Миллса, возникающее обычно в секторе открытой струны для струн типа I.

В теории гетеротических струн используется обманчиво простое тождество

$$26 = 10 + 16. \quad (10.1.1)$$

Это означает, что при компактификации 26-мерной струны к 10-мерной остается 16 дополнительных измерений, которые могут быть помещены на тор, генерируемый корневой решеткой группы $E_8 \otimes E_8$, что приводит, как известно, к свободной от аномалий теории. Это наблюдение было сделано Фройндом [1].

В гетеротической струне используется тот факт, что замкнутая струна имеет два независимых сектора: правый и левый. В правом секторе все функции зависят от $\sigma + \tau$, а в левом от $\sigma - \tau$. Это расщепление существенно используется в теории гетеротических струн. Слово «гетерозис» означает «гибридная сила (энергия)». Здесь это означает, что асимметричный подход к левым и правым модам приводит к гибридной теории, значительно более сложной, чем изучавшиеся ранее суперструны типа I и II. Было показано, что эта теория не имеет тахионов, безаномальна и является конечной в однопетлевом приближении.

Прежде чем начать обсуждение гетеротической струны, опишем процесс компактификации на простейшем примере скалярной частицы

в периодическом одномерном пространстве. Это означает, что мы делаем отождествление

$$x = x + 2\pi R, \quad (10.1.2)$$

где R – радиус этого пространства, являющегося одномерной вещественной осью, факторизованной по одномерной решетке Γ длины $2\pi R$:

$$S_1 = \frac{R_1}{\Gamma}. \quad (10.1.3)$$

Поле, определенное в этом периодическом пространстве, должно поэтому удовлетворять условию

$$\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi R). \quad (10.1.4)$$

Это означает, что оно может быть разложено по периодическим собственным функциям:

$$\varphi(x) = \sum_n \varphi_n e^{ipx}. \quad (10.1.5)$$

Здесь

$$p = \frac{n}{R}, \quad (10.1.6)$$

где n – произвольное целое число. Таким образом, видим, что *соответствующий координате x импульс p квантуется в терминах целых чисел*. Это является характерной чертой всех компактификаций.

Обобщим теперь это на частицу в 5-мерном пространстве–времени, пятая координата которого свернулась в окружность и стала периодической. Рассмотрим скалярное поле, удовлетворяющее безмассовому уравнению Клейна–Гордона:

$$\square_5 \varphi(x_\mu, x_5) = 0. \quad (10.1.7)$$

Как и выше, можно разложить скалярное поле по периодическим собственным функциям:

$$\varphi(x_\mu, x_5) = \sum_n \varphi(x_\mu) e^{ip_5 x_5}, \quad (10.1.8)$$

где $p_5 = n/R$. Заметим, что каждая собственная функция может изменить эффективную «массу» в операторе Клейна–Гордона:

$$\square_5 = \square_4 + \partial_5^2 = \square_4 - p_5^2. \quad (10.1.9)$$

Из этих простых примеров может быть сделано несколько выводов:

- (1) Компактификация дополнительного измерения приводит к квантованию импульса, соответствующего компактифицированной координате. Компоненты импульса становятся целочисленными.
- (2) Спектр масс в пространственно-временных измерениях, которые не

компактифицированы, сдвинут эффективным «массовым» членом, возникающим из компактифицированных измерений.

- (3) Радиусы компактифицированных измерений могут быть совершенно произвольными. Существует большая свобода выбора решетки, на которую мы хотим компактифицировать пространство.
- (4) Волновую функцию можно разложить в ряд по периодическим собственным функциям от компактифицированной координаты. В одном измерении это просто синусы или косинусы. При большем числе измерений можно взять сферические гармоники.

Теперь рассмотрим случай компактификации теорий для полей более высокого спина, таких, как общая теория относительности, в которых за счет пятого измерения будет генерироваться поле Максвелла.

Исторически идея компактификации впервые была высказана Калуцей [2–4], который в своем письме к Эйнштейну в 1919 г. предложил идею объединения электромагнитной теории Максвелла с общей теорией относительности Эйнштейна за счет расширения пространства–времени до пяти измерений. Калуца предложил записать метрический тензор в виде

$$\bar{g}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\mu\nu} & \bar{g}_{\mu 5} \\ \bar{g}_{5\nu} & \Phi \end{pmatrix}, \quad (10.1.10)$$

где компоненты пятимерного метрического тензора выражаются через компоненты A_μ потенциала электромагнитного поля и компоненты $g_{\mu\nu}$ четырехмерного метрического тензора:

$$\bar{g}_{5\mu} = \bar{g}_{\mu 5} = \kappa A_\mu, \quad (10.1.11)$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa^2 A_\mu A_\nu.$$

Предположим, что пятое измерение экспериментально ненаблюдаемо из-за того, что оно свернуто в очень маленькую окружность. Поэтому пятая координата периодична:

$$x_5 = x_5 + 2\pi R. \quad ; \quad (10.1.12)$$

То есть, проходя расстояние $2\pi R$ вдоль пятого измерения, мы приходим в ту же самую начальную точку. Исходное пятимерное риманово многообразие теперь расщепляется в прямое произведение:

$$R_5 \rightarrow R_4 \times S_1. \quad (10.1.13)$$

Предположим, что радиус пятого измерения является таким маленьким, что он не может быть измерен. Следовательно, можно положить

$$\partial_5 \rightarrow 0. \quad (10.1.14)$$

При таком дополнительном предположении уравнения сильно упрощаются. Вариация метрики, например, обычно имеет вид

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu + \dots \quad (10.1.15)$$

Когда длина окружности пятого измерения мала, мы имеем

$$\delta \bar{g}_{5\mu} = \partial_\mu \Lambda_5 + \dots \quad (10.1.16)$$

Записанное в терминах (10.1.11), это сводится к

$$\delta A_\mu = \kappa^{-1} \partial_\mu \Lambda_5, \quad (10.1.17)$$

что есть в точности калибровочное преобразование электромагнитного поля группы $U(1)$. Поскольку существует только одно 5-мерное действие, имеющее группу симметрии $U(1)$ и содержащее производные не выше второго порядка, мы приходим к выводу, что *теория Эйнштейна, записанная в пяти измерениях, сводится к теории Максвелла, соединенной с четырехмерной теорией гравитации*. Например, в этом приближении можно точно вычислить некоторые из символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{5\mu,\nu} = \frac{1}{2} \kappa (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \dots = \frac{1}{2} \kappa F_{\mu\nu}. \quad (10.1.18)$$

Следовательно, в этом приближении можно редуцировать пятимерную теорию Эйнштейна явно. Находим

$$\begin{aligned} L &= \frac{-1}{2k^2} \sqrt{-\bar{g}} R_{AB} \bar{g}^{AB} \\ &= \frac{-1}{2k^2} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

Таким образом, электромагнитное поле в четырехмерном пространстве возникает в результате компактификации пятимерной теории гравитации.

Аналогично можно обобщить этот результат на N -мерное многообразие, содержащее в качестве подмногообразия компактифицированное многообразие K_P меньшей размерности P :

$$R_N \rightarrow R_{N-P} \times K_P. \quad (10.1.20)$$

Если это так, то можно проанализировать калибровочную группу, возникающую в результате этого разбиения, и можно получить ортогональные или унитарные группы. Можно показать, что на этом пути теория Янга–Миллса возникает из многомерной теории гравитации.

Хотя формализм Калуцы–Клейна элегантно объединяет теорию Янга–Миллса и теорию гравитации в рамках одной конструкции, этот подход имеет серьезный недостаток, относящийся еще к первоначальному варианту Калуцы, а именно: почему пятое измерение вдруг скручивается в крошечную окружность? Предположение Клейна о том, что компактификация в окружность с радиусом, равным планковской длине, происходит в силу квантовомеханических причин, было важным, но вопрос о том, как это происходит, остался без ответа. С этой проблемой, впервые возникшей 65 лет назад, мы все еще сталкиваемся в теории суперструн.

Далее мы хотим обсудить вопрос компактификации в рамках теории струн [5], которая должна быть редуцирована от 26 или 10 к 4 измерениям. Сначала изучим компактификацию i -й координаты открытой струны:

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + 2\alpha' p^i \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i \cos n\sigma e^{-in\tau}. \quad (10.1.21)$$

Как и выше, периодичность i -й координаты приводит к условию квантования импульса, компоненты которого становятся кратны целым числам M_i :

$$p^i = \frac{M_i}{R_i}, \quad (10.1.22)$$

где R_i — радиус окружности, пробегаемой i -й координатой. Все это в точности совпадает с изложенным выше. Вообще говоря, радиусы компактифицированных измерений не обязаны быть одинаковыми. Как и выше, мы также находим, что из-за компактифицированных измерений спектр масс теории сдвинут. Анализируя гамильтониан, видим, что выражение для масс дается формулой

$$\alpha' m^2 = \frac{\alpha'}{R^2} \sum_{i=1}^{10-D} M_i^2 + N, \quad (10.1.23)$$

где N — оператор массы:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^D \alpha'_{-n} \alpha_n^i. \quad (10.1.24)$$

Таким образом, спектр масс сдвинут на величину, пропорциональную сумме квадратов целых чисел, как и в (10.1.9).

Для замкнутой струны, однако, мы имеем дополнительный вклад в массу. Это связано с тем дополнительным усложнением, что замкнутая струна может N_i раз обходить вокруг i -го компактифицированного измерения аналогично тому, как резиновая лента обматывается вокруг цилиндрической трубки. Важно отметить, что эта конфигурация, приводящая к новому члену в гамильтониане, не имеет аналога в случае компактификации точечных частиц. Поэтому для замкнутой струны мы имеем

$$X^i = x^i + 2\alpha' p^i \tau + 2N_i R \sigma + (\alpha'/2)^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}). \quad (10.1.25)$$

В результате компактификации замкнутой струны получаем два целых числа M_i и N_i . Целое число N_i описывает солитонное состояние струны, намотанной вокруг компактифицированного измерения целое число раз. Заметим, что это солитонное состояние стабильно в силу топологических причин.

Выражение для сдвинутых масс теперь имеет вид

$$\frac{1}{2} \alpha' m^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10-D} (\alpha'^2 M_i^2 / R^2 + R^2 N_i^2 / \alpha'^2) + N + \tilde{N},$$

где N и \tilde{N} являются операторами энергии для двух различных секторов замкнутой струны.

Выше мы обсудили компактификацию $(10-D)$ -мерного пространства на тор. Однако эта схема компактификации феноменологически нежелательна, поскольку приводит к $N=4$ суперсимметрии и, следовательно, отсутствию киральных фермионов. Желательно компактифицировать на более сложные пространства, генерируемые, например, решетками групп Ли (см. приложение). Вернемся к гетеротической струне, где используется компактификация на тор, генерируемый решеткой группы $E_8 \otimes E_8$ или $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$.

§ 10.2. ГЕТЕРОТИЧЕСКАЯ СТРУНА

Перейдем теперь к обсуждению гетеротической струны Гросса, Харви, Мартинека и Рома [6]. В предыдущей главе мы видели, что для сокращения аномалий необходимо использовать либо группу $O(32)$, либо группу $E_8 \otimes E_8$. Однако мы также видели, что введение множителей Чана–Патона невозможно для исключительных групп. Следовательно, для генерирования изоспиновой группы $E_8 \otimes E_8$ необходимо использовать механизм компактификации.

Гетеротическая струна является замкнутой струной с необычными чертами, обусловленными отдельной компактификацией левого и правого секторов. В левом секторе, являющемся чисто бозонным, возьмем 26-мерную струну, у которой 16 измерений скомпактифицированы на тор, генерируемый решеткой. (16-мерная решетка, которую мы в конечном счете выберем, будет решеткой группы $E_8 \otimes E_8$ или группы $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$.)

Сектор правых мод, с другой стороны, является суперсимметричным, т.е. содержит майорана-вейлевское фермионное поле Грина–Шварца $S^a(\tau - \sigma)$, где индекс a пробегает от 1 до 8 (в калибровке светового конуса), и пространственно-временное струнное поле X^i :

Левые моды	Правые моды
$X^i(\tau + \sigma)$	$X^i(\tau - \sigma)$
$X^I(\tau + \sigma)$	$S^a(\tau - \sigma)$

Здесь индекс I , помечающий направления на 16-мерной решетке, пробегает от 1 до 16, а i , являющийся пространственно-временным индексом, пробегает в калибровке светового конуса от 1 до $10-2=8$.

Отметим, что пространственно-временное струнное поле X^I появляется как в левом, так и в правом секторах. Собирая все вместе, в калибровке светового конуса для гетеротической струны получаем следующее действие:

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\partial_a X^I \partial_a X^I + \sum_{I=1}^{16} \partial_a X^I \partial_a X^I + i\bar{S}\gamma^-(\partial_\tau + \partial_\sigma)S \right). \quad (10.2.1)$$

В этом действии мы должны учесть связи, наложенные на различные поля соответствующих секторов:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau - \partial_\sigma)X^I &= 0, \\ \gamma^+ S &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_{11})S = 0, \\ \gamma^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 + \gamma^9). \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Это действие инвариантно относительно преобразования суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta X^I &= (p^+)^{-1/2} \bar{\epsilon} \gamma^I S, \\ \delta S^a &= i(p^+)^{-1/2} \gamma_- \gamma_\mu (\partial_\tau - \partial_\sigma) X^\mu \epsilon. \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

Приведем теперь явный вид разложения полей теории в терминах нормальных мод (заметим, что мы изменили нормировку спиноров по сравнению с (3.8.8)):

$$\begin{aligned} X^I(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}x^I + \frac{1}{2}p^I(\tau - \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^I}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)}, \\ X^I(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}x^I + \frac{1}{2}p^I(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n} e^{2in(\tau + \sigma)}, \\ S^a(\tau - \sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-2in(\tau - \sigma)}, \\ X^I(\tau + \sigma) &= x^I + p^I(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)}. \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

Вид канонических коммутационных соотношений теории можно извлечь прямо из действия. Используя их, можно в свою очередь записать канонические коммутационные соотношения для осцилляторных мод:

$$\begin{aligned} [x^I, p^J] &= i\delta^{IJ}, \\ [\alpha_n^I, \alpha_m^J] &= [\tilde{\alpha}_n^I, \tilde{\alpha}_m^J] = n\delta_{n, -m}\delta^{IJ}, \\ [\alpha_n^I, \tilde{\alpha}_m^J] &= 0, \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\alpha}_n^I, \tilde{\alpha}_m^J] &= n \delta_{n, -m} \delta^{IJ}, \\ \{S_n^a, \bar{S}_m^b\} &= (\gamma^+ h)^{ab} \delta_{n, -m}, \end{aligned}$$

где h -оператор проекции на состояния определенной киральности $h = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{11})$.

(Есть один коммутатор, требующий особого внимания. Отметим, что на компактифицированные степени свободы наложены связи, соответствующие рассмотрению только левых мод. Поэтому при квантовании этих мод следует учитывать наложенные связи, иначе теория будет противоречивой. К счастью, единственное изменение, к которому приводят эти ограничения, заключается в умножении правой части канонических коммутационных соотношений на $1/2$:

$$[x^I, p^J] = \frac{1}{2} i \delta^{IJ}. \quad (10.2.6)$$

Это может быть проверено непосредственно при использовании формулировки связей в терминах скобки Дирака или проверкой того, что определенный по-новому коммутатор согласован со связями.)

Определим оператор числа состояний для каждого сектора:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2} n \bar{S}_{-n} \gamma^- S_n), \\ \tilde{N} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^I \tilde{\alpha}_n^I). \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

Это означает, что осцилляторы в обоих секторах можно разбить на три группы следующим образом:

Левые моды	Правые моды	
\tilde{a}^i	a^i	(10.2.8)
\tilde{a}^I	S^a	
\tilde{N}	N	

Используя эти определения, находим, как и ранее, что масса может быть записана в виде

$$\frac{1}{4} m^2 = N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2. \quad (10.2.9)$$

К тому же вследствие замкнутости струны имеется дополнительная связь: теория не должна зависеть от выбора начала отсчета координаты σ , как в (2.8.7). Так, если $U(\theta)$ -оператор, поворачивающий замкнутую струну, параметризуемую σ , на угол θ , то физические состояния должны

удовлетворять условию

$$U(\theta)|\text{физ}\rangle = |\text{физ}\rangle. \quad (10.2.10)$$

Для гетеротической струны этот оператор вращения имеет вид

$$U(\theta) = \exp \left\{ 2i\theta \left(N - \tilde{N} + 1 - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2 \right) \right\}. \quad (10.2.11)$$

Действуя на произвольную функцию от σ , этот оператор производит следующее преобразование:

$$U(\theta) F(\sigma) U^{-1}(\theta) = F(\sigma + \theta). \quad (10.2.12)$$

Чтобы на физических состояниях имело место равенство $U(\theta) = 1$, мы должны обеспечить выполнение следующего условия связи:

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2. \quad (10.2.13)$$

До сих пор мы не конкретизировали явный вид 16-мерной решетки. Чтобы фиксировать теорию, возьмем пространство в виде

$$T^{16} = \frac{R^{16}}{\Lambda}, \quad (10.2.14)$$

где Λ – произвольная пока решетка в 16 измерениях.

Натянем эту 16-мерную решетку на базисные векторы

$$e_i^T. \quad (10.2.15)$$

Компактификация 16-мерного пространства с помощью решетки означает просто, что если мы идем в направлении L^I , определяемом одним из векторов решетки, то в конечном счете мы вернемся в ту же самую точку. Потребуем, чтобы в этом базисе координата центра масс струны была периодичной вдоль любого базисного вектора:

$$\begin{aligned} X^I &= X^I + 2\pi L^I, \\ L^I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I R_i. \end{aligned} \quad (10.2.16)$$

Здесь n_i – целые числа, а R_i – радиусы различных компактифицированных измерений. Таким образом, если мы пойдем в любом направлении, задаваемом базисным вектором, то мы вернемся обратно в первоначальное положение. Это налагает нетривиальное ограничение на импульсы. Из обычной квантовой механики мы знаем, что $2p^I$ является генератором трансляций в I -м направлении. Таким образом, периодичность означает, что оператор сдвига, действующий на состояния, должен иметь собственное значение, равное единице

$$e^{i2\pi p^I \cdot L^I} = 1. \quad (10.2.17)$$

Этот оператор просто генерирует сдвиг в (10.2.16) и производит полный

обход вокруг тора в направлении I до тех пор, пока мы не вернемся в исходную точку.

Поэтому канонические импульсы должны быть определены формулой

$$p^I = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I} / R_i, \quad (10.2.18)$$

где m_i — целые числа, а e^{*I} определяют дуальную решетку Λ^* , так что

$$\delta_{ij} = \sum_{I=1}^D e_i^I e_j^{*I}. \quad (10.2.19)$$

Здесь необходимо отметить, что используемая при компактификации решетка не является произвольной. Во-первых, она должна быть *четной решеткой* в силу уравнения связи (10.2.13), возникающего из требования инвариантности гильбертова пространства относительно сдвигов вдоль σ . Заметим, что оператор $U(\theta)$ в (10.2.11) можно положить на пространстве Фока равным единице, только если $(1/2)(p^I)^2 =$ целое число, т. е.

$$(p^I)^2 = \text{четное целое число}. \quad (10.2.20)$$

Следовательно, числа намотки L^I должны быть координатами векторов на целочисленной четной решетке.

Метрический тензор для решетки, соответствующей группе Ли, определяется как

$$g_{ij} = \sum_{I=1}^{16} e_i^I e_j^I. \quad (10.2.21)$$

Получаем, следовательно, что компоненты метрики должны быть целочисленными, а g_{ii} — четными. Во-вторых, вследствие модулярной инвариантности решетка должна быть *автодуальной* (т. е. векторы на решетке должны быть равны векторам на дуальной решетке), что станет более очевидным после обсуждения однопетлевой диаграммы в § 10.6. Существует очень мало четных автодуальных решеток. Они определены только в $8n$ измерениях. В восьми измерениях известна только одна решетка Γ_8 , являющаяся корневой решеткой группы E_8 . В шестнадцати измерениях существует только две таких решетки,

$$\Gamma_8 \times \Gamma_8; \quad \Gamma_{16}, \quad (10.2.22)$$

соответствующих группам $E_8 \otimes e_8$ и $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$. Поэтому мы очень ограничены в выборе калибровочной группы.

Метрика для корневой решетки группы E_8 имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & & & -1 & 2 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{array} \right. \quad (10.2.23)$$

Есть различные способы описания решетки корней для группы E_8 . Один из простейших заключается в следующем. Мы задаем 84 корневых вектора в виде

$$\pm e_i \pm e_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq 7, \quad (10.2.24)$$

128 корневых векторов в виде

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm \dots \pm e_8) \quad (10.2.25)$$

и 28 векторов выбираем в виде

$$\pm e_i \pm e_8. \quad (10.2.26)$$

Добавляя 8 векторов из картановской подалгебры, получаем в итоге 248 генераторов, образующих присоединенное представление группы E_8 .

Далее в этой главе мы используем понятие *просто сплетенных групп*, т. е. групп, все корни которых имеют равную длину. Такими группами являются группы типа A , D и E (см. приложение).

Перечислим решетки, определяющие группы Ли, с которыми мы встретились при обсуждении гетеротической струны:

Решетка	Корни
Четная	$(p^I)^2 = \text{четные числа}; (g_{ii} = \text{четные})$
Автодуальная	$\Lambda = \Lambda^*; (\det g_{ij} = 1)$
Просто сплетенная	Одинаковая длина корней; (A, D, E)

Эти решетки важны, поскольку условие $U(\theta) = 1$ вынуждает нас брать четные решетки, а условие модулярной инвариантности заставляет (как мы увидим в § 10.6) налагать на них условие автодуальности:

$$U(\theta) = 1 \rightarrow \text{четность решетки};$$

Модулярная инвариантность \rightarrow автодуальность решетки.

В шестнадцати измерениях единственными четными автодуальными решетками являются корневые решетки групп $E_8 \otimes E_8$ и $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$.

§ 10.3. СПЕКТР СОСТОЯНИЙ

Изучим теперь спектр состояний теории. Прежде всего заметим, что правый сектор теории обладает явной пространственно-временной суперсимметрией. Варьируя по полям, нетрудно получить генераторы пространственно-временной суперсимметрии, что позволит нам, как мы видели в предыдущих главах, построить ток, соответствующий данной симметрии. Ранее в (3.8.22) мы нашли, что операторы суперсимметрии, действующие в правом секторе, в калибровке светового конуса могут быть записаны в виде

$$Q^a = i\sqrt{p^+} (\gamma^+ S_0)^a + 2i(p^+)^{-1/2} \sum_n (\gamma_i S_{-n})^a \alpha_n^i. \quad (10.3.1)$$

Используя канонические коммутационные соотношения, находим

$$\{Q^a, Q^b\} = -2(h\gamma^\mu P_\mu)^{ab}. \quad (10.3.2)$$

Анализируя левый сектор, отметим, что изоспин вводится совершенно иным образом, нежели множители Чана–Патона. В отличие от обычного подхода Чана–Патона, где амплитуды просто умножаются на след от произведения генераторов, изоспиновые множители, возникающие в процессе компактификации, увеличивают число изотопически допустимых состояний до астрономических размеров. Заметим, что изотопический индекс I является индексом мод $\tilde{\alpha}_n^I$, что сильно увеличивает число допустимых состояний фоковского пространства.

Вообще говоря, поскольку левый и правый секторы фактически не связаны друг с другом, векторы состояний фоковского пространства гетеротической струны будут тензорным произведением векторов состояний из левого и правого секторов:

$$|0\rangle_R \times |0\rangle_L. \quad (10.3.3)$$

При рассмотрении низшего уровня изучим сначала правый сектор. Как и ранее в (3.8.13) и (3.8.14), восемь фермионных $|a\rangle$ и восемь бозонных $|i\rangle$ состояний в основном состоянии суперструны могут быть выражены друг через друга:

$$|a\rangle_R = \frac{i}{8} (\gamma_i S_0)^a |i\rangle_R, \quad (10.3.4)$$

$$|i\rangle_R = \frac{i}{16} [\bar{S}_0 \{\gamma_i, \gamma_+\}]^a |a\rangle_R.$$

Таким образом, мы имеем $8+8=16$ состояний в правом секторе безмассовых мод.

Изучим теперь левый сектор. Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle_L \rightarrow 8 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L \rightarrow 16 \text{ состояний,} \\ |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle \rightarrow 480 \text{ состояний.} \end{array} \right. \quad (10.3.5)$$

(Важно понимать, что такая запись спектра состояний нарушает явную симметрию $E_8 \otimes E_8$. Чтобы увидеть это, заметим, что 16 операторов a^i , число которых соответствует размерности корневой решетки группы $E_8 \otimes E_8$, не образуют представления этой группы. Аналогично, векторы $|p^i; (p^i)^2 = 2\rangle$ соответствуют 480 корням группы $E_8 \otimes E_8$ длины два. Однако они также не образуют представления этой группы. Только когда мы сложим 16 и 480 и образуем 496 состояний, мы в конечном счете получим присоединенное представление группы $E_8 \otimes E_8$. На безмассовом уровне возможно объединение состояний в мультиплеты группы $E_8 \otimes E_8$, но это становится все более затруднительным для уровней с возрастающей массой. Позже мы приведем доводы, основанные на алгебрах Каца–Мури, используя которые можно показать, что весь спектр состояний является в действительности симметричным относительно группы $E_8 \otimes E_8$.)

На безмассовом уровне мы получаем спектр состояний перемножением правых и левых мод. Полное число состояний на низшем уровне гетеротической струны равняется, следовательно, произведению числа состояний в левом и правом секторах: $16 \times 504 = 8064$. Разложение этих состояний на мультиплеты таково. Среди 8064 состояний 128 принадлежат мультиплету ($N = 1, D = 10$)-супергравитации (в калибровке светового конуса):

$$\text{Супергравитация} \rightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |i \text{ или } a\rangle_R. \quad (10.3.6)$$

Если разложить этот мультиплет на различные состояния, то найдем

$$\begin{aligned} \text{Гравитон} &\rightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |j\rangle_R + (i \leftrightarrow j), \\ \text{Антисимм. тензор} &\rightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |j\rangle_R - (i \leftrightarrow j), \\ \text{Гравитино} &\rightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |0\rangle_R. \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Другие состояния принадлежат теории супер-Янга–Миллса с группой $E_8 \otimes E_8$. Например, мультиплет (A_μ^a, ψ^a) теории супер-Янга–Миллса находится в присоединенном представлении группы $E_8 \otimes E_8$, имеющем 496 состояний. Эти 496 изотопических состояний образованы 480 + 16 состояниями, содержащимися в левом секторе:

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L + |p^i; (p^i)^2 = 2\rangle_L. \quad (10.3.8)$$

Таким образом, мультиплет супер-Янга–Миллса может быть представлен как 496×8 состояний:

$$\text{Супер-Янг–Миллс} \rightarrow [\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L + |p^i\rangle_L] \times |i \text{ или } a\rangle_R. \quad (10.3.9)$$

Короче говоря, мы имеем в точности безмассовые поля ($m^2 = 0$) 10-мерных теорий супергравитации и супер-Янга–Миллса.

Напомним, что мы должны были взять 480 + 16 для того, чтобы получить неприводимое представление группы $E_8 \otimes E_8$. Это означает, вообще говоря, что фоковское пространство гетеротической струны не расщепляется явным образом на мультиплеты группы $E_8 \otimes E_8$. На

следующем уровне, например, состояния группируются в неприводимые представления алгебры этой группы только на последнем шаге вычислений.

На следующем уровне, где $m^2 = 8$, мы имеем в правом секторе 128 бозонов и 128 фермионов:

$$128 \text{ бозонов: } \begin{cases} \alpha_{-1}^i |j\rangle_R, \\ S_{-1}^a |b\rangle_R, \end{cases} \quad (10.3.10)$$

$$128 \text{ фермионов: } \begin{cases} \alpha_{-1}^i |a\rangle_R, \\ S_{-1}^a |i\rangle_R. \end{cases}$$

Отметим, что в (10.3.10) мы образовали бозоны с помощью тензорного произведения двух фермионов.

Левый сектор, содержащий 73 764 состояния, значительно более сложен. Всего мы имеем, следовательно, $256 \times 73\,764 = 18\,883\,584$ состояния. Среди них скалярными являются

$$\text{Скаляры: } \begin{cases} |p^I, (p^I)^2 = 4\rangle_L \rightarrow 61\,920 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^I |p^J, (p^J)^2 = 2\rangle_L \rightarrow 7680 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J |0\rangle_L \rightarrow 136 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_2^I |0\rangle_L \rightarrow 16 \text{ состояний,} \end{cases} \quad (10.3.11)$$

что в сумме дает 69 752 скалярных состояния. (Для подсчета числа состояний $|p^I, (p^I)^2 = 4\rangle$ использован тот факт, что на решетке Γ_{16} число векторов с квадратом длины, равным $2m$ для целого m , равно произведению 480 на сумму седьмых степеней делителей m . При этом получаем $480(1 + 2^7) = 61\,920$ таких состояний [6].)

На первый взгляд совсем не очевидно, что эти 69 752 скалярных состояния могут быть сгруппированы в мультиплеты группы $E_8 \otimes E_8$. Однако тщательный анализ показывает, что они могут быть сгруппированы в мультиплеты этой группы следующим образом:

$$(3875,1) + (1,3875) + (248,248) + (248,1) + (1,248) + (1,1) + (1,1). \quad (10.3.12)$$

3976 векторов левого сектора разбиты на группы следующим образом:

$$\text{Векторы: } \begin{cases} \tilde{\alpha}_{-1}^i |p^I, (p^I)^2 = 2\rangle \rightarrow 3840 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_{-2}^i |0\rangle_L \rightarrow 8 \text{ состояний,} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^I |0\rangle_L \rightarrow 128 \text{ состояний.} \end{cases} \quad (10.3.13)$$

Имеем также тензорные состояния:

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle_L \rightarrow 36 \text{ состояний.} \quad (10.3.14)$$

Таким образом, полное число состояний левого сектора равно 73 764.

На более высоких уровнях степень вырождения растет экспоненциально:

$$d(M) \sim e^{(2 + \sqrt{2})\pi\sqrt{\alpha'} M}. \quad (10.3.15)$$

Не было очевидно, что эти состояния могут быть сгруппированы в мультиплеты группы $E_8 \otimes E_8$. На более высоких уровнях кажется невозможным сгруппировать все состояния с более высокими массами в неприводимые представления этой группы. Нам необходима, конечно, более высокая симметрия для доказательства этого во всех порядках. Возможность такой группировки мы докажем с помощью алгебр Каца–Мури в § 10.7.

§ 10.4. КОВАРИАНТНАЯ И ФЕРМИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКИ

Хотя спектр гетеротической струны проанализирован в калибровке светового конуса, мы можем также выписать явно ковариантную версию первично квантованного действия. Начнем с записи в ковариантной форме правого суперсимметричного сектора. Выберем из генераторов группы супер-Пуанкаре генераторы P_μ и Q^α . Обобщим оператор трансляций в направлении x . Элемент группы супертрансляций имеет вид

$$h = e^{iX \cdot P + i\theta Q}, \quad (10.4.1)$$

где θ – десятимерный спинор. Этот оператор сдвинет функцию от координат на X и фермионную координату на θ . Введем теперь ($\alpha = 1, 2$)

$$\Pi_\alpha = h^{-1} \partial_\alpha h = (\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\alpha \theta) P_\mu + \partial_\alpha \theta Q. \quad (10.4.2)$$

Теперь правый сектор действия Грина–Шварца (GS) может быть записан в виде

$$S_R = \int d^2 z \frac{1}{2} e \text{Tr}(\Pi_\alpha \Pi_\beta) e^\alpha_a e^{a\beta} + \int d^3 \xi \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(\Pi_\alpha \Pi_\beta \Pi_\gamma) + \int d^2 z e \lambda^{++} (e^a_{\pm} \Pi_\alpha)^2. \quad (10.4.3)$$

Первый член в правой части является обычным квадратичным членом действия GS. Второе слагаемое является нелинейным членом действия GS, записанным в виде члена Весса–Зумино, и представляет собой трехмерный интеграл по поверхности, граница которой совпадает с мировой поверхностью струны. Сумму первых двух слагаемых можно считать альтернативной формулировкой действия GS. Третье слагаемое в действии необходимо для учета связей в правом секторе.

Аналогично, для левого сектора, содержащего изотопический сектор, действие также может быть записано ковариантно, но при этом необходимо выбрать *либо фермионы, либо бозоны*. Из теории групп Ли мы знаем, что генераторы алгебры Ли могут быть записаны *либо* как произведение бозонных, *либо* как произведение фермионных полей.

Таким образом, имеем

$$S_L = \frac{1}{2} i \int d^2 z e \psi^I \partial_a \psi^I e_a^\alpha, \quad (10.4.4)$$

где индекс $I = 1, \dots, 32$ нумерует фундаментальное представление группы $SO(32)$. Важно заметить, что эти фермионы преобразуются как лоренцевы скаляры. Индекс I является внутренним индексом. Для фермионных осцилляторных мод ψ_n^I можно, конечно, выбрать граничные условия либо Рамона (периодические), либо Невё-Шварца (антипериодические).

Для бозонного представления тот же самый изотопический сектор можно записать в виде

$$S_L = \int d^2 z \frac{1}{2} e (e_a^\alpha \partial_a X^I)^2 \pm e \lambda^{-} (e_-^\alpha \partial_a X^I)^2, \quad (10.4.5)$$

где $I = 1, \dots, 16$. Это, конечно, дает использованное ранее представление светового конуса, в котором мы нарушили лоренцеву ковариантность. (На первый взгляд может показаться странным, что левый и правый секторы помечены знаками \pm , что, похоже, выделяет лоренц-неинвариантные направления в двух измерениях. Однако приведенная выше формулировка является репараметризационно инвариантной, поскольку направления \pm расположены в касательном пространстве. Таким образом, двумерная репараметризационная инвариантность остается нетронутой.)

Выпишем теперь полное пространственно-временное действие (без изоспиновой части), содержащее как левый, так и правый секторы ковариантным образом:

$$S = \int d^2 z e \left\{ \frac{1}{2} (e_a^\alpha \partial_a X^\mu)^2 - \frac{1}{2} i \psi^\mu \rho^- e_-^\alpha \partial_a \psi_\mu + \frac{1}{2} i (\chi_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu) \partial_\beta X_\mu \right\}. \quad (10.4.6)$$

Это действие имеет суперсимметрию

$$\begin{aligned} \delta e_-^\alpha &= i \varepsilon \rho_- \xi^\alpha, \\ \delta \chi_\alpha &= -2 \nabla_\alpha \varepsilon, \\ \delta X^\mu &= i \varepsilon \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu &= [\partial_\alpha X^\mu + i \chi_\alpha \psi^\mu \rho^\alpha] \varepsilon. \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

Выберем теперь вместо калибровки светового конуса конформную калибровку. При этом действие для гетеротической струны приводится к виду

$$S = \frac{1}{2} \int d^2 z ((\partial_\alpha X^\mu)^2 + i \psi^\mu \rho^- \partial_- \psi_\mu + i \psi^I \rho^+ \partial_+ \psi^I). \quad (10.4.8)$$

Целью проведенного рассмотрения было показать, что ковариантная

версия гетеротической струны существует и можно использовать фермионные или бозонные поля для записи изоспиновой части действия. Мы не привязаны к формулировке в терминах бозонных полей и к калибровке светового конуса.

Следует, однако, заметить, что даже в ковариантной формулировке теория гетеротических струн выглядит несколько неуклюжей и надуманной. Возможно, будущая версия этой теории будет иметь более элегантный вид.

§ 10.5. ДЕРЕВЬЯ

Для гетеротической струны дерева строятся практически тем же способом, как и для суперструны в калибровке светового конуса, за исключением того факта, что вершины имеют теперь левые и правые компоненты. Кроме того, мы должны принять во внимание компактификацию на 16-мерную решетку.

Для описания супергравитационного мультиплетта введем спинорное поле $U^{\mu a}$ спина 3/2 и тензор поляризации гравитона $\rho^{\mu\nu}$. На массовой поверхности в калибровке светового конуса мы выберем внешние частицы безмассовыми и поперечными:

$$\rho^{+\mu} = \rho^{\mu+} = k_{\mu} \rho^{\mu\nu} = 0,$$

$$U^{+a} = k_{\mu} U^{\mu a} = \gamma^{+} U^{\mu a} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{11}) U^{\mu a} = 0. \quad (10.5.1)$$

По аналогии с введенной в гл. 3 вершиной суперструны в калибровке светового конуса можно ввести вершинные функции для гетеротической струны так же, как введены вершины в (3.9.2), за исключением того, что необходима еще одна вставка P^{μ} , дающая дополнительный лоренцев индекс. Кроме того, вершины являются *прямым произведением левых и правых вершин*. В супергравитационном секторе для вершин, испускающих бозоны и фермионы, мы выберем

$$\text{Супергравитация: } \begin{cases} V_B = \rho_{\mu\nu}(k) \int_0^{\pi} d\sigma B^{\mu} \tilde{P}^{\nu} e^{ik \cdot X}, \\ V_F = \int_0^{\pi} d\sigma F^a \tilde{P}_{\nu} U^{a\nu}(k) e^{ik \cdot X}, \end{cases} \quad (10.5.2)$$

где использовали определения из (3.9.6)

$$k^{+} = 0,$$

$$B^i = P^i + \frac{1}{2} k^j R^{ij},$$

$$P^i = \frac{dX^i}{d(\tau - \sigma)} = \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)},$$

$$R^{ij} = \frac{1}{8} \bar{S} \gamma^{ij} S,$$

$$\bar{F}^a = \frac{1}{2} i (p^+)^{-1/2} [\bar{S} \gamma \cdot P - \frac{1}{6} : R^{ij} k^i \bar{S} \gamma^j :]^a, \quad (10.5.3)$$

$$\tilde{P}^i = \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i e^{-2m(\tau + \sigma)}.$$

(Отметим, что мы выбрали тот базис, в котором k^+ обращается в нуль, что значительно упрощает вычисления. Вычисление при ненулевом k^+ является достаточно сложным, поскольку требует выполнения преобразования Лоренца с генераторами M^{-i} , нарушающими симметрию.)

Могут быть также выписаны вершинные функции для калибровочных полей. Некоторое усложнение, однако, заключается в том, что 496 векторных полей в присоединенном представлении калибровочной группы могут быть разбиты на 16 «нейтральных» калибровочных бозонов, преобразующиеся как элементы картановской подалгебры, и 480 «заряженных» полей, соответствующих корням K^I с $(K^I)^2 = 2$. Нейтральные поля определены формулой

$$|i\rangle_R \times \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L, \quad (10.5.4)$$

а заряженные — формулой

$$|i\rangle_R \times |K^I; (K^I)^2 = 2\rangle_L. \quad (10.5.5)$$

Таким образом, для калибровочных бозонов мы должны иметь два типа вершин. Вершины для нейтральных калибровочных полей в сущности те же, что и раньше, следует только заменить лоренцев индекс на внутренний:

$$\text{Нейтральные калибровочные поля:} \quad \begin{cases} V_B^I = \rho_\mu^I(k) \int_0^\pi d\sigma B^\mu \hat{P}^I e^{ik_\mu X^\mu}, \\ V_F^I = \int_0^\pi d\sigma F^a \hat{P}^I U^{aI}(k) e^{ik_\mu X^\mu}, \end{cases} \quad (10.5.6)$$

где

$$\hat{P}^I = \frac{dX^I}{d(\tau + \sigma)} = p^I + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2m(\tau + \sigma)}.$$

Можно выписать и вершины испускания заряженных калибровочных частиц, являющиеся функциями внутреннего импульса K^I :

$$\text{Заряженные калибровочные поля} \quad \begin{cases} V_B^K = \rho_\mu^K(k) \int_0^\pi d\sigma B^\mu e^{ik_\mu X^\mu} : e^{2iK^I X^I} : C(K), \\ V_F^K = \int_0^\pi d\sigma F^a U^a(k) e^{ik_\mu X^\mu} : e^{2iK^I X^I} : C(K), \end{cases} \quad (10.5.7)$$

где нормально упорядоченная часть вершины возникает из левого сектора, а C мы определим ниже.

Один из способов проверки того, что мы имеем правильный вид вершинных функций, заключается в непосредственном действии на них оператором суперсимметрии (10.3.1), который должен переводить бозонные вершины в фермионные и наоборот. Однако доказательство, аналогичное доказательству, данному в § 3.9, весьма громоздко и потому будет опущено.

Пропагатор для данной системы также может быть легко найден обобщением пропагатора замкнутой струны. Нам представляется удобным устранить из вершинной функции зависимость от σ и τ и перенести ее в пропагатор. Это всегда может быть сделано, поскольку матрица сдвига по σ дается, как мы видели ранее, матрицей $U(\sigma)$, а оператор сдвига по τ совпадает с гамильтонианом H в калибровке светового конуса:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + 2N + 2(\tilde{N} - 1) + \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2. \quad (10.5.8)$$

До этого устранения σ и τ вершинная функция имеет вид

$$V(k, \tau) = e^{iH\tau} \int_0^\pi d\sigma U(\sigma) \tilde{V}_0 U^\dagger(\sigma) e^{-iH\tau}.$$

Мы же хотим получить следующую вершинную функцию:

$$\tilde{V}_0 = \tilde{V}(\tau = \sigma = 0). \quad (10.5.9)$$

Пропагатор, который теперь содержит интегрирования по σ и τ , принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty d\tau \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\pi} e^{-H\tau} U(\sigma) \\ &= \int_{|z| < 1} d^2z |z|^{(1/4)p^2 - 2} z^N z^{\tilde{N} - 1 + (1/2)\sum_I (p^I)^2} \\ &= \frac{1}{H} \delta(N - \tilde{N} + 1 - \frac{1}{2}\sum_I (p^I)^2). \end{aligned} \quad (10.5.10)$$

Пропагатор (10.5.10) имеет в точности тот вид, который и следовало ожидать. Дельта-функция просто обеспечивает выполнение связей (10.2.13), что делает состояния не зависящими от сдвигов по σ , а полюсы появляются из-за наличия в знаменателе гамильтониана в калибровке светового конуса.

При этом N -точечная функция может быть записана как

$$\langle 0, k_1 | \tilde{V}(k_2) \Delta \dots \Delta \tilde{V}(k_{N-1}) | 0, k_N \rangle. \quad (10.5.11)$$

Построим теперь амплитуду рассеяния четырех безмассовых калибровочных бозонов с импульсами k_i , поляризациями ρ_i и зарядами

K_i , где

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 k_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 K_i &= 0, \\ K_i^2 &= 0. \end{aligned} \tag{10.5.12}$$

Вычисление четырехточечной функции является длинным, но простым:

$$A_4 = g^2 K(\rho_i, k_i) \frac{\Gamma\left(-1 + \frac{u}{8} + \frac{U}{2}\right) \Gamma\left(-1 + \frac{s}{8} + \frac{S}{2}\right) \Gamma\left(-1 + \frac{t}{8} + \frac{T}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{u}{8}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{8}\right) \Gamma\left(1 - \frac{t}{8}\right)}, \tag{10.5.13}$$

где

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{4} [st\rho_1 \cdot \rho_3 \rho_2 \cdot \rho_4 + su\rho_2 \cdot \rho_3 \rho_1 \cdot \rho_4 + tu\rho_1 \cdot \rho_2 \rho_3 \cdot \rho_4] \\ & -\frac{1}{2} s [\rho_1 \cdot k_4 \rho_3 \cdot k_2 \rho_2 \cdot \rho_4 + \rho_2 \cdot k_3 \rho_4 \cdot k_1 \rho_1 \cdot \rho_3 \\ & + \rho_1 \cdot k_3 \rho_4 \cdot k_2 \rho_2 \cdot \rho_3 + \rho_2 \cdot k_4 \rho_3 \cdot k_1 \rho_1 \cdot \rho_4] \\ & -\frac{1}{2} t [\rho_2 \cdot k_1 \rho_4 \cdot k_2 \rho_3 \cdot \rho_1 + \rho_3 \cdot k_4 \rho_1 \cdot k_2 \rho_2 \cdot \rho_4 \\ & + \rho_2 \cdot k_4 \rho_1 \cdot k_3 \rho_3 \cdot \rho_4 + \rho_3 \cdot k_1 \rho_4 \cdot k_2 \rho_2 \cdot \rho_1] \\ & -\frac{1}{2} u [\rho_1 \cdot k_2 \rho_4 \cdot k_3 \rho_3 \cdot \rho_2 + \rho_3 \cdot k_4 \rho_2 \cdot k_1 \rho_1 \cdot \rho_4 \\ & + \rho_1 \cdot k_4 \rho_2 \cdot k_3 \rho_3 \cdot \rho_4 + \rho_3 \cdot k_2 \rho_4 \cdot k_1 \rho_1 \cdot \rho_2], \end{aligned} \tag{10.5.14}$$

причем ε - фазовый фактор, а

$$\begin{aligned} s &= -(k_1 + k_2)^2, \\ t &= -(k_2 + k_3)^2, \\ u &= -(k_1 + k_3)^2, \\ s + t + u &= 0, \\ S &= (K_1 + K_2)^2, \\ T &= (K_2 + K_3)^2, \\ U &= (K_1 + K_3)^2, \\ S + T + U &= 8. \end{aligned} \tag{10.5.15}$$

§ 10.6. ОДНОПЕТЛЕВАЯ АМПЛИТУДА

Подлинной проверкой теории является вычисление однопетлевой диаграммы [6, 7]. Потребуем, чтобы в однопетлевом приближении теория была конечной. В терминах введенных выше вершин и пропагаторов нетрудно выписать теперь однопетлевую диаграмму:

$$A_{\text{loop}} = \text{Tr}(\Delta V(N) \Delta \dots \Delta V(1)), \quad (10.6.1)$$

где мы рассматриваем рассеивание заряженными калибровочными полями.

Как и прежде, вычисление следа является длинным, но непосредственным. После вычисления следа имеем

$$A_{\text{loop}} = \bar{\epsilon} K \int \prod_{i=1}^4 d^2 z_i |w|^{-2} \left[\frac{-4\pi}{\ln |w|} \right]^5 \bar{w}^{-1} f(\bar{w})^{-24} \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq 4} [\chi(c_{ji}, w)]^{(1/2)k_i \cdot k_j} [\psi(\bar{c}_{ji}, \bar{w})]^{K_i \cdot K_j} L, \quad (10.6.2)$$

где

$$\chi(z, w) = \exp \left[\frac{\ln^2 |z|}{2 \ln |w|} \right] \left| \frac{1-z}{\sqrt{z}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-w^m z)(1-w^m/z)}{(1-w^m)^2} \right|, \quad (10.6.3)$$

$$\psi(\bar{z}, \bar{w}) = \exp \left[\frac{\ln^2 \bar{z}}{2 \ln \bar{w}} \right] \frac{1-\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(1-\bar{w}^m \bar{z})(1-\bar{w}^m/\bar{z})}{(1-\bar{w}^m)^2} \right), \quad (10.6.4)$$

$$L(\bar{w}, \bar{z}_i, K_i) = \sum_{P \in \Lambda} \exp \left[\frac{1}{2} \ln \bar{w} \left(P - \sum_{i=1}^4 \frac{\ln \bar{z}_i}{\ln \bar{w}} Q_i \right)^2 \right] \quad (10.6.5)$$

и где

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i-1} K_j, \\ v_i = \sum_{j=1}^i \frac{\ln z_j}{2\pi i}, \\ \tau = \frac{\ln w}{2\pi i}, \quad (10.6.6)$$

$$c_{ji} = z_i z_{i+1} \dots z_j.$$

Здесь сумма по $P \in \Lambda$ означает сумму по всем точкам на решетке, а K является кинематическим множителем, совпадающим с найденным для древесного приближения в (10.5.14). Поскольку окончательный результат имеет такое большое сходство с однопетлевой амплитудой суперструны, нетрудно показать, что амплитуда инвариантна относительно преобразований

$$\begin{cases} v_i \rightarrow v_i + 1, \\ v_i \rightarrow v_i + \tau. \end{cases} \quad (10.6.7)$$

Несколько более трудным является доказательство того, что интеграл инвариантен относительно преобразований $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$, что необходимо для доказательства модулярной инвариантности.

К счастью, большинство членов под интегралом совпадают с найденными в (5.5.1) для однопетлевой амплитуды. Однако мы должны проверить инвариантность членов, не совпадающих с ранее найденными, т. е. зависящих от решетки множителей.

Как и ранее, функция Θ преобразуется, если мы наложим на ее аргументы условие модулярной инвариантности, следующим образом:

$$\Theta_1\left(\frac{\bar{v}}{c\bar{\tau} + d} \middle| \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d}\right) = \varepsilon(c\bar{\tau} + d)^{1/2} \exp\left(\frac{-i\pi c\bar{v}^2}{c\bar{\tau} + d}\right) \Theta_1(\bar{v}|\bar{\tau}), \quad (10.6.8)$$

где $\varepsilon^8 = 1$. Поскольку функция χ может быть записана через тета-функции, мы имеем

$$\chi\left(\frac{v}{c\tau + d} \middle| \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{1}{|c\tau + d|} \chi(v|\tau).$$

Функция распределения $f(w)$ также преобразуется по формулам

$$f(w) = (i/\tau)^{1/2} w^{-1/2} w'^{1/24} f(w'),$$

$$\tau = \frac{\ln w}{2\pi i} \rightarrow \frac{-1}{\tau} = \frac{-2\pi i}{\ln w'}. \quad (10.6.9)$$

Наиболее важным преобразованием является преобразование L :

$$L(\bar{w}, \bar{z}_i, K_i) = \left(\frac{-2\pi}{\ln \bar{w}}\right)^8 \sum_{P \in \Lambda} \exp\left[\frac{2\pi^2}{\ln \bar{w}} \left(P - \sum_{i=1}^N \frac{Q_i \ln \bar{z}_i}{2\pi i}\right)^2 + \frac{1}{2\ln \bar{w}} \left(\sum_{i=1}^N Q_i \ln \bar{z}_i\right)^2\right]. \quad (10.6.10)$$

Последнее тождество в значительной степени зависит от того, будет ли решетка автодуальной или нет, что, возможно, является наиболее серьезным аргументом при выборе такого ограничения на решетку. Соберем все эти множители вместе:

$$\bar{w}^{-1} f(w)^{-24} \prod_{1 \leq i \leq j \leq 4} \psi(\bar{v}_{ij}|\tau)^{K_i \cdot K_j} L(\tau, v_i)$$

$$\rightarrow (\bar{w}')^{-1} f(\bar{w}')^{-24} \bar{\tau}^{12} \left[\prod_{1 \leq i \leq j \leq 4} \psi\left(\frac{-\bar{v}_{ij}}{\bar{\tau}} \middle| \frac{-1}{\bar{\tau}}\right) \bar{\tau} \exp\left(\frac{i\pi \bar{v}_{ij}^2}{\bar{\tau}}\right) \right]^{K_i \cdot K_j}$$

$$\times L\left(\frac{-1}{\bar{\tau}}, \frac{-v_i}{\bar{\tau}}\right) (\bar{\tau})^{-8} \exp\left(-\frac{i\pi}{\bar{\tau}} \left(\sum_{i=1}^4 Q_i \bar{v}_i\right)^2\right). \quad (10.6.11)$$

В (10.6.11) есть два типа множителей, которые, как кажется, нарушают модулярную инвариантность. Это различные степени τ и экспоненты, содержащие $\bar{\tau}$. К счастью, эти два типа множителей устранимы. Мно-

жители, содержащие τ в различных степенях, сокращаются в силу того, что

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq 4} \bar{\tau} K_i \cdot K_j = \bar{\tau}^{-4}.$$

Поэтому получаем $\bar{\tau}^{12-4-8} = 1$. Экспоненциальные множители также исчезают в силу того, что

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} \bar{v}_{ij}^2 K_i \cdot K_j = \left(\sum_{i=1}^4 Q_i \bar{v}_i \right)^2.$$

Как только степени и экспоненты от $\bar{\tau}$ устранены в (10.6.11), мы находим, что эта комбинация является модулярно инвариантной.

Инвариантность амплитуды относительно преобразований $v_i \rightarrow v_i + 1$ и $v_i \rightarrow v_i + \tau$ означает, что можно ограничить область интегрирования:

$$0 < \text{Im } v_i < \text{Im } \tau, \tag{10.6.12}$$

$$-\frac{1}{2} < \text{Re } v_i < \frac{1}{2}.$$

К тому же в случае замкнутой однопетлевой диаграммы в силу инвариантности относительно преобразований $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -1/\tau$ в качестве области интегрирования по τ можно выбрать фундаментальную область:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \text{Re } \tau \leq \frac{1}{2}, \\ |\tau| > 1. \end{cases} \tag{10.6.13}$$

Выбор такой фундаментальной области позволяет нам избежать возможной сингулярности в $\tau = 0$, и, следовательно, мы имеем конечное однопетлевое действие. В нашем подходе модулярная инвариантность сыграла решающую роль при доказательстве того, что амплитуда, как и в случае обычной суперструны, является конечной. Мы можем просто выбрать фундаментальную область, где сингулярности отсутствуют. Однако вычисления не проясняют, почему теория является модулярно инвариантной. Проанализируем простейший случай и выявим причины возникновения модулярной инвариантности. Для упрощения сути дела рассмотрим вакуумную однопетлевую амплитуду без внешних линий.

Определим сначала функцию F (которая появляется в вычислении следа в (10.6.1)):

$$F(\tau, X) = \sum_{L \in \Lambda} e^{-i\pi\tau(L-X)^2}, \tag{10.6.14}$$

где мы суммируем по узлам решетки, X — произвольный 16-мерный вектор на корневой решетке и координатами каждого узла являются

целые числа n_i :

$$L = \sum n_i e_i^I. \quad (10.6.15)$$

Заметим, что функция F периодична, т. е.

$$F(\tau, X) = F(\tau, X + e_i), \quad (10.6.16)$$

поскольку этот сдвиг может быть представлен как переопределение целых чисел n_i . Запишем теперь эту функцию в терминах ее фурье-преобразования \tilde{F} :

$$F(\tau, X) = \sum_{M \in \Lambda^*} e^{-2iM \cdot X} \tilde{F}(\tau, M). \quad (10.6.17)$$

Отметим, что поскольку F периодична, векторы M должны лежать на дуальной решетке:

$$M^I = \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I}. \quad (10.6.18)$$

Чтобы выразить \tilde{F} через F , выполним обратное фурье-преобразование:

$$\tilde{F}(\tau, M) = \int \frac{d^{16} X}{\sqrt{|g|}} e^{2i\pi M \cdot X} F(\tau, X), \quad (10.6.19)$$

где $\sqrt{|g|}$ — объем тора. Теперь подставим выражение для F в предыдущее уравнение. Проинтегрировав, получаем для \tilde{F} следующее явное выражение:

$$\tilde{F}(\tau, M) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tau^{-8} e^{i\pi M^2/\tau}. \quad (10.6.20)$$

Теперь мы хотели бы подставить \tilde{F} в выражение для однопетлевой вакуумной амплитуды. Мы должны вычислить след гамильтониана, содержащего $(p^I)^2$. При вычислении следа появляется функция f :

$$f(\tau) = \tau^4 \sum_{L \in \Lambda} e^{-i\pi\tau L \cdot L}. \quad (10.6.21)$$

Сравнивая с (10.6.14), получаем

$$F(\tau, 0) = f(\tau)\tau^{-4}. \quad (10.6.22)$$

Подставляя теперь выражение для \tilde{F} , получаем следующее выражение для f :

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(-\frac{1}{\tau}\right)^4 \sum_{M \in \Lambda^*} e^{i\pi M \cdot M/\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} f^* \left(-\frac{1}{\tau}\right), \end{aligned} \quad (10.6.23)$$

где f^* есть не что иное, как определенная в (10.6.21) функция f на

дуальной решетке. Это является ключевым результатом.

Итак, мы видим, что *модулярное преобразование* $\tau \rightarrow -1/\tau$ *заменяет решетку дуальной решеткой*. Поэтому для того, чтобы имела место модулярная инвариантность, потребуем, чтобы решетка была автодуальной. Фактически именно модулярная инвариантность приводит к условию инвариантности решетки. Здесь мы видим тесную связь между автодуальностью (что ограничивает наш выбор либо группой $E_8 \otimes E_8$, либо группой $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$) и модулярной инвариантностью. Хотя первоначальный выбор этих групп возникал из требования сокращения аномалий, мы видим, что те же самые группы необходимы для выполнения условия модулярной инвариантности и конечности амплитуды.

§ 10.7. ГРУППА E_8 И АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ

Ранее мы видели, что спектр состояний не обладал явной $E_8 \otimes E_8$ -инвариантностью. С трудом нам удалось показать, что низшие состояния могут быть помещены в неприводимые представления этой группы. Поскольку число состояний быстро возрастает до десятков миллионов, становится затруднительным сгруппировать состояния в мультиплеты группы $E_8 \otimes E_8$.

В этом разделе мы используем развитую в гл. 4 технику алгебр Каца–Муди [8–10] для того, чтобы показать для всех порядков, что спектр гетеротической струны в действительности обладает симметрией $E_8 \otimes E_8$. Мы будем использовать определенные в гл. 4 *вертексные операторы* для генерирования представления алгебры Каца–Муди (что возможно, только если решетка четная и автодуальная, а алгебра имеет уровень 1).

В алгебре мы хотим выбрать базис Шевалле, в котором 496 генераторов разбиты на 16 взаимно коммутирующих генераторов (образующих картановскую подалгебру) и 480 генераторов, соответствующих корневым векторам. Заметим, что 16 генераторов p^I удовлетворяют условию

$$[p^I, p^J] = 0. \quad (10.7.1)$$

Взаимно коммутирующие генераторы p^I всегда могут быть выбраны в качестве базиса картановской подалгебры. Однако построение остальных 480 генераторов более сложно.

Простейшим оператором, имеющим 480 состояний, является вертексный оператор, который можно записать в виде следующего интеграла по замкнутому контуру, окружающему начало координат:

$$E(K) = \oint \frac{dz}{2\pi iz} V(K, z) C(K). \quad (10.7.2)$$

Здесь вершинная функция V определена на решетке (а не на простран-

ве-времени):

$$V(K, z) = : e^{2iK^I X'_I(z)} : , \quad (10.7.3)$$

причем

$$(K^I)^2 = 2, \quad (10.7.4)$$

$$z = e^{2i(\tau + \sigma)},$$

а коцикл $C(K)$ пока не конкретизирован. Отметим, что векторы K^I по определению задают 480 направлений на 16-мерной корневой решетке.

Теперь мы потребуем, чтобы 16 элементов p^I картановской под-алгебры и 480 генераторов $E(K)$, сопоставляемых корням K^I , удовлетворяли коммутационным соотношениям группы $E_8 \otimes E_8$. Это в свою очередь позволит определить оператор C . Попробуем

$$[E(K), E(L)] = \begin{cases} \varepsilon(K, L) E(K + L), & \text{если } (K + L)^2 = 2, \\ K^I p^I, & \text{если } K + L = 0, \\ 0 & \text{в прочих случаях} \end{cases} \quad (10.7.5)$$

и

$$[p^I, E(K)] = K^I E(K), \quad (10.7.6)$$

где $\varepsilon(K, L)$ – структурные константы алгебры со значениями ± 1 .

В некотором смысле мы еще ничего не сделали. Мы просто переписали коммутаторы алгебры $E_8 \otimes E_8$ в хорошо известном базисе Шевалле и потребовали, чтобы наш анзац для $E(K)$ удовлетворял им. Нетривиальным является то, что решение этих уравнений действительно существует, и это фиксирует вид C .

Давайте опустим множитель C и посмотрим, сможем ли мы удовлетворить коммутационным соотношениям. Нетрудно показать, что при $|w| < |z|$ выполняется равенство

$$V(K, z) V(L, w) = (wz)^{-(1/2)K \cdot L} (z - w)^{K \cdot L} : e^{2iK \cdot X(z) + 2iL \cdot X(w)} : , \quad (10.7.7)$$

Отсюда следует, что

$$E_K E_L - (-1)^{K \cdot L} E_L E_K = \oint \frac{dw}{2\pi i w} \frac{dz}{2\pi i z} \times (z - w)^{K \cdot L} (wz)^{-(1/2)K \cdot L} : e^{2iK \cdot X(z) + 2iL \cdot X(w)} : , \quad (10.7.8)$$

где интегрирование по w выполняется так, что $|z| > |w|$ в первом члене и $|z| < |w|$ во втором члене. Внимательно рассматривая последнее выражение, находим, что мы удовлетворили всем тождествам базиса Шевалле, только статистика оказалась нарушенной. Вместо коммутаторов возникают антикоммутаторы. Именно поэтому мы и должны ввести множитель $C(K)$. Условие, которое необходимо наложить на

$C(K)$, имеет вид

$$C(K)C(L) = \varepsilon(K, L)C(K + L). \quad (10.7.9)$$

Оператор $C(K)$ называется «коциклом» или «твистом». Он был введен в определение генератора $E(K)$ для получения правильной статистики. Действуя оператором $C(K)$ на состояния с импульсом p^I , можно показать, что

$$C(K)|p\rangle = \varepsilon(K, p)|p\rangle. \quad (10.7.10)$$

Если мы потребуем ассоциативности закона умножения (10.7.9), то получим ограничения на фазы $\varepsilon(K, L)$. Действуя последовательно операторами C на состояния $|p\rangle$ и требуя ассоциативности умножения, легко получаем

$$\varepsilon(K, L)\varepsilon(K + L, M) = \varepsilon(L, M)\varepsilon(K, L + M). \quad (10.7.11)$$

Мы назовем (10.7.11) условиями два-коцикла. Существует несколько явных представлений для $C(K)$ и фазы $\varepsilon(K, L)$. Всегда можно выбрать

$$\begin{aligned} \varepsilon(K, L)\varepsilon(L, K) &= (-1)^{K \cdot L}, \\ \varepsilon(K, 0) &= -\varepsilon(K, -K) = 1. \end{aligned} \quad (10.7.12)$$

В приложении показано, что генераторы алгебр Ли могут быть выражены через генераторы H_i картановской подалгебры и генераторы E_α , соответствующие корням α . Теперь мы видим точное соответствие между операторами, появляющимися в теории гетеротических струн, и генераторами групп Ли:

Гетеротическая струна	Базис Картана-Вейля	
p^I	H_i	(10.7.13)
$E(K)$	E_α	
K^I	α	

Для завершения доказательства остается только заметить, что 16 генераторов p^I и 480 генераторов $E(K)$ дают все вершины теории (см., например, (10.5.6), (10.5.7)), и поэтому фоковское пространство образовано состояниями, получаемыми действием этих операторов на вакуум. Но поскольку эти генераторы вместе дают 496 генераторов группы $E_8 \otimes E_8$, весь спектр состояний должен быть перегруппирован в сумму неприводимых представлений группы $E_8 \otimes E_8$.

§ 10.8. ДЕСЯТИМЕРНАЯ ТЕОРИЯ БЕЗ СУПЕРСИММЕТРИИ

Материал предыдущих параграфов продемонстрировал решающую роль модулярной инвариантности при установлении свойств гетеротической струны. Естественно возникает вопрос: можно ли построить

новую теорию струн, такую, чтобы она была модулярно инвариантной, но могла бы иметь другую калибровочную группу и другие свойства?

Ранее мы видели, что левый сектор гетеротической струны, описываемый обычно с помощью бозонного поля X^I , можно записать в терминах фермионных полей. Теперь мы хотим показать, что, изменяя граничные условия для фермионных полей, можно получить другую 10-мерную теорию струн, по-прежнему являющуюся модулярно инвариантной, но с полностью нарушенной суперсимметрией. При этом калибровочная группа $E_8 \otimes E_8$ нарушена до $O(16) \times O(16)$. Преимущество этой новой версии заключается в том, что теория становится свободной от аномалий и не содержит тахионов. (Однако она не является ни суперсимметричной, ни конечной.) Такую теорию струн можно рассматривать как некоторую разновидность гетеротической струны.

Введение этой новой струны основано на наблюдении гл. 5, состоящем в том, что теория NS-R (без проекции GSO) не является ни модулярно инвариантной, ни суперсимметричной. Выбор граничных условий NS-R обычно осуществляется только для координаты σ . Однако в общем случае модулярное преобразование отображает область (σ, τ) на (τ, σ) . Поскольку модулярное преобразование может поменять ролями σ и τ , следует быть осторожными при выборе граничных условий также и по координате τ . Таким образом, непосредственное суммирование по состояниям NS-R в замкнутой петле будет в общем случае нарушать модулярную инвариантность.

Если мы рассмотрим замечания, сделанные в разд. 5.9, то получим, что прямое взятие следа только подсчитывает комбинации

$$\begin{aligned} \text{NS-бозон} &\rightarrow (\text{NS}, \text{NS}), \\ \text{R-фермион} &\rightarrow (\text{R}, \text{NS}). \end{aligned} \tag{10.8.1}$$

Однако модулярное преобразование может переставить эти граничные условия. Преобразование

$$\tau \rightarrow \tau + 1 \tag{10.8.2}$$

заменяет (NS, NS) на (NS, R). Это соответствует разрезанию тора вдоль линии $\tau = \text{const}$ и склейке после поворота на угол 2π . С другой стороны, преобразование

$$\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \tag{10.8.3}$$

меняет ролями σ и τ и, следовательно, заменяет (NS, R) на (R, NS). Мы хотим просуммировать по всем четырем возможным граничным условиям:

$$(\text{NS}, \text{NS}), \quad (\text{NS}, \text{R}), \quad (\text{R}, \text{NS}), \quad (\text{R}, \text{R}). \tag{10.8.4}$$

Такая комбинация граничных условий является модулярно инвариант-

ной, так как модулярное преобразование просто меняет граничные условия для таких полей.

Чтобы вычислить след для измененных граничных условий, мы всегда можем вставить оператор $(-1)^F$, где F — фермионное число, что обращает граничные условия по τ на противоположные. След вычисляется по следующим конфигурациям:

$$\begin{aligned} \text{Tr } x^R &\rightarrow (\text{NS}, \text{NS}); \quad (\text{R}, \text{NS}), \\ \text{Tr } (-1)^F x^R &\rightarrow (\text{NS}, \text{R}); \quad (\text{R}, \text{R}). \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

Таким образом, полная сумма по всем четырем граничным условиям получается сложением $\text{Tr } x^R$ и $\text{Tr } (-1)^F x^R$:

$$\text{Tr} ([1 + (-1)^F] x^R). \quad (10.8.6)$$

Подчеркнем, что оператор $(-1)^F$, вставленный в (10.8.6) под знак суммы, в точности совпадает с проекционным оператором Грина–Шерка–Олива (GSO)!

Следовательно, проекционный оператор GSO не только устраняет состояния с неправильной статистикой или удаляет тахионы. Мы видим, что *GSO-проекция делает однопетлевую амплитуду замкнутой струны модулярно инвариантной*. Обобщение этого утверждения указывает на необходимость одновременного использования как сектора NS, так и сектора R для получения модулярной инвариантности. Как только введены периодические и непериодические граничные условия, мы должны использовать все четыре варианта граничных условий для получения модулярной инвариантности, поскольку теория, содержащая только состояния NS, не является, по-видимому, ни модулярно инвариантной, ни унитарной.

Обобщим теперь эти замечания на случай гетеротической струны. Мы хотим построить теорию, которая нарушает суперсимметрию, но оставляет нетронутой модулярную инвариантность [11, 12]. Начнем с формулировки теории, имеющей фермионы как в пространственно-временном, так и в изотопическом секторах. Выберем правый сектор $d = 10$ гетеротической струны от теории GS, а 16-мерный изоспиновый сектор пусть будет представлен фермионными полями (более предпочтительными здесь, нежели бозоны). При этом изменением граничных условий можно более легко строить модулярно-инвариантные теории (вычисления с бозонными полями в изотопическом секторе являются более сложными, поскольку для бозонных полей мы не имеем такой красивой интерпретации модулярной инвариантности).

Введем элемент R , такой что $R^2 = 1$, который вместе с единицей образует дискретную группу Z_2 . По построению мы выбираем только те подпространства теории, на которых собственные значения оператора R равны 1. Это неизбежно нарушит группу $E_8 \otimes E_8$. Но использование различных граничных условий позволит нам сохранить модулярную инвариантность.

Выберем R в виде произведения двух операторов, первый из кото-

рых – оператор поворота на угол 2π в касательном пространстве, второй – оператор преобразования в изотопическом пространстве:

$$R = e^{2\pi i J_{12} \gamma_8}, \quad (10.8.7)$$

где

$$\gamma_8^2 = 1, \quad (10.8.8)$$

а J_{12} – генератор пространственно-временного поворота. Пусть γ_8 лежат в картановской подалгебре калибровочной группы:

$$\gamma_8 = e^{2\pi i p' \delta'}.$$

Отметим, что этот оператор просто генерирует смещение на $2\pi\delta^I$ вдоль координаты x^I .

Потребуем теперь, чтобы калибровочная группа коммутировала с элементом R группы Z_2 . Конечно, условие перестановочности с R нарушает исходную калибровочную группу, потому что R содержит элемент из этой группы. Действительно, подгруппой в $E_8 \otimes E_8$, коммутирующей с R , является

$$\frac{E_8 \otimes E_8}{Z_2} \rightarrow O(16) \otimes O(16). \quad (10.8.9)$$

Даже после выбора сектора теории с $R = 1$ возможно использование различных комбинаций граничных условий, согласованных с модулярной инвариантностью. Однако многие из них включают тахионы, т.е. состояния с $\delta^2 = 1$. Только при выборе

$$\delta^2 = 2 \quad (10.8.10)$$

получаем теорию, не содержащую тахионов. Такой выбор дает бестахионную теорию, поскольку в твистованном состоянии вакуум правого сектора в $-1/2$ не согласован с вакуумом левого сектора в $-1 + \delta^2 = 0$. Таким образом, условие $L_0 = \tilde{L}_0$ отбрасывает тахионное состояние.

Обозначим состояния так: (пространство–время; $O(16)$, $O(16)$). Поля χ^I и χ'^I фермионной струны преобразуются как

$$(16, 1) + (1, 16)$$

относительно группы $O(16) \times O(16)$.

Построим теперь $R = 1$ подпространство теории. Это означает, что все нетвистованные комбинации появляются с обычными множителями $(-1)^F$:

$$\text{Нетвистованные:} \quad \begin{cases} (\text{NS}; \text{NS}, \text{NS}), \\ (\text{NS}; \text{R}, \text{R}), \\ (\text{R}; \text{NS}, \text{R}), \\ (\text{R}; \text{R}, \text{NS}). \end{cases} \quad (10.8.11)$$

Этот набор безусловно нарушает модулярную инвариантность. В общем случае мы должны иметь $2 \times 2 \times 2 = 8$ комбинаций. В твистованном секторе мы должны восстановить модулярную инвариантность сум-

мированием по остающемуся набору граничных условий. Выполним преобразование $NS \leftrightarrow R$. Возьмем следующие комбинации с *противоположным* набором состояний, сохраняющихся при проекции $(-1)^F$:

$$\text{Твистованные:} \quad \left\{ \begin{array}{l} (R; R, R), \\ (R; NS, NS), \\ (NS; R, NS), \\ (NS; NS, R). \end{array} \right. \quad (10.8.12)$$

Функция распределения для этой модели может быть вычислена суммированием по нетвистованным состояниям с $R = 1$, т. е. именно по тем состояниям $O(16) \times O(16)$, которые сохраняются при факторизации по Z_2 . Потом, чтобы получить модулярную инвариантность, мы должны добавить твистованный сектор.

Спектр состояний с $R = 1$ в этой теории может быть легко вычислен. Для безмассовых состояний мы находим, что нетвистованный сектор с периодическими правыми фермионами дает:

- (1) $\mathbf{8}_v$ калибровочных бозонов в представлении $(120, 1) + (1, 120)$,
- (2) $\mathbf{8}_s$ фермионов в представлении $(128, 1) + (1, 128)$ и
- (3) бозонную часть супергравитационного мультиплетта $(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \varphi)$.

Отметим, что мы имеем только бозонную часть супергравитационного мультиплетта, что указывает на отсутствие суперсимметрии в теории.

Для твистованного сектора с антипериодическими фермионами в правом секторе мы имеем только $\mathbf{8}_s$ фермионов в представлении $(16, 16)$.

Когда мы проведем вычисления, подставляя эти проекции в функцию распределения, то получим

$$A_{\text{loop}} = \int_F \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \frac{1}{(\text{Im}\tau)^4 \Theta_1'^4} \left\{ \frac{\Theta_2^4(\tau)}{\Theta_2^8(\bar{\tau})} + \frac{\Theta_4^4(\tau)}{\Theta_4^8(\bar{\tau})} - \frac{\Theta_3^4(\tau)}{\Theta_3^8(\bar{\tau})} \right\}, \quad (10.8.13)$$

где тэта-функции возникают при вычислении следа $\text{Tr} e^{i\tau L_0 + i\bar{\tau} \bar{L}_0}$. Первый член возникает из нетвистованного сектора. Заметим, что он не является модулярно инвариантным. Последние два члена возникают из твистованного сектора. Подчеркнем, что только их комбинация является модулярно-инвариантной. Таким образом, суммируя по всем возможным комбинациям секторов, мы получаем модулярно-инвариантную теорию. Однако, как можно видеть из отсутствия безмассового гравитино, эта модель нарушает суперсимметрию. Это также означает, что в теории будут дилатонные головастики, которые теперь не сокращаются в силу суперсимметрии, поэтому следует ожидать проблем в инфракрасной области.

Тот факт, что эта модель свободна от аномалий, несколько неожидан и подчеркивает важную роль множителя $n - 496$ в (9.6.36) при выборе

калибровочной группы. Однако $O(16) \times O(16)$ имеет другой набор аномальных членов. Во-первых, число 496 в (9.6.36) появилось из-за присутствия гравитино, не дающего вклада в аномалию из-за массивности и не являющегося партнером гравитона. Во-вторых, вклад фермионов, который обычно равен n , сейчас равен нулю. Это происходит из-за того, что безмассовые фермионы помещены в мультиплеты $(16, 16)$ с положительной киральностью в твистованном секторе и в мультиплеты $(1, 128)$, $(128, 1)$ в нетвистованном секторе. Таким образом, вклад в аномалию становится равным нулю:

$$496 - n \rightarrow 16^2 - 128 - 128 + 0 = 0.$$

(Хотя вклад в киральную аномалию обращается теперь в нуль, это не означает, что киральные члены сокращаются. Это связано с тем, что фермионы принадлежат различным представлениям калибровочной группы.) И наконец, поскольку рассматриваемая группа принадлежит

к классу ортогональных групп $O(N)$, нетрудно вычислить $X_8 = \frac{1}{24} \text{Tr} F^4$

и повторить изложенные выше рассуждения.

Резюмируем свойства этой модели:

- (1) Модулярная инвариантность (в силу того, что мы добавили в однопетлевую амплитуду все восемь возможных вкладов как из твистованного, так и из нетвистованного сектора).
- (2) Отсутствие тахионов (так как для них не выполняется условие $L_0 = \tilde{L}_0$).
- (3) Отсутствие суперсимметрии (так как гравитино массивно).
- (4) Отсутствие аномалий (поскольку вклады от фермионов спина $1/2$ в сумме дают нуль, а гравитино вклада не дает).
- (5) Отсутствие конечности (в силу того, что мы не можем использовать суперсимметрию для уничтожения инфракрасных расходимостей).

§ 10.9. ЛОРЕНЦЕВЫ РЕШЕТКИ

До сих пор мы обсуждали гетеротические струны, в которых один сектор компактифицирован от 26 до 10 измерений. Далее в соответствии с общепринятым подходом мы должны компактифицировать 10-мерное пространство до D -мерного пространства-времени. Однако существует другая интересная возможность: непосредственно компактифицировать 26- и 10-мерные пространства к D измерениям с самого начала, минуя промежуточную стадию. В этом и состоит подход Нараяна [13, 14], позволяющий получить калибровочные группы ранга $26 - D$, большего, чем у рассматривавшейся до сих пор группы $E_8 \otimes E_8$.

Начнем с рассмотрения обоих 26- и 10-мерного секторов и компактифицируем их к D пространственно-временным измерениям. Тогда левый сектор имеет $26 - D = p$, а правый сектор $10 - D = q$ компактифицированных измерений. Параметризуем компактифицированные

измерения следующим образом:

$$X^A = q^A + 2L^A(\tau + \sigma) + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2n} \alpha_n^A e^{-2m(\tau + \sigma)},$$

$$X^B = q^B - 2\tilde{L}^B(\tau - \sigma) + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2n} \alpha_n^B e^{2m(\tau - \sigma)},$$
(10.9.1)

где A меняется от 1 до p , а B — от 1 до q . Заметим, что выполняется соотношение $p = q + 16$, гарантирующее, что число некомпактифицированных пространственно-временных измерений в обоих секторах равно D .

Потребуем теперь, чтобы оператор $L_0 - \tilde{L}_0$ аннулировал состояния, поскольку выбор начала отсчета координаты σ для замкнутой струны несущественен. Это приводит к условию

$$\frac{1}{2}(k^2 - \tilde{k}^2) = \tilde{N} - N + 1 = \text{целое число.}$$
(10.9.2)

Формула для массы при этом имеет вид

$$\frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\tilde{k}^2 + N + \tilde{N} - 1.$$
(10.9.3)

Отметим, что все эти уравнения редуцируются к уравнениям для обычной гетеротической струны, если взять $p = 16$, $q = 0$.

Покажем теперь, что окончательный результат модулярно инвариантен. Это приводит к новому ограничению на решетку, которая пока еще остается произвольной. Однопетлевое вычисление (10.6.2), выполненное для общего случая, практически совпадает с результатом для обычной гетеротической струны. Тщательный анализ показывает, что в общем случае мы получим новый множитель

$$\sum e^{-i\pi\tilde{\tau}(L - \sum_{i=1}^p K_i \tilde{\nu}_i / \tilde{\tau})^2 + i\pi\tau\tilde{L}^2}.$$
(10.9.4)

Рассмотрим теперь изменение этого множителя при преобразовании $\tau \rightarrow \tau + 1$. Легко видеть, что добавится новый фазовый множитель

$$e^{-i\pi(L^2 - \tilde{L}^2)}.$$
(10.9.5)

Для сокращения этого члена необходимо положить

$$(L^A)^2 - (\tilde{L}^B)^2 = \text{четное целое число.}$$
(10.9.6)

Из-за этого добавочного знака «минус» метрика на решетке является «лоренцевой», а не евклидовой. (Для обычной гетеротической струны \tilde{L} равняется нулю, поэтому мы никогда не сможем увидеть лоренцев характер решетки.)

И наконец, если мы применим модулярное преобразование $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$, то найдем, что решетка должна быть автодуальной. Короче говоря, модулярная инвариантность на однопетлевом уровне сохраняется, если мы возьмем *четную автодуальную лоренцеву решетку*.

Можно показать, что такие лоренцевы решетки действительно существуют, если выполняется условие $p - q = 8n$ для целых n . В нашем случае $n = 2$.

Мы также можем вычислить число параметров такой решетки. Можно показать, что лоренцева решетка единственна с точностью до преобразований группы $SO(p, q)$. Но формулы для масс, которые мы получили, инвариантны только относительно групп $SO(p)$ и $SO(q)$. Следовательно, полное число параметров равно

$$\dim SO(p, q) - \dim SO(p) - \dim SO(q) = pq. \quad (10.9.7)$$

Таким образом, полное число параметров, характеризующих решетку, равно $p(p - 16)$.

С помощью этого метода компактификации мы значительно увеличим число допустимых групп. Полный ранг группы теперь равен $26 - D$. Это означает, что в нашем распоряжении есть такие большие группы, как $SO(52 - 2D)$. В четырех пространственно-временных измерениях это дает $SO(44)$. При $D = 4$ мы также можем получить группу $E_8 \otimes E_8 \otimes E_7 \otimes SU(2)$ или $E_8 \otimes E_6^2 \otimes G$, где G может быть либо $SO(4)$, либо $SU(3)$. Можно взять также группу $E_8 \otimes E_8 \otimes G_{10-d}$, где группа G должна иметь корни равной длины.

Эти рассуждения могут навести на мысль, что лоренцевы решетки представляют собой совершенно новый способ компактификации гетеротической струны. На самом деле это не совсем верно. Оказывается, что все же можем получить лоренцеву решетку в рамках обычной гетеротической струны. Рассмотрим, например, следующее действие для струны в присутствии фоновых полей:

$$g_{ij} \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + \varepsilon^{\alpha\beta} A_i^I \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^I, \quad (10.9.8)$$

где I пробегает от 1 до 16, B_{ij} — антисимметричный тензор, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор в двумерном пространстве. Предположим, что g_{ij} , B_{ij} и поля A_i^I аппроксимированы постоянными фоновыми полями. Заметим, что полное число параметров в этом подходе может быть найдено подсчетом числа независимых мод таких полей для полного числа параметров pq :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij} \\ A_i^I \\ B_{ij} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} q(q + 1) \\ 16q \\ \frac{1}{2} q(q - 1) \end{array} \right\}. \quad (10.9.9)$$

Проквантуем теперь эту систему, предполагая, что X аппроксимируется выражением

$$X^i = 2\sigma n^i + q^i(\tau). \quad (10.9.10)$$

Подставим теперь это выражение в действие, квантуя систему в присутствии этих постоянных фоновых полей. Отличие от нуля этих фоновых полей добавляет pq новых параметров в процесс компактификации, что в точности совпадает с числом новых параметров, введенных компактификацией на лоренцеву решетку. Более того, можно показать, что обычная компактификация в присутствии таких фоновых полей эквивалентна компактификации на лоренцевы решетки.

Компактификация на лоренцеву решетку не только эквивалентна общепринятой схеме компактификации в присутствии фоновых полей, но также дает очень удобный способ систематизации чрезвычайно большого числа возможных компактификаций.

§ 10.10. РЕЗЮМЕ

Условие сокращения аномалий требует, чтобы мы брали либо группу $O(32)$, либо $E_8 \otimes E_8$. Однако множители Чана–Патона несовместимы с исключительными группами. Поэтому нам не остается иного выбора, как только рассмотреть компактификацию, с помощью которой можно генерировать исключительные группы для суперструн.

В простейшем случае компактификации одного измерения необходимо сделать отождествление

$$x = x + 2\pi R. \quad (10.10.1)$$

Затем скалярная функция от x должна быть разложена в ряд по периодическим собственным функциям:

$$\varphi(x) = \sum_n \varphi_n e^{ipx}, \quad (10.10.2)$$

где

$$p = \frac{n}{R}. \quad (10.10.3)$$

Видим, что выбор периодических граничных условий приводит к квантованию импульса.

В теории же гетеротических струн компактифицируют 16 измерений из 26 на 16-мерную решетку. В замкнутой струне правый и левый секторы независимы. Правый сектор десятимерен и содержит фермионную суперструну и бозонную струну. Левый сектор изначально был 26-мерным, но потом был компактифицирован к 10 измерениям, оставляя 16-мерную теорию, определенную на решетке, и 10-мерную бозонную струну (которая для получения замкнутой бозонной струны комбинируется с правым сектором бозонной струны). Окончательно действие в калибровке светового конуса имеет вид

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\partial_a X^i \partial_a X^i + \sum_{I=1}^{16} \partial_a X^I \partial_a X^I + i\bar{S}\gamma^-(\partial_\tau + \partial_\sigma)S), \quad (10.10.4)$$

где мы наложили следующие условия связи:

$$(\partial_\tau - \partial_\sigma) X^I = 0, \quad (10.10.5)$$

$$\gamma^+ S = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{11})S = 0.$$

Действие (10.10.4) инвариантно относительно преобразования суперсимметрии:

$$\begin{cases} \delta X^i = (p^+)^{-1/2} \bar{\epsilon} \gamma^i S, \\ \delta S^a = i(p^+)^{-1/2} \gamma_- \gamma_\mu (\partial_\tau - \partial_\sigma) X^\mu \epsilon. \end{cases} \quad (10.10.6)$$

При анализе спектра гетеротической струны мы должны принимать во внимание квантование импульса, а также возможность намотки струны вокруг компактифицированных измерений. Это приводит к следующим условиям на спектр:

$$\frac{1}{4} m^2 = N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2. \quad (10.10.7)$$

Последнее условие на спектр возникает, когда мы налагаем требование инвариантности струны относительно сдвига вдоль координаты σ . Оператор, генерирующий такое вращение, имеет вид

$$U(\theta) = \exp \left\{ 2i\theta \left(N - \tilde{N} + 1 - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2 \right) \right\}. \quad (10.10.8)$$

Таким образом, мы требуем

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2. \quad (10.10.9)$$

Для гетеротической струны также можно построить вершинные функции. На самом деле они просто равны произведению обычных левых и правых вершин для суперструн, построенных ранее в гл. 3. Выберем следующий анзац для супергравитационного мультиплетта:

$$\begin{aligned} V_B &= \rho_{\mu\nu}(k) \int_0^\pi d\sigma B^\mu \tilde{P}^\nu e^{ik \cdot X}, \\ V_F &= \int_0^\pi d\sigma F^a \tilde{P}_\nu U^{a\nu}(k) e^{ik \cdot X}, \end{aligned} \quad (10.10.10)$$

где

$$k^+ = 0,$$

$$B^i = P^i + \frac{1}{2} k^j R^{ij},$$

$$P^i = \frac{dX^i}{d(\tau - \sigma)} = \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)},$$

$$R^{\nu} = \frac{1}{8} \bar{S} \gamma^{\nu} - S, \quad (10.10.11)$$

$$\bar{F}^a = \frac{1}{2} i (p^+)^{-1/2} [\bar{S} \gamma \cdot P - \frac{1}{6} R^{\nu} k^{\nu} \bar{S} \gamma^{\nu}]^a,$$

$$\tilde{P}^i = \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i e^{-2m(\tau + \sigma)}.$$

Имея вершинные функции и обычный пропагатор (плюс условия связи), можно вычислить четырехточечную функцию для амплитуды рассеяния четырех безмассовых калибровочных бозонов:

$$A_4 = g^2 K(\rho_i, k_i) \times \frac{\Gamma\left(-1 + \frac{u}{8} + \frac{U}{2}\right) \Gamma\left(-1 + \frac{s}{8} + \frac{S}{2}\right) \Gamma\left(-1 + \frac{t}{8} + \frac{T}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{u}{8}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{8}\right) \Gamma\left(1 - \frac{t}{8}\right)}; \quad (10.10.12)$$

здесь K — сложная функция от поляризаций, а S , T и U определены формулами

$$\begin{aligned} S &= (K_1 + K_2)^2, \\ T &= (K_2 + K_3)^2, \\ U &= (K_1 + K_3)^2, \\ S + T + U &= 8. \end{aligned} \quad (10.10.13)$$

Аналогично можно определить однопетлевую амплитуду, которая, что можно явно показать, является модулярно инвариантной. Это позволяет убрать сингулярность при $\tau = 0$, что означает конечность теории в однопетлевом приближении.

Анализируя спектр теории, мы нашли, что описать спектр в терминах мультиплетов группы $E_8 \otimes E_8$ чрезвычайно трудно. Доказательство того, что спектр может быть представлен в терминах неприводимых представлений этой группы, много легче провести, используя алгебры Каца–Мууди. Генераторы алгебр Каца–Мууди имеют следующие коммутационные соотношения:

$$[T_m^i, T_n^j] = i f^{ijl} T_{m+n}^l + km \delta^{ij} \delta_{m, -n}. \quad (10.10.14)$$

Заметим, что это обычная алгебра Ли с генераторами, зависящими от координаты на окружности. Можно также записать коммутаторы этой алгебры в терминах базиса Картана–Вейля, генераторы в котором имеют вид

$$\begin{aligned} [H_i(\theta), H_j(\theta)] &= 0, \\ [H_i(\theta), E_\alpha(\theta')] &= -2\pi \delta(\theta - \theta') \alpha_i E_\alpha(\theta), \end{aligned} \quad (10.10.15)$$

$$[E_{\alpha}(\theta), E_{-\alpha}(\theta')] = 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_i \alpha_i H_i(\theta) + 2\pi i \delta'(\theta - \theta') \quad (10.10.16)$$

и

$$[E_{\alpha}(\theta), E_{\beta}(\theta')] = \begin{cases} 2\pi\delta(\theta - \theta') E_{\alpha+\beta}(\theta), & \text{если } \alpha + \beta \in \Gamma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (10.10.17)$$

Используя вертексные операторы, можно в явном виде построить представление алгебры Каца–Муди. Следовательно, поскольку вертексные операторы генерируют спектр теории, сам спектр должен быть инвариантным относительно преобразований алгебры Каца–Муди. Поэтому несмотря на то, что спектр не является явно инвариантным относительно действия группы $E_8 \otimes E_8$, мы установили, что он обладает симметрией относительно действия этой группы.

Отметим, что можно построить модулярно инвариантные струны без требования суперсимметрии. Если взять, например, гетеротическую струну, то можно построить оператор

$$R = e^{2\pi i J_{12}} \gamma_8, \quad (10.10.18)$$

образующий вместе с единичным оператором дискретную группу Z_2 . Этот оператор является произведением пространственно-временного вращения и вращения в изотопическом пространстве. Возьмем в качестве γ_8 элемент картановской подалгебры, генерирующий сдвиг вдоль x^1 на $2\pi\delta^1$. Если δ^2 равно единице, то теория имеет тахионы. Но если δ^2 равняется двум, то возможна теория, свободная от тахионов. Калибровочная группа при этом должна быть меньше, чем $E_8 \otimes E_8$ или $\text{Spin}(32)/Z_2$, так как мы проектируем на подпространство с $R = 1$. В результате калибровочная группа редуцируется к $O(16) \otimes O(16)$. Такая теория может быть сделана модулярно инвариантной, если мы аккуратно выберем граничные условия как для σ , так и для τ для замкнутой струны. Модулярные преобразования будут изменять эти два граничных условия, поэтому мы должны просуммировать по всем четырем возможным граничным условиям NS и R.

Можно показать, что окончательная модель будет модулярно инвариантной, свободной от тахионов и аномалий. Однако она нарушает суперсимметрию и не является конечной.

Новые схемы компактификации, более общие, чем рассмотренная, возможны, если мы будем использовать различные схемы компактификации к D пространственно-временным измерениям. Непосредственно компактифицируя левый сектор от 26 до D пространственно-временных измерений и компактифицируя правый сектор от 10 до D измерений, можно обойти промежуточный этап гетеротической струны с группой $E_8 \otimes E_8$. Новой чертой такой схемы компактификации является то, что модулярная инвариантность ограничивает нас на лоренцевы решетки, т. е. решетки, на которых метрика имеет чередующиеся знаки. Можно показать, что такая лоренцева решетка хорошо определена. Это дает нам совершенно новый класс струн типа гетеротических с большими

калибровочными группами, например $SO(52 - 2D)$. Несмотря на то что такие модели выглядят сильно отличающимися от стандартной гетеротической струны, можно показать, что такие новые классы моделей можно построить при отличии от нуля постоянных фоновых полей g_{ij} , A_i^I и B_{ij} .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Freund P.G.O. ITP preprint, 1984.
- [2] Kaluza Th. Sitz Preuss. Akad. Wiss. **K1**, 966 (1921).
- [3] Klein O.Z. Phys. **37**, 895 (1926).
- [4] Lee H.C. Introduction to Kaluza-Klein Theories, World Scientific, Singapore, 1984.
- [5] Cremmer E., Scherk J. Nucl. Phys. **B108**, 409 (1976); **B118**, 61 (1977).
- [6] Gross D.J., Harvey J.A., Martinec E. and Rohm R. Phys. Rev. Lett. **54**, 502 (1985); Nucl. Phys. **B256**, 253 (1986); **B267**, 75 (1986).
- [7] Yashikozawa S. Phys. Lett. **166B**, 135 (1986).
- [8] Frenkel I.B., Кас V.G. Invent. Math. **62**, 23 (1980).
- [9] Segal G. Commun. Math. Phys. **80**, 301 (1982).
- [10] Кас V.G. Infinite Dimensional Lie Algebras, Birkhauser, Boston (1983).
[Имеется перевод: В.Г. Кац. Бесконечномерные алгебры Ли.- М.: Мир, 1993.]
- [11] Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P., Moore G. and Vafa C. Phys. Lett. **171B**, 155 (1985).
- [12] Dixon L., Harvey J. Nucl. Phys. **B274**, 93 (1986).
- [13] Narain K.S. Phys. Lett. **B169**, 41 (1986).
- [14] Narain K.S., Sarmadi M.H. and Witten E. Nucl. Phys. **B279**, 369 (1987).

ПРОСТРАНСТВА КАЛАБИ–ЯУ И ОРБИОБРАЗИЯ

§ 11.1. ПРОСТРАНСТВА КАЛАБИ–ЯУ

Несмотря на то что формулировка гетеротической струны является значительным продвижением по сравнению с обычной формулировкой теории струн, остается еще вопрос, можем ли мы редуцировать теорию к четырем измерениям и удовлетворить строгим феноменологическим ограничениям. Ответ на этот вопрос, к сожалению, отрицателен.

В настоящее время арсенал технических средств, находящихся в нашем распоряжении, слишком примитивен, чтобы ответить на вопрос, претерпевает ли теория спонтанную размерную редукцию. Нам остается только ждать дальнейшего развития полевой теории струн или, возможно, создания другого формализма, прежде чем можно будет сделать какое-либо заключение относительно истинного вакуумного состояния теории.

При отсутствии непertурбативной формулировки теории лучшее из того, что можно сделать, – поискать различные классические вакуумы теории и определить, могут ли они соответствовать приемлемой феноменологии. Неожиданно оказывается, что довольно слабые ограничения на схему компактификации достаточны для получения приемлемой феноменологии. Хотя ни одно из решений не согласуется полностью с минимальной моделью $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, мы подходим к ней достаточно близко, сделав всего лишь несколько предположений относительно классических вакуумов.

Однако, к сожалению, мы сталкиваемся с затруднением, заключающимся в обилии таких вакуумов. Имеются сотни, если не тысячи, допустимых классических решений, и неясно, как выбрать один вакуум среди всех возможных. Таким образом, хотя простейшая феноменология может быть получена из теории струн, нам все же придется подождать развития непertурбативного формализма, прежде чем можно будет сделать какие-либо определенные утверждения относительно подлинного вакуума теории.

В этой главе мы поэтому *предположим*, что компактификация может быть выполнена, и обсудим два метода записи классических вакуумов для теории струн:

- (1) Пространства Калаби–Яу. Потребуем, чтобы $(N = 1)$ -суперсимметрия в четырех измерениях была ненарушенной. Это простое предположение вынуждает нас рассматривать многообразия с ковариантно постоянным спинором, что в свою очередь накладывает ограничения на рассматриваемое 6-мерное многообразие: оно должно быть многообразием *Калаби–Яу* [1, 2].

- (2) Орбиобразия. Компактифицируем на торы, факторизованные по действию дискретной группы. Это позволяет нам нарушать калибровочную группу и получать различные низкоэнергетические предсказания. (Орбиобразия, вероятно, являются специальными пределами пространств Калаби–Яу, хотя здесь не все еще ясно.)

Начнем, однако, с взятия предела нулевого наклона теории, редуцирующего ее к десятимерной супергравитации, взаимодействующей с теорией $(E_8 \otimes E_8)$ -супер-Янга–Миллса (см. приложение), и сделаем некоторые достаточно обоснованные предположения о схеме нарушения симметрий. Канделас, Горовиц, Строминджер и Виттен [1, 2] сделали следующие предположения о пределе нулевого наклона:

- (1) 10-мерная вселенная компактифицирована к прямому произведению 4- и 6-мерной вселенных:

$$M_{10} \rightarrow M_4 \times K_6, \quad (11.1.1)$$

где многообразие M_4 является максимально симметричным пространством, т. е.

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{12}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (11.1.2)$$

а K является компактным многообразием. (Предположение о том, что четырехмерное многообразие максимально симметрично, приводит к тому, что оно должно быть пространством де Ситтера, анти-де Ситтера или Минковского.)

- (2) Локальная суперсимметрия $N = 1$ остается ненарушенной и выживает при компактификации.
 (3) Некоторые бозонные поля можно положить равными нулю:

$$H = d\varphi = 0. \quad (11.1.3)$$

Второе предположение об суперсимметрии $N = 1$ является особенно важным, поскольку оно налагает нетривиальные ограничения на структуру многообразия K^6 . Если суперсимметрия не нарушена, то генератор суперсимметрии Q должен зануляться на векторе вакуума $|0\rangle$ (см. (9.8.4)). Вариация фермионного поля относительно преобразования суперсимметрии дается формулой

$$\delta\psi = [\bar{\epsilon}Q, \psi]. \quad (11.1.4)$$

Значение вакуумного среднего для этого уравнения равно нулю, если суперсимметрия сохраняется (поскольку Q уничтожает вакуум):

$$\langle 0 | \delta\psi | 0 \rangle = 0. \quad (11.1.5)$$

Однако в классическом пределе вариация фермионного поля и значение вакуумного среднего совпадают:

$$\delta\psi \sim \langle 0 | \delta\psi | 0 \rangle. \quad (11.1.6)$$

Таким образом, если суперсимметрия $N = 1$ остается ненарушенной при компактификации, то вариация фермионных полей должна равняться нулю:

$$\delta\psi = 0. \quad (11.1.7)$$

Это в свою очередь налагает нетривиальные ограничения на параметр суперсимметрии ε . Первоначально ε был произвольным спинорным полем. Однако требование точности суперсимметрии $N = 1$ означает, что мы должны выбрать подмножество в бесконечном множестве всех допустимых ε так, чтобы суперсимметрия $N = 1$ сохранялась.

Вариация полей десятимерных фермионов (см. приложение) имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \delta\psi_i &= \kappa^{-1} D_i \varepsilon + \frac{\kappa}{32g^2\varphi} (\Gamma_i^{jki} - 9\delta_i^j \Gamma^{ki}) \varepsilon H_{jk} + \dots, \\ \delta\chi^a &= \frac{-1}{4g\sqrt{\varphi}} \Gamma^{ij} F_{ij}^a \varepsilon + \dots, \\ \delta\lambda &= \frac{-1}{\sqrt{2}\varphi} (\Gamma \cdot \partial\varphi) \varepsilon + \frac{\kappa}{8\sqrt{2}g^2\varphi} \Gamma^{ijk} \varepsilon H_{ijk} + \dots, \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

где латинские буквы i, j, k, a, b, c являются индексами 6-мерного пространства и мы опускаем более высокие по степеням ε четырехфермионные члены взаимодействия. Кроме того, выполняется тождество Бьянки:

$$dH = \text{Tr} R \wedge R - \frac{1}{30} \text{Tr} F \wedge F. \quad (11.1.9)$$

Теперь наложим второе и третье условия, которые приведут к ограничениям на наш параметр ε . Вариации полей редуцируются к

$$\begin{aligned} \delta\psi_i &= \frac{1}{k} D_i \varepsilon = 0, \\ \delta\chi^a &= \Gamma^{ij} F_{ij}^a \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

Эти уравнения являются в высшей степени нетривиальными ограничениями для исходной теории, особенно первое утверждение $D_i \varepsilon = 0$ о ковариантном постоянстве спинора ε . В частности, это налагает очень жесткие ограничения на спиновую связность, задающую ковариантную производную на многообразии, и, следовательно, на само многообразие.

Первое уравнение в (11.1.10), например, утверждает, что параллельное перенесение спинора ε на некоторое расстояние оставляет этот спинор неизменным. Более того, можно выполнить два таких перемещения, а также обойти вокруг замкнутого пути (см. приложение). Например, если мы продифференцируем (11.1.10) еще раз, то получим

вариацию спинора при перенесении по замкнутому контуру. Имеем

$$\begin{aligned} D_i \varepsilon = 0 &\rightarrow [D_i, D_j] \varepsilon = 0 \\ &\rightarrow R_{ijkl} \Gamma^{kl} \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Это означает, что спинор остается неизменным при перенесении по замкнутому пути. Это в свою очередь подразумевает, что многообразие K является риччи-плоским:

$$R_{ij} = 0. \quad (11.1.12)$$

Условие (11.1.12) важно, в частности, из-за того, что при его выполнении метрический тензор описывает плоское четырехмерное пространство Минковского. Тем самым пространства де Ситтера и анти-де Ситтера из рассмотрения исключаются.

Возьмем теперь произвольный спинор и перенесем его параллельно вдоль замкнутой кривой. Из приложения следует, что после такого перенесения спинор принимает вид

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \Delta^{mn} [D_m, D_n] \varepsilon, \quad (11.1.13)$$

где площадь поверхности внутри замкнутого пути пропорциональна Δ^{mn} . Значит, спинор просто поворачивается по сравнению со своим первоначальным направлением, причем матрица вращения пропорциональна тензору кривизны, который выражается через коммутатор двух сдвигов:

$$\varepsilon \rightarrow U \varepsilon, \quad (11.1.14)$$

где

$$U = 1 + \Delta^{mn} [D_m, D_n] + \dots \quad (11.1.15)$$

Теперь давайте возьмем последовательно несколько замкнутых путей, каждый из которых начинается и заканчивается в одной и той же точке. Вообще говоря, всякий раз, когда мы проходим произвольное число замкнутых путей с фиксированной точкой, мы получаем небольшой поворот исходного спинора. Следовательно, множество всех таких вращений образует группу:

$$\varepsilon \rightarrow U_2 U_1 \varepsilon = U_3 \varepsilon. \quad (11.1.16)$$

Эта группа называется группой *голономии*.

Применим теперь этот результат к нашему специальному случаю. Для многообразия K^6 спиновая связность, описывающая параллельный перенос спиноров, является калибровочным полем для группы $O(6)$. Преобразующийся относительно $O(6)$ спинор имеет $2^3 = 8$ -компонент. Однако мы знаем, что

$$O(6) = SU(4). \quad (11.1.17)$$

Таким образом, 8 компонент спинора группы $O(6)$ могут быть перегруппированы в соответствии с действием группы $SU(4)$ как

$$\mathbf{8} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{4}. \quad (11.1.18)$$

При действии группы $SU(4)$ эти два четырехкомпонентных объекта преобразуются как спиноры противоположной киральности. Можно считать, что спинор ε имеет положительную киральность. Это устраняет половину компонент, так что ε преобразуется по фундаментальному представлению $\mathbf{4}$ группы $SU(4)$.

Изучаемый спинор, однако, не является произвольным, а удовлетворяет условию

$$D_i \varepsilon = 0, \quad (11.1.19)$$

которое означает, что

$$\varepsilon = U \varepsilon, \quad (11.1.20)$$

т. е. спинор остается неизменным при переносе по замкнутому пути.

Вопрос теперь заключается в следующем: каждая подгруппа группы $O(6)$ оставляет инвариантным пространство $\mathbf{4}$ представления группы $SU(4)$? Ответ хорошо известен, он взят непосредственно из теории хиггсовского нарушения симметрии. При этом мы также хотим получить ответ на вопрос: *какова максимальная группа, оставляющая постоянный спинор или вектор неизменными?*

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что при помощи преобразований группы $SU(4)$ всегда можно привести спинор ε к виду

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (11.1.21)$$

До сих пор мы фактически ничего не сделали. Мы просто взяли произвольный спинор и привели его к указанному виду при помощи вращений из группы $SU(4)$. Но теперь очевидно, что максимальной группой U , оставляющей такой спинор неизменным, является подгруппа комплексных 3×3 -матриц в $SU(4)$, образующих группу $SU(3)$. Заметим, что при этом матрица U выбирается в блочно-диагональном виде:

$$U = \begin{pmatrix} SU(3) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.1.22)$$

Теперь уравнение $\varepsilon = U \varepsilon$ удовлетворяется тривиально. Важно отметить, что наш результат имеет весьма общий характер. Специальный вид для ε мы выбрали только для того, чтобы наглядно продемонстрировать этот общий результат, не зависящий от вида ε .

В заключение отметим, что существование ковариантно постоянного спинора редуцирует группу голономии от $O(6)$ к $SU(3)$. Таким образом, K^6 в качестве группы голономии имеет группу $SU(3)$.

Логическая цепочка, по которой мы следовали, может быть записана следующим образом:

$$\text{Суперсимметрия } N = 1 \rightarrow D_i \varepsilon = 0 \rightarrow \text{голономия } SU(3). \quad (11.1.23)$$

Это важный, но довольно бесполезный результат. Очень мало известно о многообразиях с голономией $SU(3)$. На самом деле в явном виде ничего не известно. Поэтому эта важная информация не может быть использована для вывода феноменологических следствий. Однако надежда на это все же остается, поскольку мы пока еще не исчерпали всю информацию, которая может быть извлечена из наших предположений.

Мы далеко не исчерпали все те возможности, которые существуют при наличии в теории ковариантно постоянного спинора. Всегда можно, например, построить из спинорного поля объект, преобразующийся при преобразовании координат пространства как тензор:

$$J_j^i = -ig^{ik} \bar{\varepsilon} \Gamma_{kj} \varepsilon. \quad (11.1.24)$$

Используя несколько спинорных тождеств, можно показать, что

$$J_m^n J_n^p = -\delta_m^p. \quad (11.1.25)$$

Если на многообразии можно задать тензор J , отображающий любое касательное пространство в себя и удовлетворяющий уравнению $J^2 = -1$, то говорят, что многообразие является *почти комплексным*. (В двух измерениях это утверждение тривиально и говорит просто о существовании числа i , такого, что $i^2 = -1$.) Если спинор ε ковариантно постоянен, то тензор J становится очень интересным объектом. Например, дифференцируя, мы получаем

$$D^m J_m^n = 0. \quad (11.1.26)$$

Это означает, что метрика, кроме того, что она риччи-плоская, является также *кэлеровой*. (Эти термины будут определены ниже.) Наконец, можно определить один-форму

$$\Gamma = \Gamma_{mp}^q J_q^p dx^m, \quad (11.1.27)$$

где Γ_{mp}^q — символы Кристоффеля. Находим, что эта форма удовлетворяет

$$d\Gamma = 0, \quad (11.1.28)$$

откуда следует обращение в нуль первого класса Черна: $c_1 = 0$.

В итоге, восстанавливая логику наших предположений, имеем

$$\text{Суперсимметрия } N = 1 \rightarrow D_i \varepsilon = 0 \rightarrow K \text{ является риччи-плоской,} \\ \text{кэлеровой, с нулевым первым} \\ \text{классом Черна.} \quad (11.1.29)$$

Большое преимущество этого нового результата заключается в том, что известно много риччи-плоских кэлеровых многообразий с нулевым первым классом Черна. Использование кэлеровых многообразий этого типа более предпочтительно, нежели малоизученных многообразий с группой голономии $SU(3)$.

При этом остается нерешенным вопрос о связи между этими двумя типами многообразий. К счастью, Калаби сформулировал (а Яу позже доказал) утверждение [4–6]:

Теорема (Калаби–Яу). *Кэлерово многообразие с нулевым первым классом Черна всегда допускает кэлерову метрику с группой голономии $SU(3)$.*

Таким образом, используя теорему Калаби–Яу, можно получить (по крайней мере в принципе) тысячи шестимерных многообразий, пригодных для феноменологических целей.

Для того чтобы явно построить такие многообразия Калаби–Яу, важно сначала дать обзор некоторых элементарных фактов из алгебраической геометрии и теории кохомологий. Сделаем сейчас отступление и обсудим некоторые простые свойства кэлеровых и риччи-плоских метрик на языке кохомологий. Мы увидим, что многие результаты теории кохомологий могут быть прямо введены в феноменологию теории суперструн.

§ 11.2. ОБЗОР ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ ДЕ РАМА

Как изложено в приложении, теория дифференциальных форм начинается с нильпотентного оператора:

$$\begin{aligned} d &= dx^\mu \partial_\mu, \\ d^2 &= 0. \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

N -форма ω называется *замкнутой*, если

$$(\text{замкнутость}) \quad d\omega = 0. \tag{11.2.2}$$

Аналогично она называется *точной*, если существует $(N - 1)$ -форма α , такая, что

$$(\text{точность}) \quad \omega = d\alpha. \tag{11.2.3}$$

Заметим, что множество точных форм является подмножеством множества замкнутых форм:

$$\text{точные формы} \subset \text{замкнутые формы}. \tag{11.2.4}$$

В трехмерном случае эти утверждения можно объединить в хорошо известное утверждение о том, что градиент скалярного поля всегда имеет нулевой ротор:

$$\mathbf{A} = \nabla \cdot \varphi \rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = 0. \tag{11.2.5}$$

Фактически теория форм позволяет просто переформулировать многие теоремы обычного тензорного исчисления в трех измерениях.

В теории Максвелла мы говорим, что два тензорных поля A_μ и B_μ описывают одну и ту же физику, если они отличаются на полную

производную:

$$A_\mu - B_\mu = \partial_\mu \Lambda \rightarrow A_\mu \sim B_\mu. \quad (11.2.6)$$

Это, конечно, составляет сущность калибровочной теории. Используя этот математический язык, будем говорить, что две формы ω и ω' принадлежат одному классу эквивалентности, если они отличаются на замкнутую форму:

$$\omega - \omega' = da \rightarrow \omega \sim \omega'.$$

В теории Максвелла мы хотим построить множество всех неэквивалентных полей. В теории форм мы делаем это, определяя $H^p(M)$ как множество всех замкнутых p -форм по модулю точных форм, т. е.

$$H^p(M) = \frac{\text{замкнутые } p\text{-формы}}{\text{точные } p\text{-формы}}. \quad (11.2.7)$$

Это определяет p -ю группу когомологий де Рама многообразия M .

Заметим, что группа когомологий подсчитывает, как много независимых замкнутых p -форм может быть определено на данном многообразии. Когомологии, таким образом, зависят от локальной структуры многообразия. Однако, как предполагает само название, существует дуальность между когомологиями и гомологиями, отражающими глобальные свойства многообразия:

Когомологии \rightarrow локальные свойства многообразия;

Гомологии \rightarrow глобальные свойства многообразия.

Чтобы сделать связь между гомологиями и когомологиями более точной, давайте определим, как установить эту дуальность. Начнем с записи интеграла по области C , определенной на многообразии M , где C может быть линией, поверхностью, объемом и т. д.:

$$\int_C \omega.$$

Интеграл можно понимать как отображение, сопоставляющее p -форме ω и поверхности C вещественное число. Таким образом, можно рассматривать операцию интегрирования как «скалярное произведение» формы и поверхности:

$$\langle C | \omega \rangle \equiv \int_C \omega. \quad (11.2.8)$$

Теперь запишем известную теорему Стокса, обобщенную на N -мерное пространство и сформулированную на языке форм:

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega, \quad (11.2.9)$$

где C является N -мерным многообразием и ∂C определяется как «граница»

ца» многообразия C . Перепишем теорему Стокса в терминах скалярного произведения:

$$\text{Теорема Стокса: } \langle C | d\omega \rangle = \langle \partial C | \omega \rangle. \quad (11.2.10)$$

Тем самым мы установили, что дуальным к когомологическому оператору d является граничный оператор ∂ :

$$d \leftrightarrow \partial. \quad (11.2.11)$$

Вследствие этой дуальности можно предположить, что граничный оператор ∂ также определяет группу, дуальную к группе когомологий, которую назовем группой гомологий.

Чтобы быть точными, поясним, что понимается под граничным оператором ∂ и поверхностью C , в терминах симплексов. Определим 1-симплекс как линейный отрезок, соединяющий точки p_1 и p_2 . 1-симплекс имеет определенную ориентацию или, иначе, направление:

$$\text{Линейный отрезок} = [p_1, p_2] = -[p_2, p_1]. \quad (11.2.12)$$

Определим треугольник как 2-симплекс, задаваемый тремя точками или вершинами:

$$\text{Треугольник} = [p_1, p_2, p_3] = -[p_1, p_3, p_2]. \quad (11.2.13)$$

Отметим, что 2-симплекс сохраняет знак при циклической перестановке трех точек, но меняет его при антициклической перестановке. Очевидно, что, вводя N -симплекс, можно обобщить это понятие:

$$N\text{-симплекс} = [p_1, \dots, p_{N+1}]. \quad (11.2.14)$$

(Заметим, что векторы, образующиеся после взятия разности двух точек p_i , должны быть линейно независимыми, в противном случае симплекс редуцируется к меньшей размерности.)

Теперь определим граничный оператор, отображающий m -симплексы в $(m-1)$ -симплексы. Например,

$$\partial_1 [p_1 p_2] = [p_1] - [p_2], \quad (11.2.15)$$

где $[p]$ обозначает точку. Таким образом, мы определяем «границу» линейного отрезка как две его концевые точки. Действуя на треугольник, граничный оператор создает линейные отрезки:

$$\partial_2 [p_1, p_2, p_3] = [p_1, p_2] + [p_2, p_3] + [p_3, p_1]. \quad (11.2.16)$$

Действуя на 2-симплекс (треугольник), граничный оператор просто переводит его в три ребра, образуемых отрезками или 1-симплексами.

Нетрудно убедиться, что граничный оператор является нильпотентным. Например, для простого случая треугольников имеем

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 [p_1, p_2, p_3] &= \partial_1 \{ [p_1, p_2] + [p_2, p_3] + [p_3, p_1] \} \\ &= [p_1] - [p_2] + [p_2] - [p_3] + [p_3] - [p_1] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.2.17)$$

Таким образом, получаем важный результат, заключающийся в том, что граничный оператор нильпотентен:

$$\partial^2 = 0.$$

Это может быть обобщено на случай симплексов произвольной размерности. Определим действие граничного оператора на N -симплекс:

$$\partial_N [p_1, \dots, p_{N+1}] = \sum_{i=1}^{N+1} (-1)^i [p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{N+1}], \quad (11.2.18)$$

где мы опускаем точки, обозначенные буквами со шляпками. Таким образом, граничный оператор отображает N -симплексы в $(N-1)$ -симплексы. Нетрудно показать, что

$$\partial_{N-1} \partial_N = 0 \quad (11.2.19)$$

для общего случая.

По аналогии с теорией когомологий, определим множество *циклов* Z как множество симплексов, удовлетворяющих условию

$$\partial Z = 0. \quad (11.2.20)$$

Возьмем, например, бублик, или двумерный тор. Существуют различные типы циклов, которые можно нарисовать на этой поверхности. Например, в гл. 5 мы видели, что на поверхности бублика есть два типа циклов, которые нельзя стянуть в точку непрерывным преобразованием. Однако на этой поверхности существует также цикл, являющийся просто замкнутой линией, который может быть непрерывно стянут в точку. Нам нужен метод, позволяющий исключать циклы второго типа.

Определим множество *границ* V как набор симплексов, которые могут быть записаны в виде границы некоторого симплекса C на единицу большей размерности:

$$V = \partial C. \quad (11.2.21)$$

Заметим, что множество границ является подмножеством во множестве циклов:

$$\text{Границы} \subset \text{циклы}. \quad (11.2.22)$$

Говорим, что два симплекса находятся в одном и том же классе эквивалентности, если они отличаются только на границу. Мы хотим ввести множество неэквивалентных симплексов; этого можно достичь, определяя p -ю группу гомологий:

$$H_p(M) = \frac{p\text{-циклы}}{p\text{-границы}}. \quad (11.2.23)$$

Все это позволяет нам исключить лишние циклы на торе, стягиваемые в точку, удерживая только два независимых цикла, окружающих тор. Таким образом, концепция гомологий является естественной.

§ 11.3. КОГОМОЛОГИИ И ГОМОЛОГИИ

Какова связь между группами гомологий и когомологий для компактного многообразия? Можно показать, что из-за дуальности этих групп их размерности совпадают. Определим числа Бетти как размерности групп H :

$$b^p = \dim H^p(M) = \dim H_p(M). \quad (11.3.1)$$

Пусть c_p — набор циклов, определенных на компактном многообразии M . Пусть ω_q — набор определенных на M замкнутых форм. Теперь введем матрицу Ω_{pq} :

$$\Omega(c_p, \omega_q) = \int_{c_p} \omega_q. \quad (11.3.2)$$

Матрица Ω называется *матрицей периодов* (см. (5.6.31) и (5.11.8)), и при достаточно общих предположениях можно показать, что эта матрица обратима. Поэтому она является $(N \times N)$ -матрицей с ненулевым детерминантом. Но если матрица периодов является квадратной матрицей, действующей в пространстве N измерений, то размерность пространства замкнутых форм ω_q равна размерности пространства циклов c_p , что доказывает совпадение чисел Бетти для групп гомологий и когомологий. Это очень важный результат, потому что он означает, что можно использовать либо локальные (когомологии), либо глобальные (гомологии) свойства заданного многообразия для подсчета его чисел Бетти.

Важно также понимать, что числа Бетти являются топологическими числами, зависящими только от топологии многообразия. Таким образом, любая линейная комбинация чисел Бетти также является топологическим числом. В частности, наиболее важным среди них является эйлерова характеристика:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^N (-1)^i b_i. \quad (11.3.3)$$

Для того чтобы понять свойства чисел Бетти, введем несколько операторов, в том числе лапласиан. Введем оператор Ходжа $*$, преобразующий p -формы в $(N - p)$ -формы:

$$\begin{aligned} *(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) &= \\ &= \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}}, \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

где $\varepsilon_{ijkl\dots}$ является полностью антисимметричным тензором в пространстве N измерений. Заметим, что

$$\begin{aligned} **\omega_p &= (-1)^p \omega_p, \\ \omega_p \wedge *\omega_q &= \omega_q \wedge *\omega_p. \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

В N -мерном пространстве внешнее произведение p -формы и

$(N - p)$ -формы дает N -форму, пропорциональную форме объема $d^N x$. Таким образом, можно брать интеграл от внешнего произведения p -формы и $(N - p)$ -формы и получать вещественное число. Определим еще одно внутреннее произведение:

$$(\alpha_p | \beta_p) = \int_M \alpha_p \wedge * \beta_p. \quad (11.3.6)$$

Введение определения скалярного произведения форм тотчас же позволяет нам определить оператор δ , сопряженный к оператору d внешнего дифференцирования:

$$(\alpha_p | d\beta_{p-1}) = (\delta\alpha_p | \beta_{p-1}). \quad (11.3.7)$$

В явном виде сопряженный к d оператор δ дается формулой

$$\delta = (-1)^{Np+N+1} * d*. \quad (11.3.8)$$

Мы также имеем

$$\delta\delta = 0. \quad (11.3.9)$$

Отметим, что сопряженный оператор уменьшает степень дифференциальной формы на единицу, в то время как d увеличивает ее на единицу. Определим теперь *лапласиан* как

$$\Delta = (d + \delta)^2 = \delta d + d\delta. \quad (11.3.10)$$

Определим *гармонические p -формы* условием:

$$\text{Гармонические формы: } \Delta\omega = 0. \quad (11.3.11)$$

Определим *козамкнутые p -формы* условием:

$$\text{Козамкнутость: } \delta\omega = 0. \quad (11.3.12)$$

Говорим, что p -форма является *коточной*, если она может быть записана в виде

$$\text{Коточность: } \omega = \delta\alpha \quad (11.3.13)$$

для некоторой $(p + 1)$ -формы α .

Теперь мы можем сформулировать следующую важную теорему.

Теорема Ходжа. *На компактном многообразии без края¹⁾ любая p -форма может быть единственным образом разложена на сумму точной, коточной и гармонической форм, т. е.*

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p, \quad (11.3.14)$$

где γ_p — гармоническая форма.

Это сильный результат, поскольку можно показать, что каждый когомологический класс содержит только одну гармоническую форму.

¹⁾ Такие многообразия называются замкнутыми. — Прим. перев.

Чтобы увидеть это, построим сначала внутреннее произведение формы и лаплассиана от нее:

$$(\omega | \Delta\omega) = |\delta\omega|^2 + |d\omega|^2. \quad (11.3.15)$$

Таким образом, утверждение о гармоничности формы (которое дает $(\omega | \Delta\omega) = 0$) эквивалентно точности и коточности формы (так как $|\delta\omega|^2 = 0$ и $|d\omega|^2 = 0$). Действительно, можно показать, что

$$\Delta\omega = 0, \text{ если и только если } \delta\omega = d\omega = 0. \quad (11.3.16)$$

Но если $d\omega = 0$, то это означает, что $d\delta\beta = 0$ и поэтому $\delta\beta = 0$. Следовательно, (11.3.14) редуцируется к

$$\omega = da + \gamma. \quad (11.3.17)$$

Таким образом, в каждом классе когомологий содержится единственный гармонический представитель.

Тот факт, что в каждом классе эквивалентности точных форм содержится один гармонический представитель, позволяет по-другому определить числа Бетти. Мы можем также сказать, что числа Бетти подсчитывают, сколько независимых гармонических форм существует на данном многообразии. Получаем следующее эквивалентное описание чисел Бетти:

$$\text{Число Бетти} = \begin{cases} \text{число независимых замкнутых форм,} \\ \text{число независимых циклов,} \\ \text{число гармонических форм.} \end{cases} \quad (11.3.18)$$

Тем самым мы можем использовать любой из этих эквивалентных формализмов для вычисления чисел Бетти.

Последняя формулировка чисел Бетти (через независимые гармонические формы) дает нам еще одно определение. Множество гармонических форм можно рассматривать как ядро лаплассиана (т. е. те формы, которые этот оператор отображает в нуль). Итак, числа Бетти можно определить так:

$$b_p = \begin{cases} \dim \ker \Delta_p, \\ \dim H_p, \\ \dim H^p. \end{cases} \quad (11.3.19)$$

Как мы увидим, полезно изучить свойства некоторых из этих чисел Бетти. Во-первых, всегда можно определить скалярное произведение для N -мерного многообразия:

$$(\omega_p | \omega_{N-p}) = \int_M \omega_p \omega_{N-p}. \quad (11.3.20)$$

Поэтому эти два пространства содержат одинаковое число независимых

элементов. Следовательно,

$$b_p = \dim H^p = b_{N-p} = \dim H_{N-p}. \quad (11.3.21)$$

Изоморфизм пространств H^p и H_p называется дуальностью Пуанкаре. Обычно мы будем брать $b_0 = 1$, тогда и $b_n = 1$.

Другой способ доказательства дуальности Пуанкаре связан с тем обстоятельством, что если выбрана гармоническая форма, то и дуальная форма также является гармонической:

$$\Delta\omega = 0 \rightarrow \Delta*\omega = 0. \quad (11.3.22)$$

Поскольку число независимых гармонических форм равно числу Бетти, а оператор Ходжа $*$ переводит p -формы в $(N-p)$ -формы, то мы снова получаем дуальность Пуанкаре.

Наконец, если мы имеем произведение многообразий, тогда эйлерова характеристика произведения многообразий равна произведению эйлеровых характеристик каждого многообразия:

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \times \chi(N). \quad (11.3.23)$$

Если переписать это через числа Бетти согласно (11.3.3), то получим

$$b_k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b_p(M) b_q(N), \quad (11.3.24)$$

так называемую форму Кюннета для произведения многообразий.

Возьмем теперь несколько простейших поверхностей и вычислим их числа Бетти.

(1) Двумерный тор

Двумерный тор может быть разбит на циклы при помощи двух разрезов. Число независимых 1-циклов, которые можно натянуть на тор, равно двум. Итак, $b_1 = 2$. Далее, согласно дуальности Пуанкаре, имеем

$$T_2: \begin{cases} b_0 = b_2 = 1, \\ b_1 = 2. \end{cases} \quad (11.3.25)$$

Таким образом, эйлерова характеристика (11.3.3) тора равна

$$\chi(T_2) = 1 - 2 + 1 = 0. \quad (11.3.26)$$

(2) Риманова поверхность

Как было показано в гл. 5, существует $2g$ разрезов, которыми можно разделить риманову поверхность рода g на независимые циклы. Каждой дырке или ручке соответствуют два таких цикла. Следовательно, $b_1 = 2g$. Имеем

$$\begin{cases} b_0 = b_2 = 1, \\ b_1 = 2g. \end{cases} \quad (11.3.27)$$

Таким образом, эйлерова характеристика замкнутой римановой поверхности равна

$$\chi(M) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g. \quad (11.3.28)$$

(3) N -сфера

Циклы на сфере S_N , конечно, всегда могут быть стянуты в точку. Поэтому на S_N не существует независимых циклов. Следовательно,

$$S_N: \begin{cases} b_0 = b_N = 1, \\ b_p = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11.3.29)$$

Для эйлеровой характеристики получаем

$$\chi(S_N) = \begin{cases} 0, & \text{если } N \text{ четно,} \\ 2, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (11.3.30)$$

В частности, поскольку

$$T_2 = S_1 \times S_1, \quad (11.3.31)$$

можно использовать правило произведения эйлеровых характеристик и показать, что эйлерова характеристика тора равна

$$\chi(T_2) = \chi(S_1)^2 = 0, \quad (11.3.32)$$

что согласуется с приведенным выше вычислением.

(4) Произведение сфер

Используя (11.3.24), можно показать, что для произведения $S_3 \times S_3$ числа Бетти суть

$$S_3 \times S_3: \begin{cases} b_0 = b_6 = 1, \\ b_3 = 2, \\ b_p = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11.3.33)$$

Мы находим, что эйлерова характеристика равна нулю, как и следовало ожидать, поскольку эйлерова характеристика трехмерной сферы также равна нулю:

$$\chi(S_3 \times S_3) = \chi(S_3) \times \chi(S_3) = 0. \quad (11.3.34)$$

Аналогично можно взять произведение $S_2 \times S_2 \times S_2$, числа Бетти которого равны

$$S_2 \times S_2 \times S_2: \begin{cases} b_0 = b_6 = 1, \\ b_2 = b_4 = 3, \\ b_p = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11.3.35)$$

Для эйлеровой характеристики получаем

$$\chi(S_2 \times S_2 \times S_2) = \chi(S_2)^3 = 8. \quad (11.3.36)$$

(5) Четырехмерный тор

Можно представить 4-мерный тор как

$$T_4 = T_2 \times T_2. \quad (11.3.37)$$

В качестве простого упражнения можно показать, что формула Кюннета (11.3.24) для произведения многообразий дает

$$T_4: \begin{cases} b_0 = b_4 = 1, \\ b_1 = b_3 = 4, \\ b_2 = 6. \end{cases} \quad (11.3.38)$$

Подставляя полученные числа Бетти в формулу для эйлеровой характеристики, находим

$$\chi(T_4) = \chi(T_2)\chi(T_2) = 0, \quad (11.3.39)$$

как и следовало ожидать.

(6) Шестимерный тор

Для шестимерного тора T_6 имеем

$$T_6 = T_2 \times T_2 \times T_2. \quad (11.3.40)$$

Поэтому мы можем использовать формулу Кюннета для нахождения чисел Бетти произведения многообразий. Легко показать, что

$$T_6: \begin{cases} b_0 = b_6 = 1, \\ b_1 = b_5 = 6, \\ b_2 = b_4 = 15, \\ b_3 = 20. \end{cases} \quad (11.3.41)$$

Отсюда получаем, что эйлерова характеристика равна нулю:

$$\chi(T_6) = 0. \quad (11.3.42)$$

Это следует также и из того факта, что каждый цикл в T_6 имеет нулевую эйлерову характеристику. Используя сформулированные выше простые правила, можно легко получить числа Бетти для T_N .

(7) Вещественное и комплексное проективные пространства

Пространство CP_N получается, если взять обычное комплексное $(N + 1)$ -мерное пространство и отождествить

$$z_p = \lambda z_p \quad (11.3.43)$$

для некоторого ненулевого комплексного числа λ . Это отождествление превращает комплексное $(N + 1)$ -мерное пространство в комплексное проективное N -мерное пространство. CP_N является обобщением вещественного проективного пространства P_N , которое получается после отождествления точек в $(N + 1)$ -мерном вещественном пространстве по формуле

$$x_p = kx_p \quad (11.3.44)$$

для некоторого ненулевого вещественного k . Пространство P_N можно также получить отождествлением противоположных точек сферы S_N . Примерами вещественных и комплексных проективных пространств служат

$$\begin{aligned} CP_1 &= S_2, \\ P_3 &= SO(3) = SU(2)/Z_2, \\ CP_N &= \frac{SU(N+1)}{U(N)}. \end{aligned} \quad (11.3.45)$$

Числа Бетти для них будут следующими:

$$P_N: \begin{cases} b_0 = 1, \\ b_N = 0 \text{ (} N \text{ четное); } = 1 \text{ (} N \text{ нечетное),} \\ b_i = 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \quad (11.3.46)$$

$$\chi(P_N) = 1 \text{ (} N \text{ четное); } = 0 \text{ (} N \text{ нечетное)}$$

и

$$CP_N: \begin{cases} b_{\text{четное}} = 1, \\ b_{\text{нечетное}} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\chi(CP_N) = N + 1. \quad (11.3.47)$$

§ 11.4. КЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

До сих пор наше обсуждение касалось в основном вещественных многообразий. Однако эти результаты довольно легко обобщаются на комплексные многообразия.

Для того чтобы определить N -мерное комплексное многообразие, нам понадобится $2N$ -мерное вещественное многообразие и обобщение

обычного определения комплексного числа: $z = x + iy$, где $i^2 = -1$. Если мы имеем $2N$ -мерное вещественное многообразие, то при наличии на нем $2N \times 2N$ тензорного поля J_i^j , заменяющего мнимую единицу i и удовлетворяющего матричному уравнению

$$J^2 = -I, \quad (11.4.1)$$

можно определить комплексное число как

$$Z = x + Jy. \quad (11.4.2)$$

Многообразия, на которых задано такое тензорное поле J , называются *почти комплексными*.

Однако мы хотим большего, нежели только существования тензорного поля J . Мы хотели бы диагонализировать J . Если мы используем комплексные координаты

$$\begin{aligned} z_a &= x_a + iy_a, \\ \bar{z}_a &= x_a - iy_a, \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

то хотелось бы произвести такую замену переменных, чтобы

$$J_a^b = i\delta_a^b. \quad (11.4.4)$$

Вопрос стоит так: всегда ли мы можем диагонализировать J в окрестности точки p , используя преобразование координат

$$z'_a = z'_a(z_b) \quad (11.4.5)$$

(которое не является функцией от \bar{z})? Такое преобразование координат называется *голоморфным*, что является обобщением понятия аналитичности. Для разных точек p мы, конечно, должны будем склеивать эти окрестности друг с другом, используя различные голоморфные преобразования, до тех пор, пока не покроем ими всю поверхность.

Если всегда можно найти такие голоморфные преобразования, которые диагонализуют J в окрестности каждой точки p многообразия, то мы будем говорить, что многообразие имеет комплексную структуру и является *комплексным* многообразием.

Итак, имеем следующие аналогии:

Одно измерение	N измерений
i	$J_a^b = i\delta_a^b$
Аналитичность	Голоморфность
$z = x + iy$	$z = x + Jy$

(11.4.6)

(Интуитивно, процесс склеивания окрестностей, в которых J является диагональным, напоминает «проблему лифта» в общей теории относительности. С помощью общекординатного преобразования в любой выбранной точке мы всегда можем локально обратить символы Крис-

тоффеля в нуль, что соответствует свободному падению в лифте и отсутствию гравитации. Но, вообще говоря, мы не можем глобально обратить в нуль символы Кристоффеля, иначе пространство будет плоским, однако в каждой точке многообразия мы можем перейти в систему отсчета, связанную с лифтом.)

На первый взгляд, данное выше определение комплексного многообразия может показаться слишком многословным для столь интуитивного понятия. Однако можно привести примеры $2N$ -мерных вещественных многообразий, для которых используемый в определении критерий не выполняется. Например, сферы S_{2N} не являются комплексными многообразиями (за исключением S_2 , так как $S_2 = CP_1$). Таким образом, отнюдь не очевидно, что произвольное $2N$ -мерное вещественное многообразие может быть представлено как N -мерное комплексное многообразие.

Обсудим дифференциальные формы на комплексных многообразиях. Комплексифицируем наши базисные дифференциалы следующим образом:

$$dz^j = dx^j + idy^j. \quad (11.4.7)$$

Понятие p -формы теперь может быть обобщено до понятия (p, q) -формы

$$\omega = \omega_{ijk\dots u, \bar{i}\bar{j}\bar{k}\dots\bar{u}} dz^i \wedge dz^j \dots dz^u \wedge d\bar{z}^{\bar{i}} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \dots d\bar{z}^{\bar{u}} \quad (11.4.8)$$

с p ненадчеркнутыми и q надчеркнутыми индексами. Теперь мы можем определить две внешние производные:

$$\begin{aligned} \partial\omega &= \frac{\partial}{\partial z^i} \omega_{ijk\dots u, \bar{i}\bar{j}\bar{k}\dots\bar{u}} dz^i \wedge dz^j \dots dz^u \wedge d\bar{z}^{\bar{i}} \dots d\bar{z}^{\bar{u}}, \\ \bar{\partial}\omega &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{i}}} d\bar{z}^{\bar{i}} \omega_{ijk\dots u, \bar{i}\bar{j}\bar{k}\dots\bar{u}} dz^i \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

Свойства этих производных таковы:

$$\begin{cases} \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0, \\ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \\ d = \frac{1}{2}(\partial + \bar{\partial}). \end{cases} \quad (11.4.10)$$

Каждая форма теперь характеризуется двумя индексами (p, q) . Следовательно, можно определить новую группу когомологий. Вместо когомологий де Рама, строящихся с помощью оператора d , мы будем иметь дело с *когомологиями Дольбо*, использующих оператор $\bar{\partial}$. Как и прежде, можно определить замкнутые и точные (p, q) -формы, используя $\bar{\partial}$ вместо d :

$$H^{p,q}(M) = \frac{\bar{\partial}\text{-замкнутая } (p, q)\text{-форма}}{\bar{\partial}\text{-точная } (p, q)\text{-форма}}. \quad (11.4.11)$$

Как и прежде, можно ввести сопряженный оператор и лапласиан. В комплексном случае мы на самом деле имеем два лапласиана:

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial} &= \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial, \\ \Delta_{\bar{\partial}} &= \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}.\end{aligned}\tag{11.4.12}$$

Теперь можно сформулировать комплексную версию теоремы Ходжа:

Теорема Ходжа. *Каждая комплексная (p, q) -форма имеет единственное разложение*

$$\omega = \alpha + \bar{\partial}\beta - \partial\gamma,\tag{11.4.13}$$

где α — гармоническая форма:

$$\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0,$$

α, β, γ — формы типов $(p, q-1)$ и $(p, q+1)$ соответственно.

Можно ввести обобщение чисел Бетти формулой¹⁾

$$\dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = h^{p,q}.\tag{11.4.14}$$

Связь с прежними числами Бетти дается формулой

$$b_n = \sum_{p+q=n} h^{p,q}.\tag{11.4.15}$$

Применяя комплексное сопряжение, получаем соотношение

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

и свойство дуальности Пуанкаре

$$h^{p,q} = h^{N-p, N-q}.\tag{11.4.16}$$

Дадим теперь определение кэлерова многообразия. Если мы имеем комплексное многообразие с эрмитовой метрикой $g_{i\bar{j}}$, то всегда можно ввести два-форму

$$\Omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}},\tag{11.4.17}$$

называемую кэлеровой формой. Комплексное многообразие называется кэлеровым, если

$$d\Omega = 0.\tag{11.4.18}$$

Кэлерово многообразие характеризуется тем, что его кэлерова форма замкнута.

Кэлерово многообразие вследствие данного выше определения имеет много замечательных свойств, делающих его наиболее привлекательным среди всех комплексных многообразий. Мы просто перечислим некоторые из этих свойств:

(1) Можно показать, что эрмитова метрика на кэлеровом многообразии

¹⁾ Числа $h^{p,q}$ называются числами Ходжа. — Прим. перев.

может быть записана через производные от одной функции, кэлерова потенциала φ :

$$g_{\bar{j}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}. \quad (11.4.19)$$

- (2) Непосредственным вычислением легко показать, что на кэлеровом многообразии выполняется

$$2\Delta_d = \Delta_c = \Delta_{\bar{d}}. \quad (11.4.20)$$

В силу этих тождеств различные лапласианы, которые можно задать на кэлеровом многообразии, совпадают. Таким образом, на кэлеровом многообразии не возникает путаницы при использовании разных лапласианов.

- (3) Если многообразие допускает кэлерову метрику, то числа Бетти четной степени должны быть больше или равны единице, а числа Бетти нечетной степени должны принимать четные значения:

$$\text{Кэлерово многообразие} \rightarrow \begin{cases} b_{2p} \geq 1, \\ b_{2n+1} = \text{четные числа} \end{cases} \quad (11.4.21)$$

для натуральных чисел p и n . (Этот простой критерий исключает из рассмотрения большой класс многообразий. Например, $S_3 \times S_3$ не допускает кэлеровой метрики, поскольку $b_2 = 0$. Критерий (11.4.21) исключает также P_N , но допускает кэлерову структуру на CP_N .)

- (4) Если J_m^n – ковариантно постоянный тензор, то метрика кэлерова. Для комплексных многообразий верно и обратное утверждение:

$$\nabla^a J_a^b = 0 \leftrightarrow \text{эрмитова метрика является кэлеровой}. \quad (11.4.22)$$

- (5) Если два-форма кручения, которую можно ввести на комплексном многообразии, равна нулю, то метрика будет кэлеровой.
 (6) Единственные ненулевые символы Кристоффеля на кэлеровом многообразии равны

$$\Gamma_{ab}^c = g^{cc} g_{a\bar{c}, b}. \quad (11.4.23)$$

Единственные ненулевые компоненты тензора кривизны даются формулой

$$R_{ab\bar{c}}^d = -\Gamma_{ab, \bar{c}}^d, \quad (11.4.24)$$

а другие компоненты можно получить, используя симметрии тензора кривизны и комплексное сопряжение. Компоненты тензора Риччи становятся равны

$$R_{a\bar{b}} = -\frac{\partial^2 (\ln \det g)}{\partial z^a \partial \bar{z}^b}. \quad (11.4.25)$$

Два-форма

$$R = R_{a\bar{b}} dz^a d\bar{z}^b \quad (11.4.26)$$

замкнута: $dR = 0$.

- (7) В качестве прямого следствия можно показать, что группой голономии кэлеровых многообразий служит $U(N)$. Это может быть использовано как альтернативное определение кэлерова многообразия. Отметим, что группа голономии есть группа вращения, генерируемая движениями по замкнутым путям на многообразии и зависящая от

$$[D_a, D_b] \sim R_{ab}^i M_{ij}, \quad (11.4.27)$$

где M_{ij} — матрицы алгебры Ли некоторой группы вращений $2N$ -мерного касательного пространства. Коэффициенты при M_{ij} , как видим, зависят от антисимметричного тензора Римана R_{abcd} , и $R_{ab}^i M_{ij}$ можно теперь рассматривать как антисимметричные $(2N \times 2N)$ -матрицы алгебры Ли группы вращений. При этом для произвольного многообразия группой голономии будет $SO(2N)$. Однако если многообразие кэлерово, то можно показать, что ограничения на тензор кривизны, которые мы нашли ранее, редуцируют группу $SO(2N)$ к группе $U(N)$, являющуюся подгруппой в $SO(2N)$. Ограничение, состоящее в том, что (11.4.24) есть единственные ненулевые компоненты тензора кривизны, нарушает $SO(2N)$ -симметрию.

- (8) Класс кэлеровых многообразий, имеющих $U(N)$ группу голономии, может быть еще более сужен, если мы потребуем, чтобы многообразия имели нулевой первый класс Черна. В этом случае группа голономии $U(N)$ редуцируется до $SU(N)$. Действительно, для любого N выполняется теорема Калаби-Яу, утверждающая, что кэлерово многообразие с нулевым первым классом Черна всегда допускает кэлерову метрику с группой голономии $SU(N)$. Можно показать, что исчезновение первого класса Черна эквивалентно тому, что на многообразии существует риччи-плоская метрика. Поэтому мы будем использовать эти два понятия как взаимозаменяемые.

Теперь будет полезно рассмотреть конкретные примеры кэлеровых многообразий.

(1) Римановы поверхности

Любая ориентируемая риманова поверхность допускает кэлерову метрику. Поскольку квадрат элемента длины на любой римановой поверхности может быть представлен в виде

$$ds^2 = e^\sigma dz d\bar{z}, \quad (11.4.28)$$

то поверхность будет кэлеровым многообразием, потому что всегда можно подобрать кэлеров потенциал ϕ так, чтобы выполнялось

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \phi = e^\sigma. \quad (11.4.29)$$

Кэлеровость римановых поверхностей очевидна, так как любая 2-форма на римановой поверхности, включая и кэлерову 2-форму, является замкнутой.

(2) Комплексное N -мерное пространство

Очевидно, что комплексное N -мерное пространство S_N кэлерово, так как его стандартная билинейная форма

$$ds^2 = \sum_i |dz^i|^2 \quad (11.4.30)$$

всегда может быть приведена к кэлерову виду.

(3) Сфера

Заметим, что S_N , вообще говоря, не допускает кэлеровой метрики. Это связано с тем, что числа Бетти четной степени b_{2p} для p , равного ненулевому целому числу, обычно все равны нулю. Следовательно, они не могут быть больше или равны единице, что было одним из необходимых условий для кэлеровых многообразий. Исключением служит двумерная сфера S_2 , которая не имеет ненулевых чисел Бетти четной степени. Чтобы показать, что два-сфера допускает кэлерову метрику, заметим, что S_2 имеет квадрат элемента длины следующего вида:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \quad (11.4.31)$$

Если переписать это в комплексной форме, то мы можем записать кэлерову форму в виде

$$\Omega = \frac{1}{2} i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \quad (11.4.32)$$

Эта кэлерова форма точна, и, следовательно, S_2 допускает кэлерову метрику. Хотя S_2 и является кэлеровым многообразием, нетрудно показать, что $C_1 \neq 0$, и поэтому S_2 не является риччи-плоским многообразием.

Заметим, что $S_p \times S_q$ — комплексное многообразие, если p и q — нечетные числа. Однако это не означает, что многообразия $S_p \times S_q$ кэлеровы. Действительно, $S_3 \times S_3$ и $S_1 \times S_5$ — комплексные многообразия, но они не являются кэлеровыми. А $S_3 \times S_3 \times S_3$ — кэлерово (но не риччи-плоское).

(4) Комплексное проективное N -мерное пространство

Для доказательства кэлеровости пространства CP_N заметим, что его метрика может быть записана как метрика Фубини-Штуди на CP_N :

$$\Omega = \frac{1}{2} i \partial \bar{\partial} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^N z^i \bar{z}^i \right). \quad (11.4.33)$$

(5) Комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}P_N$

Легко видеть, что комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}P_N$ также являются кэлеровыми многообразиями. Фактически для подмногообразий мы используем метрику, определенную для $\mathbb{C}P_N$, выбирая только те компоненты метрического тензора, индексы которых пробегает касательное к подмногообразию пространство. Поскольку исходная метрика кэлерова, метрика на подмногообразии (совпадающая с исходной) также должна быть кэлеровой.

(6) Торы

Двумерный тор T_2 имеет равный нулю первый класс Черна: $c_1 = 0$. Можно также показать, что четырехмерный тор T_4 кэлеров. И, наконец, можно показать, что шестимерный тор T_6 одновременно является кэлеровым и риччи-плоским. Таким образом, компактификация на шестимерный тор, похоже, обладает тем желательным свойством, что $(N - 1)$ -суперсимметрия сохраняется. Однако недостатком шестимерного тора является сохранение слишком большого числа симметрий. Действительно, на T_6 сохраняется $(N = 4)$ -суперсимметрия, что делает его неприемлемым с точки зрения феноменологии.

Соберем некоторые из полученных выше результатов в таблицу:

Многообразие	Комплексное	Кэлерово	R -кэлерово	χ
S_2	Да	Да	Нет	2
S_{2n-1}	Нет	Нет	Нет	0
S_{2n+2}	Нет	Нет	Нет	2
$(S_3)^2$	Да	Нет	Нет	0
$S_1 \times S_5$	Да	Нет	Нет	0
$(S_2)^3$	Да	Да	Нет	8
$S_1 \times S_{2n+1}$	Да	Да	Да	0
T_2	Да	Да	Да	0
T_6	Да	Да	Да	0
$\mathbb{C}P_3$	Да	Да	Нет	4
$\mathbb{C}P_M$	Да	Да	—	$M+1$

Здесь R -кэлерово означает риччи-плоское и кэлерово, χ равно эйлеровой характеристике и $n = 1, 2, 3, \dots$

Отметим, что условие равенства нулю тензора Риччи налагает дополнительные ограничения на кэлерово многообразие. Например, кэлерово многообразие комплексной размерности три имеет $c_1 = 0$ тогда и только тогда, когда на нем существует ковариантно постоянная ненулевая голоморфная три-форма ω . Это доказывает, в частности, что $S_2 \times S_2 \times S_2$ не допускает риччи-плоской кэлеровой метрики. (Мы знаем, что это многообразие имеет $b_3 = 0$. Значит, по определению на нем не существует гармонических три-форм. Но это также означает, что не

существует и голоморфных три-форм. Следовательно, $S_2 \times S_2 \times S_2$ не допускает риччи-плоской кэлеровой метрики.)

Другое простое следствие этого заключается в том, что любая гармоническая $(p, 0)$ -форма в трех комплексных измерениях может быть умножена на ω , что даст в результате гармоническую $(0, 3-p)$ -форму:

$$c_1 = 0 \rightarrow h^{p,0} = h^{0,3-p}. \quad (11.4.34)$$

Это равенство выполняется в силу, что ω ковариантно постоянна и, следовательно, под знаком лапласиана ведет себя как константа. Так что гармоническая форма остается гармонической после умножения на ω . При этом $(p, 0)$ -форма становится $(0, 3-p)$ -формой, поскольку мы свертываем с эрмитовым метрическим тензором $g_{a\bar{b}}$, а не с g_{ab} .

Изложенное выше позволяет избавиться почти ото всех чисел Ходжа. Используя различные симметрии относительно отражений и предыдущую симметрию, можно показать, что лишь $h^{1,1}$, $h^{2,1}$, $h^{1,0}$ остаются как независимые компоненты на многообразии с $SU(3)$ -голономией. Среди них можно также вычеркнуть $h^{1,0}$ по следующей причине. Мы знаем, что лапласиан всегда можно разложить, представив его в виде

$$\Delta_d = -\nabla^2 + \text{члены с кривизной}. \quad (11.4.35)$$

При действии на 1-форму различные члены, содержащие тензор кривизны, сворачиваются в тензор Риччи. Но тензор Риччи равен нулю на риччи-плоском многообразии. Следовательно, гармоническая 1-форма должна быть ковариантно постоянной. Это означает, что число Бетти гармонических 1-форм должно равняться нулю: $b_1 = 0$. Но это также означает, что $h^{1,0} = 0$ в силу (11.4.15). Собирая все сказанное вместе, можно показать, что для риччи-плоского многообразия

$$\chi = \sum_{p,q=n} (-1)^{p+q} h^{p,q} = 2(h^{1,1} - h^{2,1}). \quad (11.4.36)$$

Последнее равенство, выполняющееся для риччи-плоской метрики, станет чрезвычайно важным, когда мы будем обсуждать проблему поколений. Оказывается, что $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$ связаны с числом фермионов положительной и отрицательной киральности, которые можно ввести на многообразии, так что уравнение (11.4.36) констатирует, что число поколений равно половине эйлеровой характеристики:

$$\text{Число поколений} = \frac{1}{2} |\chi|. \quad (11.4.37)$$

Таким образом мы получаем, что число поколений имеет топологическое происхождение!

§ 11.5. ВЛОЖЕНИЕ СПИНОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Вооруженные приведенным набором элементарных сведений из алгебраической топологии, вернемся к феноменологии теории струн и используем полученную информацию.

Выше мы видели, что условие $(N = 1)$ -суперсимметрии подразумевает существование ковариантно постоянного спинора. Это в свою очередь предполагает, что шестимерное многообразие кэлерово, риччи-плоское и имеет группу голономии $SU(3)$:

$$(N = 1)\text{-суперсимметрия} \rightarrow \text{ковариантно постоянный спинор} \rightarrow \\ \rightarrow \text{кэлерово, риччи-плоское, } SU(3)\text{-голономия.}$$

Теперь мы хотим использовать оставшееся условие, следующее из тождества Бьянки (11.1.9):

$$\text{Tr } R \wedge R = \frac{1}{30} \text{Tr } F \wedge F. \quad (11.5.1)$$

Это воистину странное равенство, так как мы имеем тензор Римана слева и тензор Янга-Миллса справа. Уравнение (11.1.9), являющееся тождеством, лишено какого бы то ни было содержания, но если мы предположим

$$d\varphi = H = 0, \quad (11.5.2)$$

то найдем, что уравнению (11.5.1) довольно сложно удовлетворить. Таким образом, сохранение тождества Бьянки нетривиально из-за большого числа связей, налагаемых на рассматриваемую систему.

Есть один привлекательный способ разрешить это дополнительное уравнение. Он заключается в том, чтобы *часть калибровочных полей группы $E_8 \otimes E_8$ положить равными римановой спиновой связности, имеющей группу голономии $SU(3)$* . Это приводит к нетривиальной связи между спиновой связностью и калибровочным полем Янга-Миллса. Это вложение в герминах калибровочных полей можно выполнить следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}. \quad (11.5.3)$$

Здесь ω – спиновая связность, занимающая часть матрицы калибровочного поля. Следовательно, чтобы вложить спиновую связность в калибровочное поле Янга-Миллса, необходимо найти подгруппу калибровочной группы, содержащую группу $SU(3)$. Это означает, конечно, что мы нарушаем исходную калибровочную симметрию поля Янга-Миллса. Простейшее разложение имеет вид

$$E_8 \otimes E_8 \supset SU(3) \otimes E_6 \otimes E_8. \quad (11.5.4)$$

При этом мы должны проверить, что коэффициенты Клебша-Гордона таковы, что тождества Бьянки удовлетворяются. В частности, необходимо показать, что мы можем получить множитель $\frac{1}{30}$ в тождестве Бьянки (11.1.9).

Мы знаем, что калибровочные поля Янга-Миллса находятся в при соединенном представлении группы E_8 , имеющей 248 базисных элемен-

тов. Мы должны теперь найти разложение этих 248 элементов на представления группы $SU(3) \otimes E_6$, что всегда можно сделать. Находим

$$248 = (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (\bar{8}, \bar{1}) \oplus (1, 78). \quad (11.5.5)$$

Чтобы увидеть, выполняется ли (11.5.1), перейдем от присоединенного представления группы $SU(3)$ к представлению $3 \oplus \bar{3}$. Пусть λ – генератор группы $SU(3)$. Мы хотим найти связь между следом квадрата матрицы λ в представлении 8 и представлении $3 \oplus \bar{3}$. Ответ таков:

$$\text{Tr}(\lambda_8^a)^2 = 3\text{Tr}(\lambda_{3 \oplus \bar{3}}^a)^2. \quad (11.5.6)$$

Сосредоточимся теперь на мультиплетах группы $SU(3)$ в разложении (11.5.5). Заметим, что мы имеем 27 полей, преобразующихся по представлению $3 \oplus \bar{3}$ группы $SU(3)$, а также один октет. Но сумма следов квадратов матриц октета, как мы видели в (11.5.6), должна быть умножена на 3, когда мы переходим к представлению $3 \oplus \bar{3}$ матриц группы $SU(3)$. Таким образом, суммарный «излишек» в представлении $3 \oplus \bar{3}$ равен

$$27 + 3 \times 1 = 30,$$

что и дает множитель 30. В силу вложения спиновой связности, при котором тензор кривизны определяет то же самое пространство, что и тензор Янга-Миллса, мы можем теперь удовлетворить (11.5.1), так как недостающий коэффициент 30 появляется, когда мы подсчитываем кратность вхождения представлений группы $SU(3)$ в (11.5.5).

Нарушение симметрии до $SU(3) \otimes E_6$ предпочтительно по феноменологическим причинам, так как группа E_6 была широко исследована при построении модели ТВО¹⁾.

Исходная группа E_8 не имеет, в противоположность E_6 , комплексных представлений, которые необходимы для описания киральных фермионов. Мультиплет **27** на самом деле является наиболее предпочтительным мультиплетом для фермионов при построении модели с группой E_6 . Группа E_6 хороша также и с точки зрения низкоэнергетической суперсимметрии, потому что представление **27** для фермионов может образовывать суперсимметричный мультиплет с представлением **27** для хиггсовских полей.

В кратком изложении феноменологически приемлемое заключение имеет вид

$$\text{Tr} R \wedge R = \frac{1}{30} \text{Tr} F \wedge F \rightarrow \text{вложение связности} \rightarrow \mathbf{27} \text{ для фермионов.} \quad (11.5.7)$$

Поскольку фермионы находятся теперь в представлении **27**, мы можем поставить вопрос: сколько существует поколений фермионов? Теории ТВО, как мы видели, досаждала проблема поколений. Не было

¹⁾ ТВО – Теория Великого Объединения.

причин для предположения существования более чем одного поколения.

В теории суперструн ситуация как раз противоположная. Мы сейчас покажем, что мы получаем слишком много поколений фермионов!

§ 11.6. ПОКОЛЕНИЯ ФЕРМИОНОВ

Одним из наиболее впечатляющих приложений алгебраической топологии к феноменологии теории струн является вычисление числа поколений непосредственно из топологических рассуждений.

Чтобы вычислить число поколений, предсказываемое теорией, мы сначала должны подсчитать число безмассовых частиц. Оператор Клейна–Гордона в 10-мерном пространстве для рассматриваемых частиц становится после компактификации суммой двух операторов Клейна–Гордона в 4 и 6 измерениях:

$$\square_{10}\Psi = (\square_4 + \square_6)\Psi = 0. \quad (11.6.1)$$

В общем случае \square_6 имеет собственные значения, обозначаемые m^2 , т. е. $\square_6\Psi_m = m^2\Psi_m$, так что наше волновое уравнение принимает вид

$$(\square_4 + m^2)\Psi_m = 0. \quad (11.6.2)$$

Нас интересует безмассовый сектор в четырех измерениях, поэтому мы хотим сохранить только нулевые собственные значения оператора \square_6 . Следовательно,

$$\square_4\Psi = \square_6\Psi = 0. \quad (11.6.3)$$

Это уравнение является важным, потому что имеет две интерпретации. Во-первых, оно означает, конечно, что четырехмерные фермионы безмассовы. Во-вторых, оно также означает, что Ψ является гармонической формой в шести измерениях. Следовательно, число безмассовых мод в четырехмерии будет связано с числом гармонических форм, которые можно задать на шестимерном многообразии. Выше в (11.3.18) мы видели, что число гармонических форм степени p равно p -му числу Бетти. Таким образом, одни только топологические аргументы уже могут дать нам число поколений! Суммируем:

$$m^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \Psi - \text{гармоническая форма в шести измерениях,} \\ \Psi - \text{безмассовый фермион в четырех измерениях.} \end{cases}$$

Естественно ожидать, что число поколений является топологическим инвариантом в силу теоремы Дирака об индексе¹⁾. Мы знаем, что решения уравнения Дирака могут, вообще говоря, иметь нулевые моды:

$$i\hat{D}\Psi = 0. \quad (11.6.4)$$

Действительно, индекс этого оператора равен разности между числом

¹⁾ Правильнее называть ее теоремой Атьи–Зингера об индексе оператора Дирака. — Прим. перев.

нулевых мод положительной и отрицательной киральности:

$$\text{Индекс}(\hat{D}) = n_+ - n_- . \quad (11.6.5)$$

Индекс оператора Дирака есть топологическая величина, определенная на спиновом многообразии²⁾, поэтому мы ожидаем, что он может быть связан с характеристическими классами, которые мы нашли ранее. Действительно, обсуждая SU(3)-голономию, мы нашли, что

$$\text{Индекс}(\hat{D}) = \frac{1}{2} |\chi(M)| . \quad (11.6.6)$$

Но индекс оператора Дирака также равен числу поколений, поскольку мы будем рассматривать только фермионы одной фиксированной киральности. Таким образом, точное соответствие между числом поколений и индексом оператора Дирака, или эйлеровой характеристикой, дается равенством

$$\text{Число поколений} = \frac{1}{2} |\chi(M)| . \quad (11.6.7)$$

Чтобы показать это, рассмотрим многообразие с SU(3)-голономией, с числами Бетти (Ходжа), имеющими два индекса p, q . Эйлерова характеристика может быть записана следующим образом:

$$\chi(M) = \sum_{p, q}^3 (-1)^{p+q} h_{p, q} . \quad (11.6.8)$$

Кратность супергравитационного и янг-миллсовского мультиплетов может быть определена подсчетом числа допустимых гармонических форм. Это число в свою очередь связано с числами Бетти. Если мы сравним спиральность суперсимметричных пар с их кратностью, то найдем:

$$\begin{aligned} \left(2, \frac{3}{2}\right) & h_{0,0}, \\ \left(\frac{3}{2}, 1\right) & h_{0,1}, \end{aligned} \quad (11.6.9)$$

$$\begin{aligned} \left(1, \frac{1}{2}\right) & (2h_{1,0} + h_{0,1}), \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) & (h_{0,0} + h_{1,1} + h_{2,1}). \end{aligned}$$

Если мы проанализируем сектор фермионов спина $1/2$, данных представлениями $(1/2, 0)$, то получим, что их число кратности таково:

$$\text{Фермионная кратность} = h_{0,0} + h_{1,1} + h_{2,1} . \quad (11.6.10)$$

²⁾ Так называют многообразия со спинорной структурой. - Прим. перев.

Эта кратность, однако, слишком велика. Нам нужна только часть от этого числа, соответствующая представлениям $\overline{27}$ и $\overline{27}$ фермионов спина $1/2$.

Ранее, в (11.5.5), мы нашли, что представление $\overline{248}$ для $E_8 \otimes E_8$ может быть разложено в $(\overline{27}, 3)$ и $(\overline{27}, 3)$. Можно показать, что кратность, связанная с каждым из этих двух представлений, равна

$$\begin{aligned} (\overline{27}, 3) &= h_{2,1}, \\ (\overline{27}, \overline{3}) &= h_{1,1}. \end{aligned} \tag{11.6.11}$$

Таким образом, число поколений равно

$$\#(\overline{27}) - \#(\overline{27}) = h_{2,1} - h_{1,1}, \tag{11.6.12}$$

где $\#$ означает кратность представления $\overline{27}$. Но это число в свою очередь в точности равно половине абсолютного значения эйлеровой характеристики, как мы видели в (11.4.36).

Связь между числом поколений и эйлеровой характеристикой достаточно неожиданна, так как нет никаких оснований полагать, что между ними существует какая-либо взаимосвязь. Число поколений является функцией янг-миллсовской калибровочной группы $E_8 \otimes E_8$, в то время как эйлерова характеристика зависит от многообразия K_6 . Трудно ожидать, что эти две величины могут находиться в соответствии друг с другом. Но связь между ними возникает в силу того, что мы совершаем вложение спиновой связности, которое нарушает калибровочную группу и устанавливает непосредственную связь между многообразием K_6 и калибровочной группой. Таким образом, суть этого важного результата является прямым следствием компактификации и вложения связности.

Далее, мы хотели бы вычислить эйлерову характеристику и, следовательно, число поколений для ряда метрик Калаби-Яу.

Выше мы показали, что подмногообразие многообразия CP_N , снабженного эйлеровой метрикой, также эйлерово, так как оно имеет ту же самую эрмитову метрику $g_{i\bar{j}}$. Таким образом, мы хотим рассмотреть множество подмногообразий в CP_N , имеющих нулевой первый класс Черна $c_1 = 0$. Этого можно достигнуть наложением связей на координаты z , потребовав, чтобы некоторые полиномы от z были равными нулю.

Рассмотрим подмногообразие в CP_4 , заданное при помощи следующего уравнения связи:

$$\sum_{i=1}^5 z_i^5 = 0. \tag{11.6.13}$$

Можно показать, что для этого многообразия первый класс Черна равен нулю и что $\chi(M)$ равна -200 .

Пусть

$$Y_{(N; d_1, d_2, \dots, d_k)} \tag{11.6.14}$$

обозначает многообразие, полученное приравниванием нулю k однородных полиномов степени d_i , заданных на $\mathbb{C}P_N$. К счастью, формула для полного класса Черна, а не только для первого класса Черна, для таких многообразий известна. Для $SU(3)$ -голомомии полный класс Черна равен

$$c = \frac{(1 + J)^{k+4}}{\prod_{i=1}^k (1 + d_i J)}, \quad (11.6.15)$$

где J – некоторая 2-форма, полученная нормировкой кэлеровой формы в $\mathbb{C}P_{k+3}$. Разлагая эту формулу в ряд и приравнивая первый класс Черна c_1 нулю, находим

$$\sum_{i=1}^k d_i = k + 4. \quad (11.6.16)$$

Таким образом, мы нашли только пять многообразий с нулевым первым классом Черна:

$$\begin{aligned} \chi(Y_{(4;5)}) &= -200, \\ \chi(Y_{(5;2,4)}) &= -176, \\ \chi(Y_{(5;3,3)}) &= -144, \\ \chi(Y_{(6;3,2,2)}) &= -144, \\ \chi(Y_{(7;2,2,2,2)}) &= -128. \end{aligned} \quad (11.6.17)$$

Следовательно, число поколений для каждого из этих многообразий неприемлемо велико! С точки зрения феноменологии это крайне нежелательно, так как в силу доводов теории нуклеосинтеза, космологии и требования асимптотической свободы в КХД мы знаем, что необходимо очень малое число поколений – три или четыре.

К счастью, мы можем еще редуцировать число поколений и сделать его намного меньше, рассматривая *неодносвязные связные многообразия*. Факторизуем исходное многообразие M_0 по дискретной группе симметрий G , действующей на многообразии свободно (т. е. без неподвижных точек), получая в итоге многообразие M . Если число генераторов дискретной группы G есть $n(G)$, тогда эйлерова характеристика исходного многообразия, факторизованного по дискретной группе G , равна

$$\chi(M) = \frac{\chi(M_0)}{n(G)}, \quad (11.6.18)$$

где

$$M = \frac{M_0}{G}. \quad (11.6.19)$$

Рассмотрим предыдущий пример подмногообразия в $\mathbb{C}P_4$ с

$$\sum_{i=1}^5 z_i^5 = 0. \quad (11.6.20)$$

Заметим, что этот полином инвариантен относительно следующих симметрий:

$$(z_1, z_2, \dots, z_5) \rightarrow (z_5, z_1, z_2, \dots, z_4), \quad (11.6.21)$$

$$(z_1, z_2, \dots, z_5) \rightarrow (z_1, \alpha z_2, \alpha^2 z_3, \dots, \alpha^4 z_5),$$

где α – корень пятой степени из единицы. Дискретная группа симметрии

$$Z_5 \times Z_5 \quad (11.6.22)$$

имеет 25 генераторов. Таким образом, эйлерова характеристика этого нового многообразия равна

$$\chi(M) = \frac{-200}{25} = -8, \quad (11.6.23)$$

что предсказывает четыре поколения.

Существует много других типов моделей с приемлемо «низким» числом поколений:

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{Y_{(5; 3,3)}}{Z_3 \times Z_3}\right) &= -16, \\ \chi\left(\frac{Y_{(7; 2,2,2,2)}}{Z_2 \times Z_2 \times Z_2}\right) &= -16, \\ \chi\left(\frac{Y_{(7; 2,2,2,2)}}{X_8}\right) &= -16, \\ \chi\left(\frac{Y_{(4; 5)}}{Z_5}\right) &= -40. \end{aligned} \quad (11.6.24)$$

Суть дела не только в том, что мы получили правильную феноменологию. Дело в том, что разумным выбором дискретной группы можно получить модель с приемлемо низким числом поколений. Необходимо подчеркнуть, что само существование киральных фермионов в теории суперструн весьма удивительно. В стандартных моделях типа теории Калуцы–Клейна, например, существуют серьезные препятствия к построению теории с киральными фермионами в четырех измерениях. Действительно, приемлемой суперсимметричной модели Калуцы–Клейна с киральными фермионами не существует. Поэтому замечательно, что мы вообще можем получить какие-либо киральные фермионы в теориях суперструн.

И наконец, выбор неодносвязного связного многообразия может вначале удивить, но оказывается, что этот выбор имеет другие феноменологически приемлемые характеристики.

§ 11.7. ВИЛЬСОНОВСКИЕ ЛИНИИ

В нашем предыдущем обсуждении погружения спиновой связности в калибровочную связность (11.5.3) группа E_8 нарушалась до $E_6 \otimes \text{SU}(3)$, которая имеет очень хорошую феноменологию из-за того, что фермионы находятся в представлении 27 группы E_6 . Далее следует нарушить группу E_6 до минимальной группы $\text{SU}(3) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{U}(1)$.

Сложность заключается в том, что наиболее простые методы нарушения группы E_6 неизбежно нарушают и $(N=1)$ -суперсимметрию. Однако существует один трюк, который можно использовать на неодносвязных многообразиях.

Вообще говоря, мы знаем, что упорядоченное вдоль петли произведение элементов калибровочной группы является калибровочным инвариантом. Мы можем записать его как вильсоновскую петлю

$$U \sim P \exp \int_C A_\mu dx^\mu, \quad (11.7.1)$$

где через P обозначен оператор упорядочивания каждого члена по отношению к замкнутому пути C . Для малых путей мы находим, что U пропорциональна экспоненте от кривизны два-формы.

Обычно, когда кривизна $F_{\mu\nu}^a$ обращается в нуль, естественно ожидать, что вильсоновская петля становится единицей. Это связано с тем, что мы всегда можем стянуть замкнутый путь C в точку. Если тензор площади маленькой петли обозначить через $\Delta^{\mu\nu}$, то вильсоновская петля переходит в

$$U \rightarrow e^{F_{\mu\nu} \Delta^{\mu\nu}}. \quad (11.7.2)$$

Однако если путь не является односвязным, это не так. Поэтому мы можем иметь нулевой тензор кривизны, однако вильсоновская петля не обязательно будет равна единице [1, 7].

Это именно то, что нам нужно, поскольку сейчас мы рассматриваем неодносвязные многообразия. Если U не равна единице, то группа E_6 нарушается до подгруппы, коммутирующей с U .

Заметим, что E_6 содержит максимальную подгруппу

$$\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(3)_L \otimes \text{SU}(3)_R, \quad (11.7.3)$$

где C — цветной индекс группы сильных взаимодействий, а индексы L и R помечают левую и правую группу слабых взаимодействий.

Это нарушение может быть выполнено выбором одного элемента U_0 группы E_6 , удовлетворяющего

$$U_0^n = 1. \quad (11.7.4)$$

Этот элемент порождает группу перестановок Z_n . Мы хотим теперь найти подгруппу в E_6 , коммутирующую с U_0 . Вообще говоря, это будет

группа ранга шесть. Можно, например, выбрать элемент группы E_6 вида

$$U_0 = (\alpha) \times \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (11.7.5)$$

где матрицы представляют элементы трех подгрупп $SU(3)$ в E_6 , а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ являются корнями n -ой степени из единицы. При этом в зависимости от выбора α, γ, δ и ε мы имеем следующее нарушение группы E_6 :

$$\begin{aligned} \alpha^3 = 1; \quad \gamma\delta\varepsilon = 1 &\rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1) \otimes U(1) \otimes U(1), \\ \gamma = \delta &\rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1) \otimes U(1). \end{aligned} \quad (11.7.6)$$

Выбирая различные элементы U_0 группы E_6 , можно получить различные подгруппы в E_6 , коммутирующие с U_0 . Например:

$$\frac{E_6}{Z_5 \times Z_5} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \times SU(2)_R \otimes U(1) \otimes U(1). \quad (11.7.7)$$

В этом случае U_0 имеет вид

$$U_0 = (1) \times \begin{pmatrix} \alpha^j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^k & 0 & 0 \\ 0 & \beta^k & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-2k} \end{pmatrix}. \quad (11.7.8)$$

В качестве дискретной группы можно также выбрать группу Z_3 , тогда

$$\frac{E_6}{Z_3} = SU(3)_C \otimes SU(3) \otimes SU(3). \quad (11.7.9)$$

Вообще говоря, полученные модели кроме взаимодействий минимальной модели содержат также другие калибровочные взаимодействия. Действительно, группа E_6 имеет 27 подгрупп, приводящих по крайней мере к минимальной модели, но они все содержат нежелательные калибровочные группы $U(1)$, выживающие при нарушении симметрии. Конечно, они в дальнейшем должны быть устранены, возможно с помощью другого механизма, такого, например, как использование «плоских» направлений в суперпотенциале.

§ 11.8. ОРБИОБРАЗИЯ

Хотя в методе компактификации на пространства Калаби–Яу есть еще нерешенные проблемы, он является в принципе достаточно сильным, чтобы дать качественное объяснение механизма нарушения калибровочной группы до калибровочной группы минимальной теории.

На практике, однако, многообразия Калаби–Яу построить достаточно сложно, и только несколько таких многообразий известно в настоящее время. Для дальнейшего использования мы хотели бы иметь более простые решения с плоским пространством. К сожалению, про-

стейшая тороидальная компактификация феноменологически неприемлема хотя бы по той причине, что после нарушения симметрии выживает $(N = 4)$ -суперсимметрия. Если мы стартуем с $(N = 1)$ -суперсимметрии в 10 измерениях и компактифицируем к 4 измерениям, то получаем в результате $(N = 4)$ -суперсимметрию. (Если мы стартуем с $(N = 1)$ -суперсимметрии в десяти измерениях, шестнадцать генераторов суперсимметрии Q^a становятся после компактификации генераторами $Q^{i\beta}$, где β – спинорный индекс в четырех пространственно-временных измерениях, а i пробегает от 1 до 4. Таким образом, компактификация $(N = 1)$ -суперсимметричной теории к меньшему числу измерений всегда приводит к дополнительной $O(n)$ -симметрии.)

Однако, налагая более жесткие ограничения на тороидальную компактификацию, можно редуцировать $(N = 4)$ -суперсимметрию к $(N = 1)$ -суперсимметрии. Диксон, Харви, Вафа и Виттен предложили компактификацию на орбиобразии [8, 9], получаемое факторизацией выбранного многообразия по дискретной группе, имеющей неподвижные точки (т. е. точки, инвариантные относительно преобразований этой группы). Орбиобразии из-за сингулярностей в неподвижных точках не является многообразием, но струны могут беспрепятственно распространяться на орбиобразиях. Преимущество орбиобразий заключается в том, что они являются плоскими, при их использовании можно нарушить $(N = 4)$ -суперсимметрию, получить киральные фермионы, и к тому же их легко построить.

Простейшим орбиобразии является конус. Возьмем комплексную плоскость и сделаем отождествление

$$z = e^{2\pi i/n} z \quad (11.8.1)$$

для некоторого целого числа n . Это разделяет комплексную плоскость на n эквивалентных треугольных секторов. Заметим, что это отождествление факторизует плоскость по дискретной группе симметрии Z_n .

Заметим, что начало координат является неподвижной точкой этого преобразования, т. е. начало координат отображается в себя при таком вращении. Если мы теперь разрежем комплексную плоскость и извлечем только один из этих треугольных секторов, а потом свернем этот сектор в соответствии с указанным выше отождествлением, то получим конус. Таким образом, конус, или орбиобразии, является не чем иным, как двумерным пространством R^2 , факторизованным по действию дискретной группы:

$$\text{конус} = \text{орбиобразии} = \frac{R^2}{Z_n}. \quad (11.8.2)$$

Начало координат, являющееся неподвижной точкой, становится теперь потенциальной сингулярностью. Следовательно, конус не является многообразием. Если мы обходим по пути вокруг вершины конуса, то полный угол, который мы проходим, будет не 360° , а $360^\circ/n$, деленное на n .

Рассмотрим другой простой пример. Возьмем двумерный тор, заданный следующими отождествлениями:

$$\begin{aligned} z &= z + 1, \\ z &= z + i. \end{aligned} \tag{11.8.3}$$

Это делит комплексную плоскость на бесконечное число квадратов ширины 1 с отождествленными противоположными сторонами. Построим из этого двумерного тора орбиобразия факторизацией по группе Z_2 , генерируемой отображением

$$P(z) = -z. \tag{11.8.4}$$

Если теперь ввести поверхность

$$\frac{T_2}{P}, \tag{11.8.5}$$

то мы получим орбиобразия. Заметим, что это отображение оставляет неподвижными следующие четыре точки:

$$0; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}i; \quad \frac{1}{2}(1 + i). \tag{11.8.6}$$

Три из этих неподвижных точек лежат на сторонах единичного квадрата, а одна из них — внутри квадрата.

Как выглядит это орбиобразия? При действии отображения P точки внутри квадрата отождествляются так, что единичный квадрат разделяется на меньшие квадраты ширины $\frac{1}{2}$. Представим два маленьких квадрата ширины $\frac{1}{2}$ каждый. Разместим их друг над другом и соединим вершины одного квадрата с вершинами другого. После этого сошьем расположенные друг над другом стороны этих квадратов, получая замкнутую поверхность. Топологически она эквивалентна поверхности квадратного мешка для бобов.

Отметим, что эта поверхность имеет четыре сингулярные точки, соответствующие четырем вершинам квадрата. При обходе вокруг каждой из этих неподвижных точек угловой дефицит составит 180° .

Можно, однако, превратить это орбиобразия обратно в нормальное многообразие и, следовательно, вычислить его эйлерову характеристику. Вырежем каждую из четырех неподвижных точек на T_2 , факторизуем по Z_2 , а потом пришьем обратно небольшие кусочки к каждой из этих точек. Это называется «раздутием» сингулярности. В этом случае, вырезая такие дырки, сшивая квадраты в орбиобразия и пришивая обратно на место четыре кусочка, мы получаем многообразие, топологически эквивалентное сфере.

Эйлерова характеристика диска d равна 1, а эйлерова характеристика двумерного тора T_2 равна 0. Следовательно, эйлерова характеристика тора с вырезанными четырьмя неподвижными точками равна

$$\chi(T_2 - 4d) = \chi(T_2) - 4\chi(d) = -4. \tag{11.8.7}$$

Если мы факторизуем по действию группы Z_2 , то эйлерова характеристика полученной поверхности равна

$$\chi\left(\frac{T_2 - 4d}{Z_2}\right) = -2. \quad (11.8.8)$$

Наконец, приклеивая четыре диска обратно к поверхности, мы должны прибавить к эйлеровой характеристике число 4:

$$\chi\left(\frac{T_2 - 4d}{Z_2} + 4d\right) = \frac{0 - 4}{2} + 4 = 2. \quad (11.8.9)$$

Это согласуется с нашей интуицией, потому что полученное многообразие эквивалентно двумерной сфере S_2 , имеющей эйлерову характеристику 2.

Теперь мы хотели бы обобщить предыдущий пример, переходя к более сложной компактифицированной поверхности размерности шесть. Компактифицируем сначала комплексную плоскость с помощью следующих отождествлений:

$$\begin{cases} z = z + 1, \\ z = z + e^{\pi i/3}. \end{cases} \quad (11.8.10)$$

Первое отождествление делит комплексную плоскость на бесконечное число узких вертикальных полосок. В результате отождествлений (11.8.10) комплексная плоскость становится разделенной на бесконечное число равносторонних треугольников. «Фундаментальная область» T этого пространства состоит из двух таких треугольников, имеющих общую сторону.

В силу того что это пространство состоит из бесконечного числа равносторонних треугольников, оно инвариантно относительно вращения на 120 градусов:

$$z \rightarrow e^{2\pi i/3} z. \quad (11.8.11)$$

Следовательно, это пространство имеет Z_3 -симметрию. При вращении на 120 градусов в нем существует три неподвижные точки:

$$z = 0; \quad \frac{e^{\pi i/6}}{\sqrt{3}}; \quad \frac{2e^{2\pi i/6}}{\sqrt{3}}. \quad (11.8.12)$$

Отметим, что фундаментальная область T , состоящая из двух равносторонних треугольников, содержит три неподвижных точки: одна из них расположена в начале координат, а две других – внутри каждого из двух равносторонних треугольников.

Выполним теперь в пространстве T факторизацию по группе Z_3 и получим орбиобразия:

$$Z = \frac{T}{Z_3}. \quad (11.8.13)$$

И опять Z не является многообразием, поскольку три неподвижные точки (две из которых лежат внутри области T) потенциально сингулярны.

Для обобщения на шестимерный случай можно рассмотреть просто прямое произведение трех таких комплексных пространств

$$\bar{Z} = Z \times Z \times Z \quad (11.8.14)$$

с $3 \times 3 \times 3 = 27$ неподвижными точками.

Это пространство имеет то преимущество, что при компактификации на него ($N = 1$)-суперсимметрия в 10-ти измерениях может быть нарушена до ($N = 1$)-суперсимметрии в 4-х измерениях. Если мы компактифицируем на пространство

$$M^4 \times \bar{Z}, \quad (11.8.15)$$

то получим, что группа $O(10)$ нарушается следующим образом:

$$SO(10) \supset SO(4) \otimes SO(6). \quad (11.8.16)$$

Так как $SO(6) = SU(4)$, можно показать, что генератор Q^a ($N = 1$, $D = 10$)-суперсимметрии расщепляется на четыре спинора, преобразующихся по фундаментальному представлению 4 группы $SU(4)$. Если мы компактифицируем на тор T_6 , то группа $SU(4)$ не нарушается и выживают все четыре генератора суперсимметрии в четырех измерениях, преобразующиеся по представлению 4 группы $SU(4)$. Однако, если мы начинаем с орбиобразия, полученного факторизацией по группе Z_3 , мы можем вложить Z_3 в подгруппу $SU(3)$ группы $SU(4)$. При этом факторизация по Z_3 обязательно нарушает $SU(4)$ -симметрию, так как группа $SU(4)$ не имеет трехмерных представлений. Но только одна из четырех компонент вектора 4 фундаментального представления сохраняется при факторизации по Z_3 , и, следовательно, выживает, как и хотелось, только ($N = 1$)-суперсимметрия.

Итак, орбиобразия могут быть использованы для нарушения полной симметрии теории, так как выживают только симметрии, коммутирующие с дискретной группой. Этот метод может быть использован для нарушения калибровочной группы.

Пусть g — такой элемент 10-мерной калибровочной группы, что

$$g^m = 1 \quad (11.8.17)$$

для некоторого целого m . Теперь мы требуем, чтобы состояния теории коммутировали с комбинированным действием

$$g \times Z_m. \quad (11.8.18)$$

Таким образом, мы имеем механизм одновременного нарушения как калибровочной группы, так и суперсимметрии.

В качестве примера можно взять элемент g группы $SU(3)$, такой, что $g^3 = 1$. Следовательно, требование инвариантности состояний теории относительно действия двух групп Z_3 приводит к нарушению

группы E_8 :

$$E_8 \otimes E_8 \rightarrow E_8 \otimes SU(3) \otimes E_6. \quad (11.8.19)$$

Вычислим теперь эйлерову характеристику этой поверхности и, следовательно, число поколений. Мы опять должны вырезать 27 неподвижных точек из T , факторизовать по Z_3 и пришить обратно 27 кусочков.

Эйлерова характеристика поверхности T равна нулю, так что многообразии T без 27 дисков, центры которых расположены в неподвижных точках, имеет эйлерову характеристику

$$\chi(T - d) = -27. \quad (11.8.20)$$

Если факторизовать T по Z_3 , то эйлерова характеристика станет равной -9 . Теперь мы должны пришить обратно 27 дисков \bar{d} . В то же время каждый такой диск имеет $SU(3)$ в качестве группы голономии и эйлерову характеристику, равную 3, так что полная эйлерова характеристика равна

$$\chi\left(\frac{T-d}{Z_3}\right) + 27\chi(\bar{d}) = 72. \quad (11.8.21)$$

Следовательно, мы имеем 36 поколений фермионов.

Предыдущий пример был просто модельным примером в шести измерениях. Можно, однако, построить модели орбиобразий, имеющих много меньшее число поколений, например два или четыре.

§ 11.9. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ СУПЕРСТРУНЫ

При построении моделей четырехмерных струн, использующих компактификацию на орбиобразия, должны быть учтены дополнительные ограничения, такие, как модулярная инвариантность и условие $L_0 = \bar{L}_0$. Эти ограничения нетривиальны, потому что модулярная инвариантность перемешивает граничные условия.

Например, при изучении модулярной инвариантности можно компактифицировать на шестимерный тор T_6 , факторизованный по дискретной группе $P = Z_n$, так что (твистованные) граничные условия на орбиобразии T_6/P являются следующими:

$$\begin{aligned} X(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) &= hX(\sigma_1, \sigma_2), \\ X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) &= gX(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (11.9.1)$$

Здесь g и h — элементы группы P порядка n , т. е. $g^n = h^n = 1$. Для обычных бозонных и фермионных граничных условий g и h равны ± 1 . Однако при компактификации на орбиобразия эти условия должны быть обобщены.

Нетривиальность g и h может, конечно, нарушить полную симметрию теории как по пространству-времени, так и по внутренним переменным. Группа, сохраняющаяся при компактификации, это та

подгруппа, которую этот процесс не затрагивает, т. е. подгруппа, коммутирующая с g и h .

Для изучения того, как изменяется однопетлевой след в процессе компактификации, приведем g и h к диагональному виду с собственными значениями $\{e^{2\pi i v_i}\}$ на диагонали, являющимися элементами порядка n , т. е. $v_i = r_i/n$. Для простоты мы выберем следующее условие периодичности:

$$X(\sigma + 2\pi) = e^{2\pi i v} X(\sigma). \quad (11.9.2)$$

Заметим, что фурье-разложение струнных мод теперь изменяется. Мы должны разложить теперь струнные поля в терминах нового набора мод:

$$X(\sigma) = \sum_m e^{i(m+v)\sigma} X_m. \quad (11.9.3)$$

Присутствие v в фурье-модах изменяет вычисление следа в однопетлевой амплитуде, что приведет к нетривиальным ограничениям на v_i .

При вычислении следа v входит в энергию нулевых колебаний. Для обычной бозонной струны, например, нерегуляризованный гамильтониан содержит множитель $\frac{1}{2} \sum_n a_{-n} a_n + a_n a_{-n}$, который, конечно, имеет бесконечные матричные элементы и должен быть нормально упорядочен. Нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения приводит к бесконечной энергии нулевых колебаний, равной $\frac{1}{2} \sum_n n$. Бесконечная энергия нулевых колебаний может быть получена различными способами (например, из требования лоренц-инвариантности теории в калибровке светового конуса), но можно показать, что каждый из них приводит к тому же результату, что и регуляризация с помощью дзета-функции. Дзета-функция определяется следующим образом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (11.9.4)$$

Эта функция аналитична по s , ее можно аналитически продолжить в точку $s = -1$ и показать, что $\zeta(-1) = -1/12$. Это дает желаемый результат, поскольку $\zeta(-1)$ является аналитическим продолжением ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Используя теперь регуляризацию с помощью дзета-функции для вычисления вклада от сдвинутых мод, используем тот факт, что

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} + a} n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n+a)^{-s} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} a(1-a). \quad (11.9.5)$$

Член $a(1-a)$, возникающий при вычислении следа для сдвинутых мод на орбиобразии, представляет собой новый вклад в энергию нулевых колебаний.

Рассмотрим теперь гетеротическую струну, где вычисление следа для однопетлевой амплитуды приводит к множителю, содержащему энергии левых и правых мод:

$$e^{2\pi i(\tau E_L - \bar{\tau} E_R)}. \quad (11.9.6)$$

Это выражение инвариантно относительно преобразования $\tau \rightarrow \tau + n$, если положить

$$n(E_L - E_R) = 0 \pmod{1}. \quad (11.9.7)$$

Если мы обозначим собственные значения правого сектора через $e^{2\pi i v}$, а два набора собственных значений левого сектора через $e^{2\pi i v_{1i}}$ и $e^{2\pi i v_{2i}}$ для подгруппы $O(16) \times O(16)$ группы $E_8 \otimes E_8$, то из (11.9.5) мы получим следующий вклад нулевых колебаний в энергию основного состояния:

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_i v_i(v_i - 1) + \frac{1}{12}, \quad ; \quad (11.9.8)$$

$$E_L = \frac{1}{2} \sum_i v_{1i}(v_{1i} - 1) + \frac{1}{12} + (1 \leftrightarrow 2).$$

Поскольку $v = r/n$, можно собрать все вместе и получить ограничение

$$\sum_i r_i^2 = \sum_j r_{1j}^2 + \sum_j r_{2j}^2, \quad (11.9.9)$$

выполняющееся по \pmod{n} для нечетных n и по $\pmod{2n}$ для четных n .

Рассмотрим теперь влияние этих ограничений на процесс компактификации, обсуждавшийся ранее для случая Z -орбиобразия, т.е. пространства T_6/Z_3 , имеющего стационарную подгруппу P порядка 3. Это означает, что $3v_{1i}$ и $3v_{2i}$ могут быть помещены на корневую решетку группы E_8 .

Из условия модулярной инвариантности следует, что $v_{1,2i}^2$ должно равняться $2/3$ от некоторого целого числа. Но поскольку $3v_{1,2i}$ лежит на корневой решетке группы E_8 , всегда можно положить v^2 равным $2/9$ от некоторого целого числа. Наконец, мы знаем, что всякая точка восьмерного пространства, содержащего решетку корней группы E_8 , находится на расстоянии 1 от некоторой точки решетки. Это означает, что всегда можно выбрать $v_{1,2i}^2 \leq 1$.

Модулярная инвариантность является столь жестким ограничением, что только пять решений согласуются с ограничением (11.9.9) для различных v . Каждый из пяти таких наборов нарушает группу симметрии $E_8 \otimes E_8$ до подгруппы, коммутирующей с твистующими множителями g и h . Имея явный вид v , нетрудно вычислить эту подгруппу. Поскольку $3v$ совпадает с вектором решетки, подгруппа, сохраняющаяся после нарушения симметрии, является группой, коммутирующей с этими векторами решетки. Мы просто перечислим упомянутые пять решений [8, 9]:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^8 v_{1i}^2 = \sum_{i=1}^8 v_{2i}^2 = 0. \quad (11.9.10)$$

Это решение не имеет киральных фермионов и, следовательно, является нефизическим.

$$(2) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^8 v_{1i}^2 &= \frac{2}{3}, \\ \sum_{i=1}^8 v_{2i}^2 &= 0, \\ v_{1i} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right), \\ v_{2i} &= (0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (11.9.11)$$

Это решение дает группу $E_6 \otimes \text{SU}(3) \otimes E_8$.

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^8 v_{1i}^2 &= \frac{2}{9}, \\ \sum_{i=1}^8 v_{2i}^2 &= \frac{4}{9}, \\ v_{1i} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots \right), \\ v_{2i} &= \left(\frac{2}{3}, 0, \dots \right). \end{aligned} \quad (11.9.12)$$

Это решение дает группу $E_7 \otimes \text{U}(1) \otimes \text{SO}(14) \otimes \text{U}(1)$.

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^8 v_{1i}^2 &= \sum_{i=1}^8 v_{2i}^2 = \frac{2}{3}, \\ v_{1i} = v_{2i} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right). \end{aligned} \quad (11.9.13)$$

Для этого решения получаем группу $E_6 \otimes \text{SU}(3) \otimes E_6 \otimes \text{SU}(3)$.

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^8 v_{1i}^2 &= \frac{8}{9}, \\ \sum_{i=1}^8 v_{2i}^2 &= \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

$$v_{1i} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right), \quad (11.9.14)$$

$$v_{2i} = \left(\frac{2}{3}, 0, \dots \right).$$

Решение (5) дает группу симметрии $SU(9) \otimes SO(14) \otimes U(1)$. (Многоточие обозначает последовательность нулей.)

Пять групп, которые мы построили с помощью орбиобразий, не имеют никакого отношения к стандартной модели. Эти группы все еще слишком обширны, и число поколений слишком велико. Модели этого типа часто имеют 27 поколений, потому что всегда можно построить струны, намотанные вокруг 27 неподвижных точек орбиобразия, что и приводит к числу избыточности 27. Однако мы можем редуцировать далее калибровочную группу и контролировать число поколений, постулируя существование фоновых калибровочных полей (вильсоновских петель), соответствующих нестягиваемым петлям на торе. В принципе это позволяет получать модели только с тремя поколениями и калибровочной группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)^n$. Как и в предыдущем обсуждении, выживающей калибровочной группой будет подгруппа в $E_8 \otimes E_8$, коммутирующая с вильсоновской петлей. В случае орбиобразий с вильсоновскими петлями, выживающей калибровочной группой является подгруппа в $E_8 \otimes E_8$, коммутирующая как с $P = Z_3$, так и с вильсоновской петлей.

Определим вильсоновский интеграл, параметризованный числами a_i^I :

$$\int_i A_\mu^I dx^\mu = 2\pi A_\mu^I e_i^\mu = 2\pi a_i^I, \quad (11.9.15)$$

где $i = 1 \div 6$, $I = 1 \div 16$, а e_i^I задают решетку на шестимерном торе. Таким образом, мы ввели в наши уравнения связи новый вектор с компонентами a_i^I , что позволит нам построить новые решения. Можно показать, что $3a_i^I$ и $3v^I$ равны компонентам векторов на решетке.

Относительно модулярного преобразования $\tau \rightarrow 1/\tau$ векторы корневой решетки группы $E_8 \otimes E_8$ преобразуются следующим образом:

$$p^I \rightarrow p^I + v^I + n_i a_i^I, \quad (11.9.16)$$

где $n_i = 0, \pm 1$. Различные значения чисел n_i дадут различные твистованные секторы. Повторяя предыдущие рассуждения, можно также показать, что модулярное преобразование $\tau \rightarrow \tau + 3$ приводит к уравнению [10, 11]:

$$3(v^I + n_i a_i^I) = 2m \quad (11.9.17)$$

для некоторого целого числа m . Это и есть то самое уравнение связи, возникающее из условия модулярной инвариантности, которое является менее ограничительным, чем (11.9.9).

Существует огромное число решений этого уравнения [10, 11] из-за наличия члена с a_i^I . Выберем, однако, одну из таких возможностей, которая приводит к существованию трех поколений. Мы выберем следующий набор значений для v_i^I и a_i^I :

$$v^I = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \end{cases} \quad (11.9.18)$$

и

$$a_1^I = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right), \\ \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}, 0, 0 \right), \end{cases} \quad (11.9.19)$$

$$a_3^I = \begin{cases} \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3} \right), \\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3} \right). \end{cases} \quad (11.9.20)$$

Можно показать, что в нетривиальном секторе подгруппой группы E_8 , коммутирующей с действием вильсоновской петли, является группа

$$[SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)^5], \quad (11.9.21)$$

тогда как вторая группа E_8 нарушается до $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)^6$.

Отметим, что число поколений теперь редуцировано до трех. (Это связано с тем, что 27 неподвижных точек могут быть разбиты на три сектора по девять точек в каждом, если существует вильсоновская петля в одном из трех комплексных измерений. Добавление двух вильсоновских петель создает девять секторов по три неподвижные точки в каждом. Тщательный выбор компонент v^I и a_i^I уничтожает все секторы, кроме одного, оставляя только три поколения.) Еще одним преимуществом этой модели является отсутствие дополнительных цветных триплетов, которые могли бы ускорить распад протона.

Недостатком этой модели, однако, является слишком большое число множителей $U(1)$, что плохо с точки зрения феноменологии. Действительно, использование вильсоновских петель не уменьшает ранга группы (поскольку мы факторизуем по дискретной группе), так что мы по-прежнему имеем дело с группами ранга 8, что слишком много. Более того, необходимо проверить, не приводят ли эти дополнительные множители $U(1)$ к аномалиям.

До сих пор ни одно из решений, полученных с помощью орбиобразий [12–25] (или многообразий Калаби–Яу), не обладает в точности той низкоэнергетической структурой, которая нам нужна. Имеются также проблемы с получением правильного числа поколений, правильной калибровочной группы при низких энергиях, приемлемых значений для времени распада протона и т.д. Важно, однако, то, что эти методы компактификации позволяют построить в принципе тысячи решений, совместимых с условием модулярной инвариантности.

Необходим, конечно, конструктивный метод вычисления всех четырехмерных физически приемлемых решений уравнений теории струн. До сих пор основная работа заключалась в постулировании некоей конкретной схемы компактификации и проверке ее согласованности с условием модулярной инвариантности. Недавно была проделана значительная работа в обратном направлении, а именно сначала налагалось условие модулярной инвариантности, а затем искались все возможные схемы компактификации, совместимые с этим условием.

Эта новая программа приводит к следующему набору критериев для всякой физически приемлемой теории: модель должна быть (а) свободной от тахионов, (b) не содержать аномалий, (c) модулярно-инвариантной, (d) суперсимметричной и (e) четырехмерной. Пока что при осуществлении этой амбициозной программы получены лишь предварительные результаты, но они представляются весьма обнадеживающими.

Нам необходим метод вычисления всех коэффициентов C в однопетлевой амплитуде (5.9.6) для каждой спинорной структуры. Например, в разд. 5.9 и 5.11 мы проанализировали однопетлевую и многопетлевую спинорные структуры и их изменение относительно модулярных преобразований. Теперь мы хотим систематически изучить следствия наложения условия модулярной инвариантности на многопетлевые спинорные структуры [26–31]. Начнем с разложения струнной амплитуды в терминах всех возможных спинорных структур:

$$A = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (11.9.22)$$

Здесь \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначают различные спинорные структуры над циклами a и b , причем каждый элемент из \mathbf{a} равен нулю или единице. C – коэффициент, который должен быть определен, а A представляют амплитуду для каждой спинорной структуры. На римановой поверхности рода g существует 2^{2g} различных спинорных структур.

Перепишем уравнения разд. 5.9 и 5.11 в новых терминах. При выполнении преобразований группы $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ функции Θ должны удовлетворять уравнению (5.11.15). Требование модулярной инвариантности на однопетлевом уровне означает, что коэффициент C должен быть согласован с изменением граничных условий, задаваемых (5.9.7) и (5.11.17). Возникающие при этом ограничения на C в новых обозначениях

ниях можно переписать следующим образом:

$$C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = -e^{(i\pi/8)\sum a_f} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (11.9.23)$$

$$C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = e^{(i\pi/4)\sum (a_f b_f)} C \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (11.9.24)$$

где сумма \sum берется по f фермионам (из числа левых мод вычитается число правых мод), каждое a_f принимает значение 0 или 1, а векторные суммы берутся по mod 2.

Когда мы требуем модулярной инвариантности на многопетлевом уровне, мы должны наложить дополнительные ограничения на коэффициенты C . Например, условие унитарности требует факторизации амплитуды, описывающей поверхность рода g , в произведение амплитуд, описывающих поверхности рода 1 (торы); таким образом, с помощью уравнения (5.1.7) и подстановки полного набора промежуточных состояний мы должны суметь разрезать поверхность рода g на различные поверхности рода 1. В наших новых обозначениях это означает, что

$$C \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 & \dots & \mathbf{a}^g \\ \mathbf{b}^1 & \dots & \mathbf{b}^g \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{b}^1 \end{bmatrix} \dots C \begin{bmatrix} \mathbf{a}^g \\ \mathbf{b}^g \end{bmatrix}. \quad (11.9.25)$$

Как мы видели в гл. 5, твисты Дена могут переставлять циклы (a, b) на поверхности рода g , поэтому мы должны также потребовать (по крайней мере на двухпетлевом уровне) выполнения условия

$$\delta\delta' e^{(i\pi/4)\sum a_f a'_f} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \mathbf{a}' \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' + \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (11.9.26)$$

где δ равно $+1$ (-1), если по пространственно-временным индексам состояние является фермионом или бозоном.

Замечательно, что существует достаточно простое решение этих уравнений связи.

Сначала дадим несколько определений.

- (1) Заменим коэффициент $C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ эквивалентным выражением $C(\alpha | \beta)$, где α (β) обозначает набор фермионов, периодичных по циклу a (b).
- (2) Введем простое правило «умножения»:

$$\alpha\beta = \alpha \cup \beta - \alpha \cap \beta. \quad (11.9.27)$$

Это означает, что $\alpha^2 = \alpha - \alpha = \emptyset$, т. е. α^2 — пустое множество. Пусть F означает множество всех фермионов. Тогда произведение $F\alpha$ равно дополнению множества α , т. е. $F\alpha = F - \alpha$.

- (3) Введем δ_α , равное $+1$ для фермионов и -1 для бозонов.

- (4) Пусть $n(\alpha)$ обозначает разность между числом $n_L(\alpha)$ левых фермионов и числом $n_R(\alpha)$ правых фермионов.
- (5) Определим $\varepsilon_\alpha = e^{in(\alpha)/8}$ и оператор четности $(-1)^\alpha$ для спинорной структуры α , удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha \psi &= -\psi (-1)^\alpha, \text{ если } \psi \text{ принадлежит } \alpha, \\ (-1)^\alpha \psi &= \psi (-1)^\alpha, \text{ если } \psi \text{ не принадлежит } \alpha. \end{aligned} \quad (11.9.28)$$

Спинорная структура $(\alpha | \beta)$ совместима с суперсимметрией, если

$$(-1)^\alpha T_F (-1)^\alpha = \delta_\alpha T_F, \quad (11.9.29)$$

где T_F – генератор суперсимметричных преобразований из суперконформной группы.

- (6) Определим Y как набор множеств (образующий группу, замкнутую относительно нашего определения умножения (11.9.27)) с упомянутым выше свойством суперсимметрии. Определим Ξ как подгруппу Y , удовлетворяющую

$$C(\alpha_i | \emptyset) = \delta_{\alpha_i}, \quad (11.9.30)$$

где $C(\emptyset | \emptyset) = 1$.

Имея теперь эти определения, установим уравнения связей, возникающие из требования модулярной инвариантности. Поскольку $n(\alpha)$ кратно восьми, мы получаем следующие уравнения на базисные элементы b_i из Ξ :

$$\begin{aligned} n(b_i) &= 0 \pmod{8}, \\ n(b_i \cap b_j) &= 0 \pmod{4}, \\ n(b_i \cap b_j \cap b_k \cap b_l) &= 0 \pmod{2}, \end{aligned} \quad (11.9.31)$$

а также уравнения, возникающие из требования модулярной инвариантности: для любых α, β, γ из набора Ξ

$$C(\alpha | \beta) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } \alpha, \beta \in \Xi, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$C(\alpha | \beta) = e_{\alpha \cap \beta}^2 C(\beta | \alpha), \quad (11.9.32)$$

$$C(\alpha | \alpha) = \varepsilon_F \varepsilon_\alpha C(\alpha | F),$$

$$C(\alpha | \beta) C(\alpha | \gamma) = \delta_\alpha C(\alpha | \beta\gamma).$$

Наконец, имеются уравнения связей, которые обязательно должны выполняться, возникающие из условия сокращения конформной аномалии. Будем использовать фермионное (а не бозонное) представление для компактификации на решетку. Это было использовано для гетеротических струн в уравнении (10.4.4). Следует осторожно включать фермионный вклад в конформную аномалию для алгебры супер-Вирагоро. Замечательно, что представление для фермионного партнера T_F тензора энергии-импульса T_B может быть задано в терминах присоеди-

ненного представления для фермионов:

$$T_F \sim f^{abc} \psi^a \psi^b \psi^c. \quad (11.9.33)$$

При вычислении возникающей из этого члена аномалии мы находим, что фермионный вклад в аномалию равен $\frac{1}{2}N$, где N – число параметров группы.

В левом секторе число компактифицированных измерений равно $26 - D$, где D – число пространственно-временных измерений. Мы зададим компактифицированный сектор фермионами в присоединенном представлении. В этом секторе три вклада в аномалию суть

$$\text{Левый сектор: } \left\{ \begin{array}{c} X_\mu \\ b, c \text{ духи} \\ \psi^a \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} D \\ -26 \\ \frac{1}{2}N \end{array} \right\}. \quad (11.9.34)$$

Поскольку сумма трех вкладов в аномалию должна равняться нулю, мы очевидным образом имеем $N = 2(26 - D)$ фермионов ψ^a .

Проанализируем теперь правый сектор, где вклады в аномалию также должны в сумме давать нуль:

$$\text{Правый сектор: } \left\{ \begin{array}{c} X_\mu, \psi_\mu \\ b, c, \beta, \gamma \\ \psi^a \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3D/2 \\ -26 + 11 \\ \frac{1}{2}N \end{array} \right\}. \quad (11.9.35)$$

Условие обращения аномалии в нуль приводит к $N = 3(10 - D)$. Добавив $(D - 2)$ фермионов NS-R, содержащихся в ψ_μ (в калибровке светового конуса), мы получим $D - 2 + 3(10 - D)$ фермионов в правом секторе (в калибровке светового конуса). Итак, для сокращения аномального члена в алгебре Вирасоро мы должны иметь следующее число фермионов:

$$\begin{cases} \text{Левый сектор} \rightarrow 2(26 - D), \\ \text{Правый сектор} \rightarrow D - 2 + 3(10 - D). \end{cases} \quad (11.9.36)$$

Сокращение аномалий происходит автоматически, если мы имеем эти числа фермионов в левом и правом секторах.

Теперь, когда мы выписали все уравнения связей в явном виде, наша стратегия такова:

- (a) Вычисляем сначала полное число пространственно-временных фермионов ψ и внутренних фермионов ψ^a , удовлетворяющих (11.9.36), при котором теория не содержит конформных аномалий. Потом мы вычисляем полное число спинорных структур, возникающих для этого набора фермионов, который мы обозначаем F .
- (b) Далее произвольным образом выбираем набор спинорных структур в качестве исходного множества внутри полного множества Ξ , содержащего F .

- (с) Потом проверяем замкнутость относительно умножения (11.9.27), генерирующего полную группу Ξ , совместимую с выбором исходных спинорных структур. (Выбирая различные исходные множества для Ξ , можно получить различные схемы компактификации.)
- (д) Затем вычисляем квадратную матрицу $C(\alpha|\beta)$, определенную на множестве Ξ и удовлетворяющую нашим уравнениям связи. Некоторые произвольные фазы введены способом, позволяющим генерировать более одного решения для каждого множества Ξ .

Обсудим теперь некоторые свойства решений этих уравнений. Замечательно, что все самосогласованные решения обязательно содержат гравитоны, дилатоны и антисимметричные тензоры. Мы также обнаруживаем, что присутствие безмассовых полей спина $3/2$ достаточно для доказательства отсутствия тахионов и исчезновения космологической постоянной на однопетлевом уровне. Эти обнадеживающие результаты показывают полную самосогласованность этих уравнений, что приводит к феноменологически желательным следствиям.

Обсудим теперь несколько частных решений этих уравнений. Сначала обсудим 10-мерную теорию типа II (без компактификации) в калибровке светового конуса после наложения на наши фермионы всех уравнений связи, требуемых калибровкой светового конуса. Тогда фермионы состоят из восьмикомпонентных пространственно-временных правых фермионов $\alpha_R = \psi^{1-8}$ и левых фермионов $\alpha_L = \tilde{\psi}^{1-8}$, а внутренние фермионы выбраны равными нулю: $\psi^a = 0$.

- (1) Простейшим выбором для Ξ является

$$\Xi = \{\emptyset, F\}. \quad (11.9.37)$$

К сожалению, тщательный анализ спектра этой теории показывает, что она содержит тахионы и, следовательно, неприемлема.

- (2) Выбор

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_L, \alpha_R, F\} \quad (11.9.38)$$

приводит к более чем одному решению, что зависит от выбора определенных фаз матрицы $C(\alpha|\beta)$. Два таких выбора приводят к теориям типа IIА и IIВ.

- (3) Для четырехмерной компактифицированной теории следует выбирать различные наборы Ξ . В четырех измерениях пространственно-временные фермионы представлены поперечными левыми $\tilde{\psi}^{1-2}$ и правыми ψ^{1-2} фермионами. В соответствии с (11.9.36) внутренние степени свободы могут быть представлены также $18 = 3(10 - D)$ фермионами, причем в этом случае мы имеем λ^{1-18} для правых и $\tilde{\lambda}^{1-18}$ для левых фермионов. Перегруппируем эти 18 внутренних фермионов как (x^I, y^I, z^I) , где $I = 1, \dots, 6$ и перенумеруем шесть векторов группы $SU(2)$. Выберем подмножество $\alpha = (\psi^{1-2}, z^{1-6})$. Тогда выбор

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha, Fa, F\} \quad (11.9.39)$$

приводит к нескольким ($N = 4$)-суперсимметричным четырехмерным теориям с калибровочными группами $SU(2)^6$, $SU(4) \otimes SU(2)$ или $SU(3) \otimes SO(5)$.

Проанализируем теперь 10-мерную гетеротическую струну в калибровке светового конуса, имеющую поперечные правые пространственно-временные спиноры $\alpha_R = \psi^{1-8}$ и $32 = 2(26 - D)$ внутренних левых спиноров $\alpha_L = F\alpha_R = \lambda^{1-32}$.

$$(1) \text{ Выбор } \Xi = \{\emptyset, F\} \quad (11.9.40)$$

приводит к нефизической теории с калибровочной группой $SO(32)$, в которой имеются тахионы и отсутствуют безмассовые фермионы.

(2) Выбор

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_R, \alpha_L, F\} \quad (11.9.41)$$

приводит к обычной гетеротической струне с калибровочной группой $Spin(32)/Z_2$.

(3) Если мы положим $\alpha_1 = \{\lambda^{1-16}\}$ и $\alpha_2 = \{\lambda^{17-32}\}$, то набор

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_R, \alpha_2\alpha_R, \alpha_1\alpha_2, F\} \quad (11.9.42)$$

приводит к двум возможностям, зависящим от выбора фаз. Один выбор фазы приводит к стандартной суперсимметричной теории с калибровочной группой $E_8 \otimes E_8$, а другой выбор приводит к (несуперсимметричной) теории с группой $SO(16) \otimes SO(16)$.

(4) После компактификации к четырем измерениям можно снова записать правые внутренние фермионы в виде (x^I, y^I, z^I) с $I = 1, \dots, 6$ и выбрать $\alpha = (\psi^{1-2}, z^{1-6})$. Тогда простейший выбор

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha, Fa, F\} \quad (11.9.43)$$

приводит к ($N = 4$)-суперсимметричной теории с калибровочной симметрией $SO(44)$. Это одно из решений, найденных Нараяном при помощи четных автодуальных лоренцевых решеток.

Очевидно, что существуют, возможно, тысячи различных наборов Ξ , замкнутых относительно умножения (11.9.27) и удовлетворяющих следующим из модулярной инвариантности уравнениям связи. Этот формализм позволяет разрешить проблему построения полной классификации всех возможных компактифицированных решений, совместимых с условием модулярной инвариантности.

Прежде чем закончить эту главу, важно указать те новые направления, где компактификация может использоваться. Перечислим три интересные темы, касающиеся четырехмерных суперструн:

- (1) Асимметричные орбиобразия.
- (2) «Запретительная» теорема, исключающая из рассмотрения суперструны типа II.
- (3) Суперструны из струн Намбу–Гото.

Понятие «асимметричных орбиобразий», идущих под номером (1)

в нашем обсуждении, охватывает намного более широкий класс орбиобразий, чем обсуждавшееся нами ранее. Асимметричные орбиобразия [31] также могут дать нам возможность классифицировать тысячи модулярно-инвариантных решений уравнений теории струн. При компактификации теорий струн на асимметричные орбиобразия левые и правые степени свободы соответствуют различным орбиобразиям. При компактификации 10-мерного пространства-времени возникает естественное желание использовать симметричную компактификацию левого и правого секторов, однако существуют самосогласованные модулярно инвариантные асимметричные компактификации, при которых шесть пространственных измерений левого и правого сектора трактуются асимметрично.

Хотя и трудно наглядно представить себе, как компактифицировать на асимметричные орбиобразия, можно достаточно просто показать, что модулярно инвариантные решения существуют. Например, будем отождествлять координаты, отличающиеся на множитель g , где g принадлежит дискретной группе. Тогда функция распределения для однопетлевой диаграммы в направлении τ при $g \neq 1$ должна иметь вид

$$\text{Tr } gq^H L q^{\bar{H}} R. \quad (11.9.44)$$

Этот след может быть вычислен в точности так же, как и раньше, но с учетом того, что левое и правое пространство теперь различны. Как и прежде, требование модулярной инвариантности приводит к условию

$$n(E_L - E_R) = 0 \pmod{1}. \quad (11.9.45)$$

Если собственные значения g равны $e^{2\pi i r_i/m}$, то это условие приводит к ограничениям на сумму $\sum_i r_i^2$. Полученные в результате ограничения на r_i почти тождественны найденным для симметричного орбиобразия (11.9.9), но с учетом того, что левые и правые секторы теперь трактуются различным образом в зависимости от структуры пространства. Хотя с асимметричными орбиобразиями работать значительно труднее, чем с симметричными, все же можно построить большой класс асимметричных орбиобразий, совместимых с условием модулярной инвариантности. (На практике асимметричное орбиобразие иногда погружают в симметричное орбиобразие большей размерности, на котором вычисления проще, а потом возвращаются к асимметричному орбиобразию.)

Резюмируя, преимущество асимметричных орбиобразий заключается в том, что они позволяют нам классифицировать чрезвычайно обширный класс модулярно инвариантных компактификаций в четырех измерениях. Это может быть очень полезно для понимания полного набора физически приемлемых компактификаций теории суперструн.

Второе новое направление компактификации струн заключается в исследовании возможности применения асимметричных орбиобразий для получения реалистичных калибровочных групп в случае суперструн типа II. Традиционно считалось, что струны типа II не годятся с точки зрения феноменологии, поскольку не допускают введения множителей Чана-Патона. В 10 измерениях суперструны типа II приводят к теории

гравитации без полей Янга–Миллса. В то время как гетеротические струны приводят к слишком большому числу квазиреалистичных групп в четырех измерениях, поскольку содержат поля Янга–Миллса в 10 измерениях, в случае струн типа II мы сталкиваемся с противоположной проблемой: поля Янга–Миллса в 10 измерениях вообще отсутствуют. Вследствие этого суперструны типа II менее интересны с феноменологической точки зрения.

Вопреки общепринятому мнению, недавние попытки [32, 33] компактифицировать суперструны типа II показали возможность получения ряда изоспиновых групп при редукции теории к четырем измерениям. Например, при обсуждении сокращения аномалий в (11.9.36) мы видели, что внутренние компактифицированные измерения могут быть фермионизированы введением $3(10 - D) = 18$ фермионов ψ^a в присоединенном представлении некоторой группы. Таким образом, мы ожидаем, что при редукции к четырем измерениям компактификация суперструн типа II может приводить к следующим калибровочным группам:

$$SU(2)^6; \quad SU(4) \otimes SU(2); \quad SU(3) \otimes SO(5). \quad (11.9.46)$$

Существование нетривиальных четырехмерных калибровочных групп для суперструн типа II – достаточно удивительный результат. Он показывает, что теория суперструн продолжает бросать вызов традиционным представлениям.

Однако недавно было показано, что при довольно общих предположениях *теории струн типа II никогда не могут привести к стандартной модели с триплетом кварков и дублетом лептонов* [34]. Этот сильный отрицательный результат вряд ли возможен для гетеротической струны, приводящей к большой янг-миллсовской калибровочной группе в 10 измерениях. Однако поскольку суперструны типа II не содержат полей Янга–Миллса в 10 измерениях, они менее пригодны для феноменологии, чем гетеротические струны, и более уязвимы для «запретительных» теорем, которые могут вообще исключить их из рассмотрения.

Этот отрицательный результат, требующий очень слабых предположений об алгебрах супер-Каца–Муди, замечателен тем, что он, по-видимому, полностью устраняет струны типа II из рассмотрения. Этот результат не зависит от выбора схемы компактификации и чувствителен только к сокращению суперконформной аномалии. Компактификации с триплетом кварков, но без дублета лептонов (или наоборот), еще возможны, но, похоже, невозможно получить триплет кварков и дублет лептонов одновременно.

Эта теорема запрета интересна тем, что показывает способность алгебр супер-Каца–Муди исключать из рассмотрения целый ряд подходов к построению моделей. Поскольку этот отрицательный результат наверняка может быть обойден, преждевременно обсуждать, выдержит ли он проверку временем, но детали доказательства интересны сами по себе.

Начнем построение алгебр супер-Каца–Муди и Вирасоро для ком-

пактифицированной модели, используя фермионную конструкцию изоспинового сектора с помощью фермионного поля ψ^a . Нашей целью является вычисление суперконформной аномалии для генераторов алгебры супер-Вирасоро в различных фермионных представлениях, чтобы показать, что она не может быть уничтожена для стандартной модели.

До компактификации аномалия равна (см. (4.2.29)):

$$D + \frac{1}{2}D - 26 + 11 = \frac{3}{2}(D - 10), \quad (11.9.47)$$

где D возникает из бозонных координат струны, $D/2$ возникает из фермионов NS – R, а $-15 = -26 + 11$ возникает из конформных и суперконформных духов соответственно. После компактификации мы должны положить $D = 4$ и добавить в аномалию вклад от компактифицированных фермионов ψ^a . Обозначим его через c . Тогда после компактификации аномалия равна

$$4 + \frac{1}{2} \times 4 + c - 15 = \frac{3}{2}(4 + \hat{c} - 10), \quad (11.9.48)$$

так что c должно равняться 9, а \hat{c} должно равняться 6.

Первым делом вычислим вклад в аномалию от компактифицированных полей ψ^a . К счастью, представление генераторов J_B^a и J_F^a алгебры супер-Каца-Муди и генераторов T_B и T_F алгебры супер-Вирасоро можно задать с помощью фермионного поля ψ^a . Обозначим через θ грассманову переменную; тогда генераторы алгебры супер-Каца-Муди могут быть заданы как суперполя $J(z, \theta)$:

$$J(z, \theta)^a = J_F^a + \theta J_B^a,$$

$$J_B^a(z) = -\frac{i}{2} f^{abc} \psi^b \psi^c, \quad (11.9.49)$$

$$J_F^a(z) = \sqrt{k} \psi^a.$$

Теперь можно просто вычислить аномальный член алгебры Каца-Муди (называемый уровнем k ; см. (4.7.1)) в терминах этого представления. Получаем

$$k = C_2(G), \quad (11.9.50)$$

где $C_2(G)$ – собственное значение квадратичного оператора Казимира для группы G . Поскольку мы интересуемся стандартной моделью, выберем группу $SU(n)$ в качестве группы G , для которой

$$C_2(G) = n. \quad (11.9.51)$$

Далее мы хотим найти вклад фермионного поля ψ^a в конформную аномалию алгебры супер-Вирасоро. К счастью, известно явное представление в терминах ψ^a генератора $T(z, \theta)$ алгебры супер-Вирасоро:

$$T(z, \theta) = T_F + \theta T_B,$$

$$T_B = -\frac{1}{2}\Psi^a\partial\Psi^a, \quad (11.9.52)$$

$$T_F = \frac{-i}{12\sqrt{k}}f^{abc}\Psi^a\Psi^b\Psi^c.$$

Когда мы вычисляем конформную аномалию для этого конкретного представления алгебры супер-Вирасоро, то находим

$$c = \frac{1}{2}d(G), \quad (11.9.53)$$

где $d(6)$ – размерность группы G . В нашем случае $G = \text{SU}(n)$ имеем

$$c = \frac{1}{2}(n^2 - 1). \quad (11.9.54)$$

(Это легко показать. Мы знаем из старой модели NS-R в D измерениях и из (4.2.29), что фермионы дают вклад в аномалию $D/2$, а бозоны дают вклад в аномалию, равный D . Заметим, что T_B имеет в точности тот же вид, что и для фермионной части модели NS-R, за исключением того, что имеется $d(G)$ фермионов, так что следует ожидать вклада $c = \frac{1}{2}d(G)$ в бозонные коммутаторы алгебры Вирасоро.)

Следующий шаг несколько более сложен. Мы знаем, что кроме указанного выше представления вклады в аномалию могут давать и другие представления алгебры супер-Каца-Муди. Однако недавние результаты в теории алгебр Каца-Муди [35] говорят о том, что на возможный вид их аномалий могут быть наложены сильные ограничения, если потребовать унитарности представлений. Предположим, например, что имеется новый неизвестный вклад в аномалию алгебры супер-Каца-Муди, даваемый генераторами \tilde{J}^a , явный вид которых знать не обязательно. Тогда новые результаты теории алгебр Каца-Муди утверждают, что все унитарные представления могут быть получены следующим образом:

$$\begin{aligned} J_B^a &= \tilde{J}^a - \frac{i}{2}f^{abc}\Psi^a\Psi^b\Psi^c, \\ J_F^a &= \sqrt{k}\Psi^a, \\ T_B &= -\frac{1}{2}\Psi^a\partial\Psi^a + \frac{1}{2k}:\tilde{J}^a\tilde{J}^a:, \\ T_F &= \frac{-i}{12\sqrt{k}}f^{abc}\Psi^a\Psi^b\Psi^c + \frac{1}{2\sqrt{k}}\Psi^a\tilde{J}^a. \end{aligned} \quad (11.9.55)$$

Предположим, что представление алгебры с генераторами \tilde{J}^a имеет уровень \tilde{k} . Тогда полный уровень является суммой обычного члена и \tilde{k} :

$$k = \tilde{k} + C_2(G).$$

Заметим, что вклад \tilde{J}^a в тензор энергии–импульса T_B имеет форму Сугавары, т.е. генераторы \tilde{J}^a алгебры Каца–Муди входят в него квадратично. Это означает, что вклад \tilde{J}^a в конформную аномалию известен точно. Прямым вычислением можно найти коммутатор между двумя тензорами T_B и, следовательно, получить полный вклад в конформную аномалию:

$$c = \frac{1}{2}d(G) + d(G)\frac{k - C_2(G)}{k}, \quad (11.9.56)$$

где первый член возникает из-за полей ψ^a , а второй член может быть вычислен, поскольку тензор энергии–импульса имеет форму Сугавары.

Подставляя значения

$$d(G) = n^2 - 1; \quad C_2(G) = n, \quad (11.9.57)$$

мы находим, что

$$\hat{c} = (n^2 - 1) \left[1 - \frac{2n}{3k} \right] \quad (11.9.58)$$

должно равняться шести.

Пока наши результаты еще очень слабы; мы не можем сделать какого-либо заключительного утверждения, поскольку значение k неизвестно. Сделаем теперь ключевой шаг в нашем доказательстве.

Условие *унитарности* представления алгебры супер-Каца–Муди приводит к новому ограничению, позволяющему вычислить границы изменения k [35]. В частности, известно, что нормы элементов унитарного неприводимого представления алгебры должны быть неотрицательными.

В общем случае неприводимые представления групп Ли строятся выбором вакуумного вектора старшего веса $|h\rangle$ для некоторого представления h и действием на него всеми возможными повышающими операторами:

$$J_{-n_1}^{\lambda_1} J_{-n_2}^{\lambda_2} \dots J_{-n_l}^{\lambda_l} |h\rangle. \quad (11.9.59)$$

В результате получаем универсальную обертывающую алгебру. Отметим, что эта обертывающая алгебра реализует представление алгебры супер-Каца–Муди, так как любое преобразование с помощью генераторов J_n^p отображает элемент обертывающей алгебры в другой элемент этой же алгебры. Вычислим норму состояния $(J_{-1}^a + iJ_{-1}^b)|h\rangle$:

$$\|(J_{-1}^a - iJ_{-1}^b)|h\rangle\|^2 = \langle h|k - 2f^{abc}J_0^c|h\rangle \geq 0, \quad (11.9.60)$$

которая должна быть неотрицательной для того, чтобы представление было унитарным. При вычислении нормы в терминах k и J_0^c мы использовали коммутационные соотношения для генераторов. Известно, что J_0^c является не чем иным, как генератором обычной конечномерной группы Ли, так что этот матричный элемент может быть вычислен

в явном виде для любого состояния старшего веса, обозначенного через h . Элементарные выкладки, использующие теорию групп, показывают, что предыдущее неравенство может быть переписано в виде

$$k \geq \lambda_G(h), \quad (11.9.61)$$

где $\lambda_G(h)$ – число столбцов в таблице Юнга для представления h . Для $SU(2)$ $\lambda_G(h)$ в точности равно удвоенному изотопическому спину состояния.

Теперь можно кратко сформулировать ключевой шаг в доказательстве. Мы должны одновременно удовлетворить двум условиям:

$$\hat{c} = (n^2 - 1) \left[1 - \frac{2n}{3k} \right] = 6; \quad k \geq \lambda_G(h). \quad (11.9.62)$$

Задав эти ограничения, теперь можно выписать *все возможные* калибровочные группы, получаемые при компактификации суперструн типа II к четырем измерениям:

- (a) $SU(2)^6$,
- (b) $SU(4) \otimes SU(2)$,
- (c) $SO(5) \otimes SU(3)$,
- (d) $SO(5) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$,
- (e) $SU(3) \otimes SU(3)$,
- (f) G_2 ,
- (g) все собственные подгруппы указанных выше групп.

Еще более интересен тот факт, что, используя указанные выше ограничения, можно легко вычислить \hat{c} для различных представлений h . А именно получаем:

- (1) Если $G = SU(3)$ и мы требуем существования триплета кварков, тогда $\hat{k} \geq 1$ и $\hat{c} \geq 4$:

$$SU(3)\text{-триплет} \rightarrow \hat{c} \geq 4. \quad (11.9.63)$$

- (2) Если $G = SU(2)$ и мы требуем существования дублета лептонов, тогда $k \geq 1$ и $\hat{c} \geq 5/3$:

$$SU(2)\text{-дублет} \rightarrow \hat{c} \geq 5/3. \quad (11.9.64)$$

- (3) Если $G = U(1)$, то $\hat{c} \geq 1$:

$$U(1) \rightarrow \hat{c} \geq 1. \quad (11.9.65)$$

Следовательно, полный вклад в аномалию от всех трех групп стандартной модели равен сумме

$$\hat{c} \geq 6\frac{2}{3}, \quad (11.9.66)$$

что в точности на $\frac{2}{3}$ больше требуемого. Это наш главный результат. Таким образом, в суперструнах типа II оказывается невозможным устранить конформную аномалию.

Для обхода этой трудности следует, очевидно, опустить некоторые существенные черты стандартной модели (и предположить, что некоторые кварки или лептоны возникают как связанные состояния) или полностью отбросить струны типа II. Например, если отказаться от дублета лептонов, то $\hat{c} = 6$ и аномалия исчезает. Если не отказаться от дублетов и триплетов, то для аномалии можно получить сколь угодно близкое к шести число, но этого недостаточно для получения стандартной модели.

Третье упоминавшееся нами новое направление, использующее компактификацию струн, предлагает амбициозную программу получения всех возможных теорий суперструн из исходной $D = 26$ бозонной струны Намбу-Гото [36–39]. В настоящее время теория гетеротических струн хотя и является главным кандидатом на теорию всех известных взаимодействий, она представляется довольно искусственной из-за ее весьма асимметричной природы. Если теория гетеротических струн претендует на статус фундаментальной, то представляется странной подобная незелегантность ее формировки. Соблазнительно предположить, что гетеротическая струна и все другие модели суперструн являются просто разными компактификациями исходной 26-мерной струны.

Три наблюдения делают это предположение правдоподобным. Во-первых, возможность фермионизации и бозонизации в двух измерениях означает, что фермионы в десятимерной модели суперструн могут быть конденсатами бозонов в 26 измерениях. Следовательно, отсутствие фермионов в 26-мерной теории струны не приводит к каким-либо трудностям. Суперсимметрия в этой картине возникает «случайно» при компактификации от 26 к 10 измерениям. Во-вторых, все изученные до сих пор компактификации выглядят внешне как различные усечения исходной бозонной теории струн. В частности, число 26 снова и снова появляется в теориях суперструн, заданных в 10 измерениях. В-третьих, присутствие в 26-мерной теории тахиона (причинявшего такую головную боль в первые годы развития теории) теперь выглядит как достоинство. Существование тахиона просто означает, что безусловно выбранный вакуум нестабилен относительно квантовых поправок, поэтому выглядит правдоподобным, что для бозонной теории струн в 26 измерениях нарушение до 10-мерной теории может быть предпочтительным.

Хотя этот подход и имеет свои эстетические достоинства, следует указать серьезные проблемы, с которыми он сталкивается. Во-первых, при редукции к 10 измерениям мы должны отбросить большое число частиц. Куда деваются эти частицы? Даже если мы смогли бы изгнать их, они могли бы легко появиться в древесных и петлевых диаграммах. Снова приходится прибегать к ссылкам на динамические эффекты распада (которые невозможно вычислить). Во-вторых, следует корректно использовать теорию групп. Фермионы 10-мерной теории суперструн преобразуются относительно той же самой группы Лоренца $SO(9,1)$, которая действует и на бозоны в 10 измерениях. При переходе от

26 к 10 измерениям 16 дополнительных бозонов не преобразуются относительно группы $SO(9,1)$, действующей на остающиеся 10 бозонов. Эти дополнительные 16 бозонов должны в конечном счете переходить в фермионы в 10-ти измерениях, не преобразующиеся относительно группы $SO(9,1)$. Таким образом, неясно, как возникает действие группы Лоренца $SO(9,1)$ на фермионах, сопоставляемых 16-мерному бозонному сектору, не преобразующемуся относительно $SO(9,1)$. По этой и другим причинам заманчивая идея компактификации теории 26-мерной струны к 10-мерной теории является пока красивой мечтой.

§ 11.10. РЕЗЮМЕ

Мы убедились в том, что несколько физически осмысленных предположений о процессе компактификации привели к ценным феноменологическим предсказаниям. Хотя пока и не было предложено модели, предсказывающей все известные свойства низкоэнергетического спектра частиц, полученные качественные результаты обнадеживают. Выделим теперь логическую последовательность предположений, которые привели нас к конкретным заключениям.

Естественно было компактифицировать 10-мерное пространство на 6-мерный тор. Однако компактификация на 6-мерный тор переводит $(N=1)$ -суперсимметрию в 10 измерениях в $(N=4)$ -суперсимметрию в четырех измерениях. Поэтому следует рассмотреть новые предположения, которые могут привести к более приемлемым с точки зрения феноменологии следствиям.

Начнем со следующих предположений:

- (1) 10-мерная вселенная компактифицирована к

$$M_{10} \rightarrow M_4 \times K_6, \quad (11.10.1)$$

где M_4 — максимально симметричное пространство,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{12} (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (11.10.2)$$

а K — компактное многообразие.

- (2) $N=1$ локальная суперсимметрия остается ненарушенной после компактификации.
 (3) Некоторые из бозонных полей могут быть занулены:

$$H = d\phi = 0. \quad (11.10.3)$$

Предположение о выживании $(N=1)$ -суперсимметрии при компактификации является сильным предположением. Из него следует, что вариация фермионов должна равняться нулю:

$$\begin{aligned} \delta\psi_A &= \frac{1}{\kappa} D_A \varepsilon = 0, \\ \delta\chi^a &= \Gamma^{ij} F_{ij}^a \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (11.10.4)$$

Существование ковариантно постоянного спинора ε налагает на многообразии большое число ограничений. В частности, если мы продифференцируем еще раз уравнение $D_i \varepsilon = 0$, то получим

$$\begin{aligned} D_i \varepsilon = 0 &\rightarrow [D_j, D_i] \varepsilon = 0 \\ &\rightarrow R_{ijkl} \Gamma^{kl} \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (11.10.5)$$

Следовательно, можно показать, что пространство является риччи-плоским. Кроме того, можно показать, что это пространство имеет $SU(3)$ в качестве группы голономии. Мы определяем группу голономии как группу, порождаемую при переносе спинора по замкнутому пути вокруг любой фиксированной точки. В общем случае группой голономии в шести измерениях служит группа $SO(6)$, изоморфная группе $SU(4)$. Но если существует ковариантно постоянный спинор, то

$$\varepsilon \rightarrow U\varepsilon. \quad (11.10.6)$$

Преобразованием из группы $SU(4)$ всякий спинор ε может быть приведен к виду

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (11.10.7)$$

Это в свою очередь означает, что матрица U действует только на три верхние компоненты столбца ε . Следовательно, матрица U должна принадлежать подгруппе $SU(3)$, и поэтому пространство имеет $SU(3)$ группой голономии.

В общем случае, как известно, очень трудно работать с пространствами, имеющими $SU(3)$ -голономию. Однако можно показать, что эти пространства являются кэлеровыми, и использовать сильную теорему Калаби–Яу. Всегда можно определить тензор

$$J'_j = -ig^{ik} \bar{\varepsilon} \Gamma_{kj} \varepsilon, \quad (11.10.8)$$

удовлетворяющий $J^2 = -1$, что аналогично равенству $i^2 = -1$ для обычного определения комплексных чисел, и использовать этот тензор для определения комплексного многообразия. Однако мы знаем, что этот тензор должен быть ковариантно постоянен (поскольку ε ковариантно постоянен) и, следовательно, пространство является кэлеровым.

К счастью, можно показать, что риччи-плоские кэлеровы многообразия (имеющие поэтому нулевой первый класс Черна) эквивалентны многообразиям с $SU(3)$ -голономией и могут быть легко построены. Таким образом, мы имеем логическую последовательность

$$D_i \varepsilon = 0 \rightarrow K \text{ является риччи-плоским, кэлеровым, с нулевым первым классом Черна.} \quad (11.10.9)$$

Проблема, однако, заключается теперь в том, что мы получаем

при этом тысячи многообразий, сохраняющих $(N = 1)$ -суперсимметрию!

До сих пор мы не нарушали калибровочную симметрию $E_8 \otimes E_8$. Следующий шаг – заметить, что тождества Бьянки в результате наших предположений приводят к нетривиальным уравнениям

$$\text{Tr } R \wedge R = \frac{1}{30} \text{Tr } F \wedge F. \quad (11.10.10)$$

Удивительно, но этому уравнению довольно трудно удовлетворить. Слева мы имеем формы кривизны риманова многообразия, а справа – формы кривизны Янга–Миллса. Для того чтобы разрешить это довольно странно выглядящее уравнение, следует погрузить спиновую связность в калибровочную связность, перемешивая, следовательно, пространственно-временное и групповое многообразия и нарушая при этом исходную калибровочную симметрию. Поскольку в римановом секторе мы имеем группу голономии $SU(3)$, то при отождествлении римановой и калибровочной связностей мы получим следующее нарушение калибровочной симметрии:

$$\text{Тождество Бьянки} \rightarrow \text{вложение спиновой связности} \rightarrow SU(3) \otimes E_6 \otimes E_8. \quad (11.10.11)$$

К счастью, это приводит к желаемым результатам. Известно, что E_8 не имеет киральных представлений в отличие от группы E_6 и, следовательно, не является приемлемым кандидатом для построения моделей, а E_6 является. Действительно, при нарушении симметрии $E_8 \rightarrow SU(3) \otimes E_6$ разложение присоединенного представления **248** группы E_8 имеет вид

$$\mathbf{248} = (\mathbf{3}, \mathbf{27}) + (\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{27}}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{78}). \quad (11.10.12)$$

Это доставляет удовлетворение, потому что представление **27** является наиболее подходящим представлением для кварков и лептонов в Теориях Великого Объединения с группой E_6 . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr } R \wedge R = \frac{1}{30} \text{Tr } F \wedge F \rightarrow \text{вложение спиновой связности} \rightarrow \\ \rightarrow \text{представление } \mathbf{27} \text{ для фермионов.} \end{aligned} \quad (11.10.13)$$

Следующий вопрос: сколько существует поколений фермионов в представлении **27**? Обычно число поколений не имеет никакого отношения к калибровочной группе. В ТВО они между собой совершенно не связаны. Число поколений в ТВО может быть произвольным. Однако в теории струн отождествление спинорной и калибровочной связностей приводит к ограничению числа поколений. Вследствие этого отождествления калибровочные фермионы теперь связаны с внутренним многообразием K_6 . Число поколений можно теперь рассматривать как топологическое число, поскольку разность между числом положительных и отрицательных киральных решений уравнений Дирака с нулевой

массой является топологическим числом. Конкретнее,

$$\text{Число поколений} = \frac{1}{2} |\chi(M)|. \quad (11.10.14)$$

К сожалению, эйлерова характеристика риччи-плоских кэлеровых многообразий обычно очень велика, но всегда можно во много раз уменьшить это число переходом к подмногообразию. Например, всегда можно факторизовать по дискретной группе, сохраняющей некоторый полином из координат. Хорошим примером служит неодносвязное многообразие, получаемое из $\mathbb{C}P^4$ факторизацией по группе $Z_5 \times Z_5$. На этом многообразии существуют четыре поколения.

Далее мы хотим перейти от этой модели к стандартной модели с группой $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ без нарушения $(N=1)$ -суперсимметрии. В обычной ситуации сделать это довольно трудно. При нарушении калибровочной группы до группы стандартной модели также нарушается и $(N=1)$ -суперсимметрия. Одним из решений этой проблемы является использование вильсоновских петель. Ранее мы видели, что рассматриваемые нами многообразия K_6 не являются односвязными, что необходимо для получения небольшого числа поколений. Для неодносвязных многообразий вильсоновская петля

$$U = P \exp \int_c A_\mu dx^\mu \quad (11.10.15)$$

не обязательно равна единице, даже если тензор кривизны равен нулю. Это связано с тем, что мы не всегда можем стянуть замкнутую петлю в точку. Таким образом, можно нарушить группу E_6 до подгруппы G выбором вильсоновской петли U так, что G коммутирует со всеми элементами из U . Например, если взять в качестве U группу $Z_5 \times Z_5$, то получим

$$\frac{E_6}{Z_5 \times Z_5} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1) \otimes U(1). \quad (11.10.16)$$

К сожалению, хотя при использовании U мы и получаем стандартную модель, при этом мы получаем и нежелательные группы $U(1)$. Таким образом,

$$\text{Вильсоновские петли} \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)^n.$$

Орбиобразия, являющиеся, вероятно, предельным случаем многообразий Калаби-Яу, также можно использовать при компактификации суперструн. Орбиобразия возникают при факторизации тора T_6 по дискретной группе Z_n , имеющей неподвижные точки:

$$\text{Орбиобразии: } \frac{T_6}{Z_n}. \quad (11.10.17)$$

(Эти неподвижные точки не портят свойств модели струн.) Нетривиальные ограничения налагаются на орбиобразия условием модулярной

инвариантности, нетривиально смешивающим граничные условия. Граничные условия

$$\begin{aligned} X(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) &= hX(\sigma_1, \sigma_2), \\ X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) &= gX(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (11.10.18)$$

(где h и g — элементы из Z_n) могут нарушать симметрию модели струн. При этом выживают подгруппы пространственно-временной и внутренней групп, коммутирующие с g и h . При диагонализации g и h с собственными значениями $e^{2\pi i v_i}$ на диагонали, где $v_i = r_i/n$ для некоторого целого n , энергия нулевых колебаний для гамильтониана сдвигается на число, пропорциональное $v_i(v_i - 1)$. Поскольку след по одной петле нечувствителен к энергии нулевых колебаний, модулярная инвариантность приводит к ограничению на собственные значения:

$$\sum_{i=1}^8 r_i^2 = \sum_{j=1}^8 r_{1j}^2 + \sum_{j=1}^8 r_{2j}^2, \quad (11.10.19)$$

где r_i — собственные значения для правого сектора, а $r_{1,2,i}$ — собственные значения для левого $E_8 \otimes E_8$ сектора. Если рассматривать еще и вильсоновские петли, то выживающий при компактификации группой будет подгруппа, коммутирующая с g , h и вильсоновской петлей.

Для такой компактификации существует много решений, некоторые из которых приводят к трем поколениям и к группе $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)^n$, содержащей слишком много множителей $U(1)$. К сожалению, метод вильсоновских петель не меняет ранга группы, поэтому в общем случае мы получаем слишком много множителей $U(1)$.

Большое преимущество орбиобразий перед многообразиями Калаби–Яу заключается в том, что они плоские, проще описываются и многие из них могут быть построены явным образом. К сожалению, не существует классификации шестимерных орбиобразий и многообразий Калаби–Яу, позволившей бы перечислить и систематизировать тысячи подобных решений.

Одним из шагов в этом направлении является использование модулярной инвариантности и систематический вывод всех возможных решений из условия отсутствия тахионов и аномалий. Для начала запишем амплитуду как сумму по всем спинорным структурам:

$$A = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (11.10.20)$$

Теперь потребуем, чтобы коэффициенты C факторизовались, были модулярно инвариантны и приводили к моделям без тахионов и аномалий. Замечательно, что для уравнений на C можно получить решения. Простейшие из них воспроизводят уже известные компактификации, но тысячи других компактификаций должны еще быть изучены. Возникает надежда на то, что мы сможем получить реалистическую модель, если переберем все возможные варианты.

Перечислим три направления поиска четырехмерных решений. Во-первых, можно получить большой класс четырехмерных решений с помощью асимметричных орбиобразий. Гетеротическая струна, в которой левый и правый секторы рассматриваются независимо, дает пример асимметричной компактификации. Асимметричные орбиобразия образуют наиболее широкий класс изученных к настоящему моменту орбиобразий, и полученные с их помощью результаты существенно пересекаются с результатами, полученными с использованием других типов компактификации. (Кроме асимметричных орбиобразий существуют также неабелевы орбиобразия, получаемые факторизацией по неабелевым конечным группам, таким, как кристаллографические группы. Преимущество таких орбиобразий заключается в том, что с их помощью можно устранить часть нежелательных множителей $U(1)$, а также получить три или четыре поколения. См. [40].)

Во втором подходе тщательно изучаются свойства суперструн типа II при компактификации. Особенно важной является теорема запрета, утверждающая, что после компактификации струны типа II *никогда* не приводят к стандартной модели, поскольку в этом случае конформная аномалия не может быть сокращена. Вклад компактифицированных фермионов должен быть равен 6, а для стандартной модели получаем $6\frac{2}{3}$. Поэтому мы должны отбросить либо триплет кварков, либо дублет лептонов, либо струны типа II.

Наконец, были предприняты усилия по построению всех известных суперструн из струны Намбу. Эта идея не является такой уж фантастической, как можно было подумать, поскольку «избыточные» бозонные моды могут быть фермионизированы в суперсимметричные партнеры бозонных мод десятимерных струн. Однако проблема заключается в том, что после компактификации от 26 к 10 измерениям возникает слишком много частиц, которые должны быть каким-то образом удалены из модели. Хотя идея и представляется довольно ясной, существует ряд серьезных проблем на пути ее реализации.

§ 11.11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что эта книга передает атмосферу моделей суперструн и объясняет, почему они вызвали так много волнений в последние несколько лет. Суперструны дают наиболее многообещающий формализм для объединения гравитационного и всех остальных известных взаимодействий. Использование многообразий Калаби–Яу и орбиобразий в теории струн позволило построить тысячи четырехмерных моделей, а математическая структура теории породила рост интереса математиков к таким областям, как теория тэта-функций, алгебры Каца–Мути, суперримановы поверхности, кэлеровы многообразия, теоремы об индексах и теории когомологий. Теории струн генери-

ровали в различных областях новые математические идеи, не исследованные пока математиками.

Наибольшим недостатком теории суперструн является то обстоятельство, что ускорители частиц, способные разгонять их до планковских энергий, стоят слишком дорого. Даже косвенные проверки теории струн вряд ли возможны в ближайшем будущем. Можно занять по крайней мере две разных позиции по отношению к этой фундаментальной проблеме.

Во-первых, теория суперструн может быть некорректной, но оставаться на плаву в течение десятилетий без решающих экспериментов, необходимых для подтверждения или опровержения теории. И что хуже всего, усилия многих физиков могут быть потрачены зря. Однако следует заметить, что, даже если теория некорректна, она уже открыла новые методы обращения с расходимостями фейнмановских диаграмм. Использование топологических аргументов для контроля над расходимостями квантовой теории поля представляет качественный скачок в нашем понимании того, как строить новые полевые теории гравитации. К тому же теория струн уже стала постоянной областью математических исследований вне зависимости от того, описывает она физическую реальность или нет.

Во-вторых, можно считать, что теория суперструн корректна, а основной камень преткновения является *теоретическим*, а не экспериментальным. Если бы мы смогли найти истинный вакуум теории суперструн, то можно было бы сравнить строгие предсказания этой модели с массами кварков, например, или массой протона. Поэтому нам не следует ожидать создания суперускорителей, стоимость которых может превысить суммарный национальный продукт планеты. Решающие результаты будут получены теоретиками, которые смогут сформулировать поддающиеся проверке предсказания о низкоэнергетических свойствах материи.

Согласно второй философии главной проблемой является не построение все больших и больших ускорителей, а то, что, несмотря на двадцатилетний срок существования теории, мы все еще разгадываем ее тайны. Мы все еще ищем аналог принципа эквивалентности, на котором покоится вся теория. Когда теория струн преждевременно «скончалась» в 1974 г., это была только часть полной теории. Полная теория находится пока в стадии становления.

Мы рассмотрим некоторые из нерешенных проблем теории для того, чтобы стимулировать энергичные исследования в этих областях. Приведем краткий перечень основных нерешенных проблем.

Нерешенные проблемы:

- (1) Строго и для всех порядков должна быть доказана конечность теории. Искусственно вводимые, хотя и правдоподобные аргументы недостаточны.
- (2) Теория должна объяснить, почему космологическая постоянная почти равна нулю *после* нарушения суперсимметрии.

- (3) Все классические решения теории струн должны быть перечислены, и должно быть найдено решение, правильно воспроизводящее все свойства стандартной модели при низких энергиях.
- (4) Полевая теория струн должна быть распространена на непертурбативную область для того, чтобы вычислить истинный вакуум теории.
- (5) Необходимо дальнейшее развитие теории тэта-функций для нахождения сумм рядов теории возмущений и получения непертурбативной информации о вакууме, а также изучение универсального пространства модулей и грассманианов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Candelas P., Horowitz G., Strominger A. and Witten E. Nucl. Phys. **B258**, 46 (1985).
- [2] Horowitz G. In: Unified String Theories (ed. by M. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1986.
- [3] Chapline G. F., Manton N. S. Phys. Lett. **120B**, 105 (1983).
- [4] Calabi E. Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [5] Yau S.-T. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **74**, 1798 (1977).
- [6] Yau S.-T. In: Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology (ed. by W. A. Bardeen and A. R. White), World Scientific, Singapore, 1985.
- [7] Hosotani Y. Phys. Lett. **126B**, 303 (1983).
- [8] Dixon L., Harvey J., Vafa C. and Witten E. Nucl. Phys. **B261**, 678 (1985); **B274**, 286 (1986).
- [9] Vafa C. Nucl. Phys. **B273**, 592 (1986).
- [10] Ibanez L. E., Nilles H. P. and Quevedo F. Phys. Lett. **187B**, 25 (1987).
- [11] Ibanez L. E., Kim J. E., Nilles H. P. and Quevedo F. Phys. Lett. **191B**, 282 (1987).
- [12] Li D. X. Phys. Rev. **D34** (1986).
- [13] Li D. X. In: Super Field Theories (ed. by H. C. Lee), Plenum, New York.
- [14] Nair V. P., Sharpere A., Strominger A and Wilczek F. Nucl. Phys. **B287**, 402 (1986).
- [15] Greene B. R., Kirklin K. H., Miron P. J. and Ross G. G. Phys. Lett. **180B**, 69 (1986); Nucl. Phys. **B287**, 667 (1986).
- [16] Strominger A. Phys. Rev. Lett. **55**, 2547 (1985).
- [17] Ginsparg P. Harvard preprint HUTP-86/A053, 1986.
- [18] Karlara S., Mohapatra R. N. Phys. Rev. D., LA-UR-86-3954, 1986.
- [19] Dine M., Kaplunovsky V., Mangano M., Nappi C. and Sieberg N. Nucl. Phys. **B259**, 46 (1985).
- [20] Cecotti S., Derendinger J. P., Ferrara S., Girardello L. and Roncadelli M. Phys. Lett. **156B**, 318 (1985).
- [21] Derendinger J. P., Ibanez L. and Nilles H. P. Nucl. Phys. **B267**, 365 (1986).
- [22] Breit J., Ovrut B. and Segre G. Phys. Lett. **158B**, 33 (1985).
- [23] Strominger A., Witten E. Commun. Math. Phys. **101**, 341 (1985).
- [24] Segre G. Schladming Lecture notes (1986).
- [25] Kawai H., Lewellen D. C. and Tye S. H. H. Phys. Rev. Lett. **57**, 1832 (1986); Phys. Rev. **D34**, 3794 (1986); Nucl. Phys. **B288**, 1 (1987); Phys. Lett. **191B**, 63 (1987).
- [26] Lerche W., Lust D. and Schellekens A. N. Nucl. Phys. **B287**, 477 (1987).
- [27] Antoniadis I., Bachas C. and Kounas C. Nucl. Phys. **B289**, 87 (1987).
- [28] Antoniadis I., Bachas C. CERN-TH-4767/87, 1987.
- [29] Kounnas C. Berkeley preprint UCB-PTh 87/21, 1987.

-
- [30] Antoniadis I., Bachas C., Kounnas C. and Windey P. *Phys. Lett.* **171B**, 51 (1986).
 - [31] Narain K. S., Samardi M. H. and Vafa C. *Nucl. Phys.* **B288**, 55 (1987).
 - [32] Bluhm R., Dolan L. and Goddard P. *Nucl. Phys.* **B289**, 364 (1987).
 - [33] Castellani L., D'Auria R., Gliozzi F. and Sciuto S. *Phys. Lett.* **168B**, 77 (1986).
 - [34] Dixon L., Kaplunovsky V. and Vafa C. *SLAC-PUB-4282*.
 - [35] Kac V. G., Todorov I. T. *Commun. Math. Phys.* **102**, 337 (1985).
 - [36] Freund P. G. O. *Phys. Lett.* **151B**, 387 (1985).
 - [37] Casher A., Englert F., Nicolai H. and Taormini A. *Phys. Lett.* **162B**, 121 (1985).
 - [38] Englert F., Nicolai H. and Schellekens A. *Nucl. Phys.* **B274**, 315 (1986).
 - [39] Lust D. *Nucl. Phys.* **B292**, 381 (1987).
 - [40] Chang N. P., Li D. X. *Models of Non-Abelian Orbifolds*, CCNY-HEP-87-15.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку математический аппарат теории суперструн достиг головокружительных высот, используя понятия из наиболее абстрактных разделов современной математики, мы включили это краткое приложение, чтобы помочь читателю понять математическую природу некоторых концепций, введенных в этой книге. Мы просим читателя извинить нас за то, что мы вынуждены были в некоторой степени пожертвовать математической строгостью, чтобы охватить в кратком очерке широкий круг вопросов. Однако заинтересованный читатель может найти опущенные подробности в некоторых перечисленных в конце настоящего приложения источниках.

§ П.1. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРУПП

Группой G называется совокупность элементов g_i со следующими свойствами:

- (1) Существует тождественный (единичный) элемент I .
- (2) Эта совокупность замкнута относительно умножения:

$$g_1 \times g_2 = g_3.$$

- (3) Для каждого элемента существует обратный ему элемент:

$$g_i \times g_i^{-1} = I.$$

- (4) Умножение ассоциативно:

$$(g_i \times g_j) \times g_k = g_i \times (g_j \times g_k).$$

Существует много разновидностей групп. В частности, имеются дискретные группы, содержащие конечное число элементов, и *непрерывные группы*, например *группы Ли*, содержащие бесконечное число элементов. Примерами *дискретных групп* служат:

- (1) *Знакопеременные группы* Z_n , основанные на множестве перестановок n объектов.
- (2) *26 спорадических групп*, среди которых не наблюдается какой-либо регулярности. Самая большая и наиболее интересная из спорадических групп — это группа F_1 , которую обычно называют «Монстр»; она содержит

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71$$

элементов.

В настоящей книге, однако, мы в основном имеем дело с непрерывными группами, содержащими бесконечно много элементов. Среди непрерывных групп наиболее важны группы Ли, которые представлены следующими четырьмя бесконечными сериями A, B, C, D , если ограничиться компактным вещественным случаем групп Ли:

$$\begin{aligned} A_n &= \text{SU}(n+1), \\ B_n &= \text{SO}(2n+1), \\ C_n &= \text{Sp}(2n), \\ D_n &= \text{SO}(2n), \end{aligned} \tag{П.1.1}$$

а также исключительными группами

$$G_2; F_4; E_6; E_7; E_8, \tag{П.1.2}$$

из которых с точки зрения феноменологии струн наиболее важны группы E_6 и E_8 .

Приведем конкретные примеры некоторых из этих групп, рассмотрев множество всех вещественных или комплексных матриц размера $n \times n$. Ясно, что множество произвольных обратимых $(n \times n)$ -матриц удовлетворяет определению группы, и соответственно оно обозначается $\text{GL}(n, R)$ или $\text{GL}(n, C)$. Это обозначение расшифровывается как общая линейная (general linear) группа $(n \times n)$ -матриц с вещественными или комплексными элементами. Если взять подмножество группы $\text{GL}(n, R)$ или $\text{GL}(n, C)$ с единичным детерминантом, мы получим $\text{SL}(n, R)$ или $\text{SL}(n, C)$, группу специальных линейных $n \times n$ матриц с вещественными или комплексными элементами.

$O(n)$

Возьмем теперь некую подгруппу $\text{GL}(n, R)$, а именно *ортогональную группу* $O(n)$, состоящую из всех возможных обратимых вещественных $(n \times n)$ -матриц, являющихся ортогональными:

$$O \times O^T = 1. \tag{П.1.3}$$

Эта совокупность действительно удовлетворяет всем четырем аксиомам группы. Любая ортогональная матрица может быть записана как экспонента от некоей антисимметричной матрицы:

$$O = e^A. \tag{П.1.4}$$

Легко видеть, что

$$O^T = e^{A^T} = e^{-A} = O^{-1}. \tag{П.1.5}$$

В общем случае ортогональная матрица содержит

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

независимых элементов. Поэтому мы всегда можем выбрать множество $\frac{1}{2}n(n-1)$ линейно независимых матриц, называемых *образующими* (или генераторами), таких, что любой элемент группы λ_i может быть записан в виде

$$O = e^{\sum_{i=1}^{(1/2)n(n-1)} \rho^i \lambda_i}. \quad (\text{П.1.6})$$

Вещественные числа ρ^i называются *параметрами* группы, так что группа $O(n)$ имеет $(1/2)n(n-1)$ параметров. Число параметров группы Ли называется ее размерностью. Коммутатор любых двух образующих дает другую образующую:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = f_{ij}^k \lambda_k. \quad (\text{П.1.7})$$

Коэффициенты ρ^i называются *структурными константами* соответствующей алгебры. Заметим, что структурные константы полностью определяют эту алгебру.

Заметим, что если взять циклическую комбинацию трех коммутаторов, мы получим тождество:

$$[\lambda_i, [\lambda_j, \lambda_k]] = 0. \quad (\text{П.1.8})$$

Раскрывая коммутаторы, убеждаемся, что все члены сокращаются, давая тождественный нуль. Это тождество называется *тождеством Якоби*, и оно должно выполняться, чтобы группа была замкнутой. Раскрывая тождество Якоби, получаем ограничение на структурные константы; если оно не соблюдается, группа не будет замкнутой:

$$f_{[i,j]}^l f_{k,l}^m = 0. \quad (\text{П.1.9})$$

Разумеется, множество ортогональных матриц замкнуто относительно умножения. Труднее доказать, что данная частная параметризация ортогональной группы с образующими и параметрами замкнута относительно умножения. Запишем

$$e^A e^B = e^C. \quad (\text{П.1.10})$$

К счастью, теорема Бейкера–Хаусдорфа показывает, что C равно A плюс B плюс все возможные кратные коммутаторы A и B . Но поскольку A и B удовлетворяют тождествам Якоби, то множество всех кратных коммутаторов A и B порождает только линейные комбинации образующих. Тем самым группа замыкается относительно умножения.

Заметим, что структурные константы алгебры образуют некое представление, называемое *сопряженным представлением*, если записать структурные константы в виде матрицы:

$$f_{ij}^k = (\lambda^k)_{ij}. \quad (\text{П.1.11})$$

Таким образом, структурные константы сами по себе дают некое представление указанной алгебры.

Для антисимметричной матрицы M^{ab} мы всегда можем выбрать

коммутационные соотношения в виде

$$[M^{ab}, M^{cd}] = \delta^{ac}M^{bd} - \delta^{ad}M^{bc} + \delta^{bd}M^{ac} - \delta^{bc}M^{ad}. \quad (\text{П.1.12})$$

Одно из удобных представлений нашей алгебры дается теперь формулой

$$(M^{ab})_{ij} \sim \delta_i^a \delta_j^b - \delta_i^b \delta_j^a, \quad (\text{П.1.13})$$

которая, как можно показать, удовлетворяет коммутационным соотношениям исходной группы.

Определим теперь набор из n элементов x_i , преобразующийся под действием группы $O(n)$ как *вектор*:

$$x'_i = O_{ij}x_j. \quad (\text{П.1.14})$$

В общем случае мы можем также определить *тензор*

$$T_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p} \quad (\text{П.1.15})$$

ранга P , преобразующийся аналогичным образом как произведение P обычных векторов x_{μ} :

$$\bar{T}_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p} = O_{\nu_1, \mu_1} O_{\nu_2, \mu_2} \dots O_{\nu_p, \mu_p} T_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p}. \quad (\text{П.1.16})$$

Кроме векторного и тензорного представлений группы $O(N)$, имеется также спинорное представление этой группы. Определим *алгебру Клиффорда*

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab}. \quad (\text{П.1.17})$$

Теперь определим представление образующих через эти числа Клиффорда:

$$M^{ab} = \frac{1}{4i} [\Gamma^a, \Gamma^b]. \quad (\text{П.1.18})$$

Числа Клиффорда преобразуются как векторы:

$$[M^{ab}, \Gamma^c] = i(\delta^{ac}\Gamma^b - \delta^{bc}\Gamma^a). \quad (\text{П.1.19})$$

В общем случае эти числа Клиффорда могут быть представлены матрицами размера $2^n \times 2^n$

$$(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \quad (\text{П.1.20})$$

для группы $O(2n)$. Поэтому спинор ψ_α , преобразующийся под действием группы $O(2n)$, имеет 2^n компонент и преобразуется как

$$\psi'_\alpha = (e^{M^{ab}\rho^{ab}})_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (\text{П.1.21})$$

где матрицы M записаны через элементы алгебры Клиффорда, а переменные ρ являются параметрами.

Для группы $O(2n+1)$ нам нужен еще один элемент. Этот недостающий элемент есть

$$\Gamma^{2n+1} = \Gamma^1 \Gamma^2 \dots \Gamma^{2n}. \quad (\text{П.1.22})$$

Легко проверить, что этот новый элемент позволяет построить все матрицы M для группы $O(2n + 1)$.

Теперь попробуем построить объекты, инвариантные относительно действия этой группы. Ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение $x_i x_i$:

$$x_i x_i = \text{инвариант.} \quad (\text{П.1.23})$$

Если $x'_i = O_{ij} x_j$, то

$$x'_i x'_i = x O^T O x = x_i x_i. \quad (\text{П.1.24})$$

Этот инвариант может быть записан в виде

$$x_i \delta_{ij} x_j, \quad (\text{П.1.25})$$

где метрический тензор есть δ_{ij} . В принципе, можно было бы также взять метрический тензор с чередующимися знаками вдоль диагонали, η_{ij} , что породило бы некомпактное пространство параметров. Если η_{ij} содержит N положительных и M отрицательных элементов, то множество матриц, сохраняющих эту форму, называется $O(N, M)$:

$$\begin{aligned} (O^T)_{ij} \eta_{jk} O_{kl} &= \eta_{il}, \\ \eta_{ij} &= \varepsilon(i) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{П.1.26})$$

$$\varepsilon(i) = \pm 1.$$

Если все элементы ε положительны, то получаем группу $O(n)$. Если знаки чередуются, то полученная группа некомпактна. Частные случаи включают:

$$\begin{aligned} &\text{Проективная группа } O(2, 1), \\ &\text{Группа Лоренца } O(3, 1), \\ &\text{Группа де Ситтера } O(4, 1), \\ &\text{Группа анти-де Ситтера } O(3, 2), \\ &\text{Конформная группа } O(4, 2). \end{aligned} \quad (\text{П.1.27})$$

Например, группу де Ситтера можно построить, взяв образующие группы $O(4, 1)$ и затем записав пятый компонент в виде

$$P^a \sim M^{5a}. \quad (\text{П.1.28})$$

Таким образом, эта алгебра принимает вид

$$O(4, 1) : \begin{cases} [P^a, P^b] = M^{ab}, \\ [P^a, M^{bc}] = P^b \eta^{ac} - P^c \eta^{ab}, \\ [M^{ab}, M^{cd}] = \eta^{ac} M^{bd} - \dots \end{cases} \quad (\text{П.1.29})$$

Заметим, что полученная алгебра почти совпадает с алгеброй группы Пуанкаре. Действительно, если сделать подстановку

$$P^a \rightarrow \pm r P^a, \quad (\text{П.1.30})$$

то изменится только коммутатор

$$[P^a, P^b] = \frac{1}{r^2} M^{ab}. \quad (\text{П.1.31})$$

Параметр r называется *радиусом де Ситтера*. Отсюда следует, что, обойдя окружность в пространстве де Ситтера и вернувшись в исходную точку, мы обнаружим поворот посредством преобразования Лоренца относительно исходной ориентации. Заметим, что если r уходит на бесконечность, то получается группа Пуанкаре. Таким образом, r соответствует радиусу пятимерной вселенной, которая становится неотличимой от плоского четырехмерного пространства Пуанкаре при $r \rightarrow \infty$. Этот предельный переход называется *сжатием Вигнера–Инону*, и он будет широко использоваться в теориях супергравитации. После этого сжатия группа де Ситтера становится группой Пуанкаре.

SU(n)

Группа SU(n) состоит из всех возможных комплексных ($n \times n$)-матриц, имеющих единичный детерминант и являющихся унитарными:

$$UU^\dagger = 1. \quad (\text{П.1.32})$$

Обозначение этой группы расшифровывается как «специальные унитарные $n \times n$ матрицы с комплексными коэффициентами». Всякая унитарная матрица может быть записана как экспонента от эрмитовой матрицы $H^\dagger = H$:

$$U = e^{iH}. \quad (\text{П.1.33})$$

Можно показать, что

$$U^\dagger = e^{-iH^\dagger} = e^{-iH} = U^{-1}. \quad (\text{П.1.34})$$

Пусть n элементов комплексного вектора u_i линейно преобразуются под действием группы SU(n):

$$u'_i = U_{ij}u_j. \quad (\text{П.1.35})$$

Совокупность n комплексных векторов u_i образует *фундаментальное представление* этой группы. Тогда можно построить следующий инвариант:

$$u_i^* u_i = \text{инвариант}. \quad (\text{П.1.36})$$

Если $u'_i = U_{ij}u_j$, легко проверить, что

$$u_i^* u'_i = u_i^* (U^\dagger)_{ij} U_{jk} u_k = u_i^* u_i. \quad (\text{П.1.37})$$

Метрическим тензором для скалярного произведения снова будет δ_{ij} . Если заменить на противоположные некоторые из знаков этой диагональной матрицы, то группы, сохраняющие такой метрический тензор, обозначаются SU(N, M). Примером служит конформная группа SU(2,2).

Всякая комплексная бесследовая эрмитова матрица размера $n \times n$ имеет $n^2 - 1$ независимых элементов и поэтому может быть записана через $n^2 - 1$ линейно независимых матриц λ_i . Итак, любой элемент группы $SU(n)$ может быть записан в виде

$$U = e^{i \sum_{i=1}^{n^2-1} \rho_i \lambda_i} \quad (\text{П.1.38})$$

Тогда теорема Бейкера–Хаусдорфа гарантирует, что эта группа замкнута относительно указанной параметризации и что алгебру группы $SU(n)$ можно записать в виде

$$[\lambda_i, \lambda_j] = if_{ij}^k \lambda_k \quad (\text{П.1.39})$$

Как и прежде, знание структурных констант определяет эту алгебру полностью.

Можно также построить представление группы $SU(n)$ из спиноров. Для группы $O(2n)$ группа $SU(n)$ является подгруппой. Если построить элементы

$$A^j = \frac{1}{2}(\Gamma^{2j-1} - i\Gamma^{2j}), \quad (\text{П.1.40})$$

где Γ^{2j} суть грассмановы переменные, то образующие группы $SU(n)$ могут быть записаны как

$$\lambda^a = \sum_{j,k} A^{ij} (\lambda^a)_{jk} A^k \quad (\text{П.1.41})$$

Итак, мы получили явное представление включения

$$SU(n) \subset O(2n) \quad (\text{П.1.42})$$

Sp(2n)

Симплектические группы определяются как множество вещественных матриц S размера $2n \times 2n$, сохраняющих антисимметрическую метрику η :

$$(S^T)_{ij} \eta_{ik} S_{kl} = \eta_{il}, \quad (\text{П.1.43})$$

где

$$u'_i = S_{ij} u_j, \quad (\text{П.1.44})$$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1.45})$$

СОВПАДЕНИЯ

К счастью, существует ряд «совпадений», позволяющих установить локальные изоморфизмы между группами. Например, $O(2)$ локально изоморфна $U(1)$:

$$O(2) = U(1). \quad (\text{П.1.46})$$

Чтобы это увидеть, просто заметим соответствие между матричными элементами групп $O(2)$ и $U(1)$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \leftrightarrow e^{i\theta}. \quad (\text{П.1.47})$$

Таким образом, имеется закон умножения $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$.

Другое совпадение — это

$$O(3) = SU(2). \quad (\text{П.1.48})$$

Простейший способ это доказать — заметить, что спиновые матрицы Паули σ_i суть комплексные (2×2) -матрицы с теми же коммутационными соотношениями, что и алгебра группы $O(3)$. Так,

$$e^{\sum_{i=1}^3 \theta^i \lambda_i} \leftrightarrow e^{\sum_{i=1}^3 \theta^i \sigma_i}, \quad (\text{П.1.49})$$

где матрица в левой части — это ортогональная (3×3) -матрица, а в правой части стоит унитарная матрица.

Другое полезное совпадение — это

$$O(4) = SU(2) \otimes SU(2). \quad (\text{П.1.50})$$

Чтобы это доказать, заметим, что образующие M^{ij} группы $O(4)$ можно разбить на два набора:

$$A = \{M_{12} + M_{34}, M_{31} + M_{24}, M_{23} + M_{14}\} \quad (\text{П.1.51})$$

и

$$B = \{M_{12} - M_{34}, M_{31} - M_{24}, M_{23} - M_{14}\}. \quad (\text{П.1.52})$$

Заметим, что матрицы A и B по отдельности порождают алгебру Ли группы $O(3)$ и что

$$[A, B] = 0. \quad (\text{П.1.53})$$

Тем самым можно параметризовать любой элемент группы $O(4)$ таким образом, что он представляет как произведение двух элементов коммутирующих экземпляров группы $O(3)$. Итак, мы доказали, что любой элемент группы $O(4)$ расщепляется в произведение двух элементов коммутирующих экземпляров группы $SU(2)$.

К сожалению, эти совпадения являются скорее исключением, нежели правилом, для групп Ли. Перечислим некоторые из этих совпадений:

$\dim = 3$

$$SU(2, c) \sim SO(3, r) \sim Usp(2) \sim U(1, q) \sim SL(1, q), \quad (\text{П.1.54})$$

$$SU(1, 1; c) \sim SO(2, 1; r) \sim Sp(2, r) \sim SL(2, r),$$

$$\begin{aligned}
 \dim &= 6 \\
 \text{SO}(4, r) &\sim \text{SU}(2, c) \otimes \text{SU}(2, c), \\
 \text{SO}^*(4) &\sim \text{SU}(2, c) \otimes \text{SL}(2, r), \\
 \text{SO}(3, 1; r) &\sim \text{SL}(2, c), \\
 \text{SO}(2, 2; r) &\sim \text{SL}(2, r) \otimes \text{SL}(2, r),
 \end{aligned} \tag{П.1.55}$$

$$\begin{aligned}
 \dim &= 10 \\
 \text{SO}(5, r) &\sim \text{Usp}(4), \\
 \text{SO}(4, 1; r) &\sim \text{Usp}(2, 2), \\
 \text{SO}(3, 2; r) &\sim \text{Sp}(4, r),
 \end{aligned} \tag{П.1.56}$$

$$\begin{aligned}
 \dim &= 15 \\
 \text{SO}(6, r) &\sim \text{SU}(4, c), \\
 \text{SO}(5, 1; r) &\sim \text{SU}^*(4) \sim \text{SL}(2, q), \\
 \text{SO}^*(6) &\sim \text{SU}(3, 1; c), \quad ; \\
 \text{SO}(4, 2; r) &\sim \text{SU}(2, 2; c), \\
 \text{SO}(3, 3; r) &\sim \text{SL}(4, r).
 \end{aligned} \tag{П.1.57}$$

Для произвольного N имеем

$$\begin{aligned}
 \text{SL}(N, q) &= \text{SU}^*(2N), \\
 \text{U}(N, q) &= \text{Usp}(2N), \\
 \text{Sp}(N, q) &= \text{Usp}(2N), \\
 \text{O}(N, q) &= \text{SO}^*(2N)
 \end{aligned} \tag{П.1.58}$$

и, кроме того, для $N \leq 6$

$$\begin{aligned}
 \text{Spin}(3) &= \text{SU}(2), \\
 \text{Spin}(4) &= \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2), \\
 \text{Spin}(5) &= \text{Usp}(4), \\
 \text{Spin}(6) &= \text{SU}(4),
 \end{aligned} \tag{П.1.59}$$

где $\text{SL}(n)$ есть множество всех $(n \times n)$ -матриц с единичным детерминантом, элементы которых q могут быть вещественными числами, комплексными числами или кватернионами. Кватернионы — это обобщение комплексных чисел, такое, что каждый кватернион может быть записан в виде

$$q = \sum_{i=0}^3 c_i q_i, \tag{П.1.60}$$

где c суть вещественные числа и справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
 q_0 &= I, \\
 q_{1,2,3}^2 &= -I,
 \end{aligned} \tag{П.1.61}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= -q_2 q_1 = q_3, \\
 q_2 q_3 &= -q_3 q_2 = q_1,
 \end{aligned} \tag{П.1.62}$$

$$q_3 q_1 = -q_1 q_3 = q_2.$$

Представление Картана–Вейля

В общем случае для исключительных групп не существует таких удобных представлений через подгруппы группы $GL(n)$. Вместо этого мы воспользуемся методами Ли и Картана.

Среди образующих λ_i данной группы выберем взаимно коммутирующие элементы H_i :

$$[H_i, H_j] = 0. \quad (\text{П.1.63})$$

Полученная алгебра называется *картановской подалгеброй*. Число элементов картановской подалгебры называется *рангом* r соответствующей группы. Назовем все прочие элементы исходной алгебры E . Каковы коммутационные соотношения между элементами H и E ? В общем случае нельзя обеспечить, чтобы коммутатор элементов из H и E давал другой элемент из H , потому что это не удовлетворяло бы тождествам Якоби. Поэтому этот коммутатор даст другой элемент из E . Мы всегда можем перегруппировать прочие элементы E исходной алгебры таким образом, чтобы они стали собственными векторами элементов H . Обозначим их

$$E_\alpha, \quad (\text{П.1.64})$$

где α называется *корневым вектором* в r -мерном пространстве. В общем случае эти корневые векторы лежат в r -мерном пространстве. Заметим, что если число параметров группы равно N , то число элементов E равно $N - r$. Итак, в r -мерном пространстве имеется $N - r$ корневых векторов. Всегда можно взять линейные комбинации различных E и получить уравнение на собственные значения

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha. \quad (\text{П.1.65})$$

В силу тождеств Якоби другие коммутационные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_\alpha] &= \alpha_i X_i, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.66})$$

N суть структурные константы нашей группы. Их явный вид дается уравнением

$$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2} n(n+1) \alpha_i \alpha_i. \quad (\text{П.1.67})$$

Симметрии, связывающие между собой структурные константы, таковы:

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta} &= -N_{\beta,\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta}, \\ N_{\alpha,\beta} &= N_{\beta,-\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta,\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.68})$$

Диаграммы Дынкина

Дадим несколько определений, касающихся корней. Каждый корневой вектор лежит в r -мерном пространстве. Поэтому мы можем выбрать некое подмножество, состоящее из r таких векторов, так что каждый другой корневой вектор может быть записан как их линейная комбинация:

$$\rho = \sum_{i=1}^r c_i \alpha_i. \quad (\text{П.1.69})$$

Корень называется *положительным*, если первый ненулевой коэффициент c в этой формуле положителен. *Простой корень* – это положительный корень, который не может быть представлен суммой двух положительных корней. Поскольку структурные константы однозначно определяют алгебру, то это же можно сказать о *матрице Картана*; это $(r \times r)$ -матрица, определенная формулой

$$A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}, \quad (\text{П.1.70})$$

где α_i суть r простых корней.

Диагональные элементы матрицы Картана по построению равны 2. Но эта матрица необязательно симметрична. Действительно, можно показать, что для внедиагональных элементов возможны лишь значения 0, -1 , -2 , -3 . Поскольку матрица Картана полностью определяет группу, можно использовать некоторые простые свойства этой матрицы, чтобы определить группу графически. Самое удобное из таких графических представлений – *диаграмма Дынкина*.

Для группы ранга r рисуем r точек. Каждый простой корень, таким образом, представлен точкой. Теперь соединим точки i и j с помощью n линий, где n равно произведению соответствующих внедиагональных элементов матрицы Картана:

$$n = A_{ij} A_{ji}. \quad (\text{П.1.71})$$

Полученная диаграмма представляет собой набор точек, соединенных одинарными или множественными линиями и называемая *диаграммой Дынкина*. Достоинство диаграмм Дынкина состоит в том, что они однозначно определяют структуру любой группы Ли и тем самым позволяют визуально различать разные группы Ли.

Поскольку элементы матрицы Картана связаны со скалярными произведениями в пространстве, порожденном решеткой корней, мы можем также выразить n через угол θ между двумя корневыми

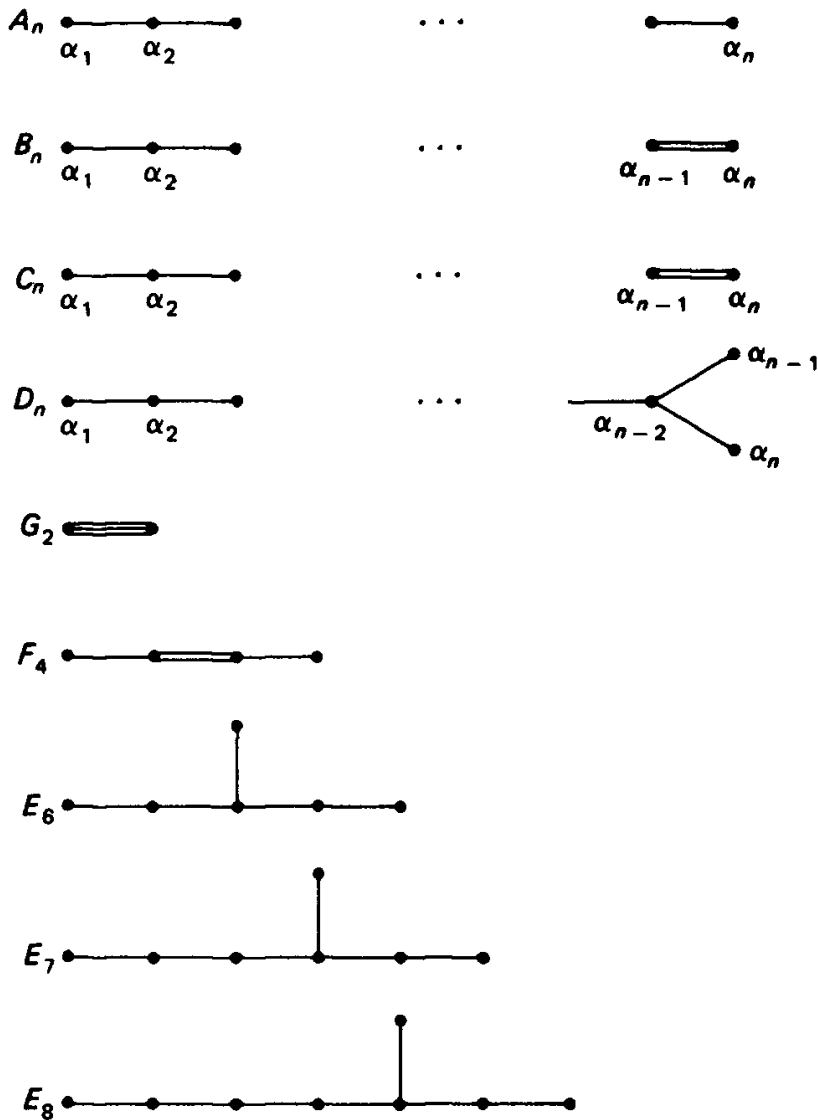


Рис. П.1. Диаграммы Дынкина для разных алгебр Ли. Число точек представляет ранг соответствующей группы. Число линий, соединяющих точки, зависит от угла между двумя корневыми векторами. Диаграммы Дынкина дают удобный способ наглядного представления всей структуры произвольной алгебры Ли.

векторами:

n	θ
0	90°
1	120°
2	135°
3	150°

Если ограничиться компактными вещественными группами, получим

следующие диаграммы Дынкина (см. рис. П.1):

$$\begin{aligned}
 & A_n = \text{SU}(n+1); \\
 & \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq n+1; \\
 & B_n = \text{SO}(2n+1); \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \\
 & \pm \mathbf{e}_i; \\
 & C_n = \text{Sp}(2n); \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \\
 & \pm 2\mathbf{e}_i; \\
 & D_n = \text{SO}(2n); \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \\
 & G_2; \quad ; \\
 & \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j; \\
 & \pm(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j - 2\mathbf{e}_k); \quad 1 \leq i \neq j \neq k \leq 3; \\
 & F_4; \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq 4; \\
 & \pm 2\mathbf{e}_i \\
 & \pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3 \pm \mathbf{e}_4 \\
 & E_6; \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq 5; \\
 & \frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \pm \dots \pm \mathbf{e}_5) \pm \left(2 - \frac{5}{4}\right)^{1/2} \mathbf{e}_6;
 \end{aligned}$$

в последнем выражении число знаков + четно.

$$\begin{aligned}
 & E_7; \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq 6; \\
 & \pm \sqrt{2}\mathbf{e}_7; \\
 & \frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \pm \dots \pm \mathbf{e}_6) \pm \left(2 - \frac{6}{4}\right)^{1/2} \mathbf{e}_7;
 \end{aligned}$$

в последнем выражении число знаков + четно.

$$\begin{aligned}
 & E_8; \\
 & \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j; \quad 1 \leq i \neq j \leq 7; \\
 & \frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \pm \dots \pm \mathbf{e}_7) \pm \frac{1}{2}\mathbf{e}_8;
 \end{aligned}$$

в последнем выражении число знаков + четно.

§ П.2. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Наиболее общее преобразование координат пространства – времени дается формулой

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x). \quad (\text{П.2.1})$$

При такой репараметризации использование правила дифференцирования сложной функции позволяет установить, что дифференциалы и частные производные преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu, \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

Будем говорить, что дифференциал dx^μ преобразуется *контравариантным* образом, а производная $\hat{\partial}_\mu$ преобразуется *ковариантным* образом. По прямой аналогии теперь определим векторы, преобразующиеся точно так же:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu, \\ B'^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} B^\nu. \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

Произвольный тензор $T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda}$ просто преобразуется как произведение нескольких векторов. Число индексов тензора называется *рангом* тензора.

Теперь легко показать, что свертка ковариантного и контравариантного тензора является инвариантом:

$$A_\mu B^\mu = \text{инвариант}. \quad (\text{П.2.4})$$

Можно показать, что частная производная скаляра является вектором:

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \Phi. \quad (\text{П.2.5})$$

Фундаментальная проблема общей ковариантности, однако, возникает из-за того, что частная производная тензора не является тензором. Чтобы справиться с этой ситуацией, приходится ввести еще один объект, называемый символом Кристоффеля, который превращает производную тензора в настоящий тензор:

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda. \quad (\text{П.2.6})$$

Потребуем, чтобы

$$(\nabla_{\mu} A_{\nu})' = \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \nabla_{\lambda} A_{\alpha}. \quad (\text{П.2.7})$$

Это в свою очередь однозначно определяет способ, которым преобразуется символ Кристоффеля: ясно, что он *не* является тензором.

Теперь мы, конечно, можем определить ковариантную производную контравариантного тензора:

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} A^{\lambda}. \quad (\text{П.2.8})$$

Мы можем также сделать это для произвольного тензора ранга r .

Пока что мы не налагали никаких ограничений ни на символы Кристоффеля, ни даже на пространство-время. Теперь определим метрику на этом пространстве, определив инвариантное расстояние формулой

$$ds^2 = dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu}, \quad (\text{П.2.9})$$

где g – метрический тензор, преобразующийся как настоящий тензор второго ранга.

Теперь ограничим класс рассматриваемых метрик, потребовав, чтобы ковариантная производная метрического тензора равнялась нулю:

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\lambda} = 0. \quad (\text{П.2.10})$$

Заметим, что для этого должны удовлетворяться

$$D \times \frac{1}{2} D(D + 1) \quad (\text{П.2.11})$$

уравнений, что в точности совпадает с числом элементов символов Кристоффеля, если последние брать симметричными по нижним индексам. Поэтому мы можем полностью решить эту систему уравнений, выразив символы Кристоффеля через компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu,\beta}, \\ \Gamma_{\mu\nu,\beta} &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{П.2.12})$$

Заметим, что по предположению символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам. В общем случае это не так, и антисимметричные компоненты символа Кристоффеля называют *тензором кручения*:

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (\text{П.2.13})$$

В плоском пространстве справедливо уравнение

$$[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] = 0. \quad (\text{П.2.14})$$

Поскольку производная от поля порождает параллельные переносы, то

интуитивно смысл этого уравнения состоит в том, что в результате параллельного переноса вектора по замкнутому контуру мы получаем исходный вектор.

В искривленном пространстве, однако, это не обязательно справедливо. Параллельный перенос вектора вдоль замкнутого пути на сфере, например, приводит к некоторому повороту этого вектора после завершения обхода контура.

Можно также найти аналог предыдущего уравнения для искривленных многообразий. Мы можем рассматривать ковариантную производную как параллельное перемещение вектора, а символ Кристоффеля как меру отклонения от плоского пространства. Если теперь совершить полный обход, параллельно перемещая вектор вдоль замкнутого контура, то получим

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}^\alpha A_\alpha, \quad (\text{П.2.15})$$

где

$$R_{\mu\nu\lambda}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\beta. \quad (\text{П.2.16})$$

Попытаемся теперь выразить действие в этом формализме. Сначала заметим, что объем области интегрирования не является подлинным скаляром:

$$d^D x = \det \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \right] d^D \bar{x}. \quad (\text{П.2.17})$$

Чтобы построить инвариант, нужно умножить эту величину на квадратный корень из детерминанта метрического тензора:

$$\sqrt{-g} = \det \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \right] \sqrt{-\bar{g}}. \quad (\text{П.2.18})$$

Произведение этих величин даст нам инвариант:

$$\sqrt{-g} d^D x = \text{инвариант}. \quad (\text{П.2.19})$$

Заметим, что квадратный корень метрического тензора не преобразуется как скаляр, так как в (П.2.18) в качестве множителя входит якобиан преобразования. Будем говорить, что он преобразуется как *плотность*.

У тензора кривизны имеется две производные. Действительно, можно показать, что свертка тензора кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda}^\alpha \delta_\alpha^\mu \delta^{\nu\lambda} = R \quad (\text{П.2.20})$$

является *единственным* скаляром, который можно построить из метрического тензора и символов Кристоффеля с двумя производными. Поэтому *единственное* возможное действие, обладающее двумя производными, это

$$S = \frac{-1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} R. \quad (\text{П.2.21})$$

Однако этот формализм нельзя обобщить так, чтобы включить в него спиноры. Если рассматривать матрицу преобразования

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}, \quad (\text{П.2.22})$$

как элемент группы $GL(D)$, то окажется, что не существует *конечномерного спинорного представления этой группы*. Поэтому одних лишь метрических тензоров недостаточно для определения спиноров.

Чтобы найти выход из этого положения, построим плоское *касательное* пространство в каждой точке многообразия, обладающее симметрией $O(D)$. Определим векторы в касательном пространстве, обозначив их латинскими индексами a, b, c, d, \dots . Определим *тетраду* как матрицу преобразования, осуществляющего переход от пространства x к касательному пространству, и наоборот:

$$\begin{aligned} e_\mu^a e_\nu^a &= g_{\mu\nu}, \\ e^{aa} &= g^{ab} e_\beta^a, \\ e_\alpha^a e^{ab} &= \delta^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.23})$$

Определим теперь множество гамма-матриц, определенных как в касательном, так и в основном пространствах:

$$\begin{aligned} \gamma^a e^{a\mu} &= \gamma^\mu, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= -2g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.24})$$

Тогда оператор производной, действующий на спинор, принимает вид

$$\gamma^a e^{a\mu} \partial_\mu = \gamma^\mu \partial_\mu = \hat{\partial}. \quad (\text{П.2.25})$$

С помощью касательного пространства определим теперь ковариантную производную спинора ψ :

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_\mu^{ab} \sigma^{ab} \psi. \quad (\text{П.2.26})$$

Здесь σ^{ab} – антисимметричное произведение двух гамма-матриц, а ω_μ^{ab} называется *спиновой связностью*. Заметим, что спиновая связность – это настоящий тензор по индексу μ . Под действием локального преобразования Лоренца поле преобразуется по формулам

$$\psi \rightarrow e^M \psi; \quad \nabla_\mu \psi \rightarrow e^M \nabla_\mu \psi. \quad (\text{П.2.27})$$

Можно также использовать формализм группы $O(3, 1)$ для построения общей теории относительности и обойтись без символов Кристоффеля. Можно определить

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu^{ab} M^{ab}, \quad (\text{П.2.28})$$

где M суть образующие группы Лоренца. Тогда можно построить

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = R_{\mu\nu}^{ab} M^{ab}, \quad (\text{П.2.29})$$

где

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{cb} - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{cb}. \quad (\text{П.2.30})$$

Заметим, что этот тензор $R_{\mu\nu}^{ab}$ дает альтернативную форму тензора кривизны.

Мы также потребуем, чтобы ковариантная производная тетрады равнялась нулю:

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b = 0. \quad (\text{П.2.31})$$

Если антисимметризовать это уравнение по $\mu\nu$, символы Кристоффеля исчезнут. Заметим, что спиновая связность имеет

$$D \times \frac{1}{2} D(D-1) \quad (\text{П.2.32})$$

компонент. Это в точности равно числу компонент в антисимметризованной версии уравнения (П.2.31). Поэтому мы можем его решить, выразив спиновую связность через тетраду. Символы Кристоффеля и тетрада суть очень сложные формы выражения друг друга.

Располагая этими выражениями для символа Кристоффеля и полей спиновой связности, мы можем теперь показать взаимоотношение между тензорами кривизны в этих двух формализмах:

$$R_{\mu\nu} = R(\Gamma)_{\mu\alpha\nu}^\alpha = R(\omega)_{\mu\alpha}^{ab} e_{\alpha\nu}^a e_b^a. \quad (\text{П.2.33})$$

Если взять произвольный спинор и параллельно переносить его вокруг замкнутого контура с площадью $\Delta^{\mu\nu}$, получим

$$\psi \rightarrow (1 + \Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{ab} \sigma^{ab}) \psi. \quad (\text{П.2.34})$$

Заметим, что матрицы σ^{ab} суть образующие группы евклидовых лоренцевых преобразований $O(D)$. Поэтому в результате параллельного переноса вдоль замкнутого контура спинор просто повернется относительно своей первоначальной ориентации на угол, пропорциональный

$$\Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{ab}. \quad (\text{П.2.35})$$

Заметим также, что, начиная из одной и той же точки, можно описать бесконечно много замкнутых контуров. При этом всякий раз спинор проделает некоторый поворот. Эти повороты образуют группу. Фактически эта группа есть просто $O(D)$, и она называется группой голономий.

§ П. 3. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФОРМ

Определим *один-форму* A выражением

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (\text{П.3.1})$$

где A_μ есть векторное поле, а дифференциалы dx^μ антикоммути-

руют:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= -dx^\nu \wedge dx^\mu, \\ dx^\mu \wedge dx^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

Определим оператор производной как

$$d = dx^\mu \partial_\mu. \quad (\text{П.3.3})$$

Заметим, что поскольку производные коммутируют,

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad (\text{П.3.4})$$

то

$$d^2 = 0, \quad (\text{П.3.5})$$

где оператор d нильпотентен.

Теперь определим *два-форму*:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (\text{П.3.6})$$

Заметим, что кривизна векторного поля является *два-формой*:

$$\begin{aligned} F &= dA = dx^\mu \partial_\mu A_\nu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

Поскольку оператор d нильпотентен, имеем

$$dF = d^2 A = 0. \quad (\text{П.3.8})$$

Таким образом, тождества Бьянки для теории Максвелла, выраженные на языке форм, суть не что иное, как нильпотентность оператора d .

Форма ω называется *замкнутой*, если

$$d\omega = 0. \quad (\text{П.3.9})$$

Форма ω называется *точной*, если

$$\omega = dQ \quad (\text{П.3.10})$$

для некоторой формы Q . Таким образом, форма кривизны является *точной*, поскольку она может быть записана как дивергенция *один-формы* A . Она также является *замкнутой* вследствие тождеств Бьянки.

Все это можно также объединить с локальной калибровочной группой, порожденной образующими λ_a . Пусть

$$A = A_\mu^a \lambda_a dx^\mu. \quad (\text{П.3.11})$$

Тогда форма кривизны есть

$$F = dA + A \wedge A. \quad (\text{П.3.12})$$

Далее, калибровочная вариация поля Янга–Миллса при преобразовании

$$\Lambda = \Lambda^a \lambda_a \quad (\text{П.3.13})$$

равна

$$\delta A = d\Lambda + A \wedge \Lambda - \Lambda \wedge A. \quad (\text{П.3.14})$$

Подставляя вариацию поля A в кривизну F , получаем

$$\delta F = F \wedge \Lambda - \Lambda \wedge F. \quad (\text{П.3.15})$$

Итак, вариация действия равна нулю:

$$\delta \text{Tr}(F^2) = 2\text{Tr}(F \wedge \Lambda) - 2\text{Tr}(\Lambda \wedge F) = 0. \quad (\text{П.3.16})$$

Теперь выпишем аномальный член FF , выразив его на языке форм. Дивергенция аксиального тока также является квадратом двух величин, выражающих кривизну, что также дает полную производную. На языке форм, это, как мы увидим, есть точная форма:

$$\text{Tr}(F \wedge \tilde{F}) = d\omega_3, \quad (\text{П.3.17})$$

где

$$\omega_3 = \text{Tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right); \quad (\text{П.3.18})$$

ω_3 — это три-форма, которую мы назовем формой Черна–Саймонса. В свою очередь ее калибровочная вариация равна еще одной форме, которая также является точной:

$$\delta\omega_3 = \text{Tr}(d\Lambda \wedge dA) = d\omega_2, \quad (\text{П.3.19})$$

где

$$\omega_2 = \text{Tr}(\Lambda \wedge dA). \quad (\text{П.3.20})$$

Заметим также, что эти тождества в равной мере применимы и к теориям Янга–Миллса, и к общей теории относительности. Для теории тяготения имеем калибровочную группу $O(3, 1)$. Другими словами, гравитационное поле обладает двумя калибровочными симметриями, а именно общей ковариантностью по координатам x -пространства и локальными лоренцевыми преобразованиями касательного пространства. Подробнее это будет объяснено ниже.

В общем случае N -форма определяется как

$$\omega_N = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_N}. \quad (\text{П.3.21})$$

Все выписанные выше уравнения, конечно, можно вывести без использования теории форм. Однако формы обеспечивают мощную и компактную нотацию, позволяющую манипулировать сложными математическими объектами. Заметим, например, что теорема Стокса, выраженная на языке форм, принимает вид

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (\text{П.3.22})$$

где ∂M есть граница многообразия M .

Вот некоторые простые свойства этих форм:

$$\begin{aligned}\omega_p \wedge \omega_q &= (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p, \\ d(\omega_p \wedge \omega_q) &= d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q.\end{aligned}\quad (\text{П.3.23})$$

Введем также новый оператор-звезду Ходжа, позволяющую брать форму, двойственную к p -форме, и превращать ее в $(n-p)$ -форму в n -мерном пространстве:

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{|g|^{1/2}}{(n-p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_n} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.\quad (\text{П.3.24})$$

Вот некоторые свойства этого оператора:

$$\begin{aligned}**\omega_p &= (-1)^{p(n-p)} \omega_p, \\ \omega_p \wedge *\omega_q &= \omega_q \wedge *\omega_p.\end{aligned}\quad (\text{П.3.25})$$

В оставшейся части этого раздела мы докажем приведенное в гл. 9 утверждение о том, что всякий инвариантный полином является одновременно замкнутой и точной формой. Определим инвариантный полином как такой полином, который удовлетворяет условию

$$P(\alpha) = P(g^{-1}\alpha g).\quad (\text{П.3.26})$$

Начнем с определения однородного инвариантного полинома степени r , зависящего от форм α_i :

$$P = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r).\quad (\text{П.3.27})$$

Продифференцируем этот полином, тщательно выписывая производные каждой формы, содержащейся в P :

$$dP = \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(\alpha_1, \dots, d\alpha_i, \dots, \alpha_r).\quad (\text{П.3.28})$$

Всякий раз, когда оператор производной d проходит над формой α_i , он приобретает соответствующий множитель:

$$d\alpha_i = (d\alpha_i) + \alpha_i d(-1)^{d_i}.\quad (\text{П.3.29})$$

Теперь предположим, что

$$\alpha \rightarrow g^{-1}\alpha g.\quad (\text{П.3.30})$$

Для g , близких к единице, всегда можно записать

$$\begin{aligned}g &= 1 + \omega, \\ \delta\alpha &= -\omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega.\end{aligned}\quad (\text{П.3.31})$$

Вычислим вариацию однородного полинома P степени r при таком сдвиге:

$$\begin{aligned}\delta P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) &= 0 = \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} [P(\alpha_1 \alpha_2, \dots, \omega \wedge \alpha_i, \dots, \alpha_r) \\ &\quad - (-1)^{d_i} P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \wedge \omega, \dots, \alpha_r)].\end{aligned}\quad (\text{П.3.32})$$

Фокус теперь будет состоять в том, что мы сложим вклады от dP и от δP :

$$dP + \delta P = \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_i} P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, D\alpha_i, \dots, \alpha_r). \quad (\text{П.3.33})$$

Теперь положим, что каждая α_i является формой кривизны, подчиняющейся тождеству Бьянки $D\alpha_i = 0$. Таким образом, получаем

$$dP(\Omega) = 0, \quad (\text{П.3.34})$$

что и утверждалось.

Вторая часть доказательства несколько сложнее. Определим

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega, \\ \Omega &= d\omega' + \omega' \wedge \omega'. \end{aligned} \quad (\text{П.3.35})$$

Теперь наш план состоит в том, чтобы для некоторой формы показать выполнение равенства

$$P(\Omega') - P(\Omega) = dQ. \quad (\text{П.3.36})$$

Сначала мы хотим выписать форму кривизны, позволяющую непрерывно интерполировать между Ω и Ω' . Пусть

$$\begin{aligned} \omega_t &= \omega + t\eta, \\ \eta^- &= \omega' - \omega. \end{aligned} \quad (\text{П.3.37})$$

Заметим, что переменная t позволяет интерполировать между этими двумя формами:

$$\begin{aligned} t = 0 &\rightarrow \omega_t = \omega, \\ t = 1 &\rightarrow \omega_t = \omega'. \end{aligned} \quad (\text{П.3.38})$$

Теперь легко найти форму кривизны, осуществляющую эту интерполяцию, как функцию t :

$$\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t, \quad (\text{П.3.39})$$

где

$$t = 0 \rightarrow \Omega_t = \Omega. \quad (\text{П.3.40})$$

Эта форма изменяется между Ω и Ω' , когда t изменяется от нуля до единицы.

Теперь выпишем форму q , такую что

$$q(\beta, \alpha) = rP(\beta, \alpha, \alpha \dots (r-1 \text{ раз}) \dots \alpha), \quad (\text{П.3.41})$$

где форма α повторяется $r-1$ раз в инвариантном полиноме. Эта форма q будет играть ключевую роль в доказательстве того, что P является точной формой.

В силу приведенного выше рассуждения при дифференцировании

q получим

$$dq(\eta, \Omega_t) = rdP(\eta, \Omega_t, \dots (r-1 \text{ раз}) \dots \Omega_t) = q(D\eta, \Omega_t) - r(r-1)tP(\eta, \Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t, \Omega_t, \dots, \Omega_t). \quad (\text{П.3.42})$$

Но в силу того факта, что q является инвариантным полиномом, мы получаем также тождество

$$2q(\eta \wedge \eta, \Omega_t) + r(r-1)P(\eta, \Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t, \dots, \Omega_t) = 0. \quad (\text{П.3.43})$$

В (П.3.43) мы использовали

$$q = 1 + \eta. \quad (\text{П.3.44})$$

Собирая вместе оба эти уравнения, находим

$$dq(\eta, \Omega_t) = q(D\eta, \Omega_t) + 2tq(\eta \wedge \eta, \Omega_t) = \frac{dP(\Omega_t)}{dt}. \quad (\text{П.3.45})$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

$$\int_0^1 \frac{dP(\Omega_t)}{dt} = P(\Omega') - P(\Omega) = d \int_0^1 q(\omega' - \omega, \Omega_t) dt = dQ. \quad (\text{П.3.46})$$

Итак, мы получили наш окончательный результат:

$$P(\Omega') - P(\Omega) = dQ, \quad (\text{П.3.47})$$

$$Q = \int_0^1 q(\omega' - \omega, \Omega_t) dt + \text{замкнутые формы}.$$

Таким образом, инвариантный полином, основанный на два-формах кривизны, является одновременно замкнутой и точной формой.

§ П.4. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРСИММЕТРИЮ

В конце 60-х годов физики пытались построить всеобъемлющую группу, которая позволила бы объединить внутреннюю группу симметрии (вроде $SU(3)$) и группу Лоренца или Пуанкаре. Они искали такую группу M , которая была бы нетривиальным объединением внутренней группы U и группы Пуанкаре:

$$M \supset U \otimes P. \quad (\text{П.4.1})$$

Большой интерес вызывали группы вроде $SU(6,6)$. Однако знаменитая теорема Колемана–Мандулы показала, что этот замысел осуществить невозможно. Не существует унитарных конечномерных представлений некомпактной группы. Так что верно одно из двух:

- (1) Группа M имеет непрерывное распределение масс, или
- (2) Группа M имеет бесконечное число частиц в каждом неприводимом представлении.

В обоих случаях для первоначального замысла это катастрофа. Однако оказывается, что *супергруппы* или *градуированные группы Ли* позволяют обойти эту запретительную теорему.

Работа Ли и Картана касалась лишь непрерывных простых групп с вещественными параметрами ρ_i . Однако если мы допустим, чтобы эти параметры были грассмановыми числами, мы можем обобщить упомянутые выше классические группы и получить *супергруппы*.

Два обширных бесконечных класса групп, которые нас будут интересовать, это $Osp(N/M)$ и $SU(N/M)$.

Начнем с группы $O(N)$, сохраняющей инвариант:

$$O(N): x_i x_i = \text{инвариант} \quad (\text{П.4.2})$$

и группы $Sp(M)$, сохраняющей форму:

$$Sp(M): \theta_m C_{mn} \theta_n = \text{инвариант}. \quad (\text{П.4.3})$$

Здесь матрицы C вещественные и антисимметричные, поскольку θ_i – грассмановы числа. *Ортосимплектическая группа* теперь определяется как группа, сохраняющая следующую сумму:

$$Osp(N/M): x_i x_i + \theta_m C_{mn} \theta_n = \text{инвариант}. \quad (\text{П.4.4})$$

Заметим, что ортосимплектическая группа очевидным образом содержит в себе следующее прямое произведение:

$$Osp(N/M) \supset O(N) \otimes Sp(M). \quad (\text{П.4.5})$$

Простейший способ выразить матричное представление этой группы – это блочно-диагональная форма:

$$Osp(N/M) = \left\{ \begin{array}{cc} O(N) & A \\ & B \quad Sp(M) \end{array} \right\}. \quad (\text{П.4.6})$$

Ограничения на матрицы A и B просты.

Аналогично, суперунитарные группы можно определить как группы, сохраняющие комплексную форму

$$(x^i)^* x^j \delta_{ij} + (\theta^m)^* \theta^n g_{mn}, \quad (\text{П.4.7})$$

$$g_{mn} = \pm \delta_{mn}.$$

Бозонное разложение этой группы дается формулой

$$SU(N/M) \supset SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1). \quad (\text{П.4.8})$$

Выпишем образующие группы $Osp(1/4)$ в виде

$$M_A = (P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_\alpha). \quad (\text{П.4.9})$$

Их коммутационные соотношения суть

$$[M_A, M_B]_{\pm} = f_{AB}^C M_C. \quad (\text{П.4.10})$$

Выписанные в явном виде, коммутаторы образующих группы супер-

симметрии суть

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0, \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta. \end{aligned} \quad (\text{П.4.11})$$

То, что мы хотим получить, это явное представление этих образующих в том смысле, в котором

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (\text{П.4.12})$$

служит образующей группы трансляций в x -пространстве. Теперь нужно обобщить понятие пространства-времени, чтобы включить в него суперсимметричного партнера x -координаты. Определим суперпространство как пространство, порожденное парой

$$x_\mu, \theta_\alpha, \quad \vdots \quad (\text{П.4.13})$$

где θ_α является грассмановым числом. Теперь определим образующую группы суперсимметрии

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \quad (\text{П.4.14})$$

где θ – грассманово число. Мы выбрали это конкретное представление, поскольку антикоммутатор двух таких образующих дает перемещение, как это и должно быть:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} i\partial_\mu. \quad (\text{П.4.15})$$

Заметим, что $\bar{\epsilon}Q$ осуществляет следующее преобразование в суперпространстве:

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x_\mu - i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta, \\ \theta_\alpha &\rightarrow \theta_\alpha + \epsilon_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{П.4.16})$$

Заметим также, что мы можем построить оператор

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + i(\gamma^\mu \partial_\mu \theta)_\alpha \quad (\text{П.4.17})$$

антикоммутирующий с генератором суперсимметрии:

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = 0. \quad (\text{П.4.18})$$

Это очень важно, поскольку это позволяет наложить ограничения на представления группы суперсимметрии, не разрушая симметрии. Это позволит нам извлечь неприводимые представления из приводимых.

Попробуем теперь построить действие, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии. Определим *суперполе* V как степенное

разложение наиболее общего вида в этом суперпространстве:

$$V(x, \theta). \quad (\text{П.4.19})$$

Тогда представление суперсимметрии дается формулой

$$\delta V(x, \theta) = V(x + \delta x, \theta + \delta \theta) - V(x, \theta) = \bar{\varepsilon}^a Q_a V(x, \theta). \quad (\text{П.4.20})$$

Заметим, что в силу этого определения произведение двух суперполей также является суперполем:

$$V_1 V_2 = V_3.$$

Таким образом, мы можем построить обширное множество представлений суперсимметрии с помощью этого простого правила умножения. Теперь вычислим в явном виде преобразование полей. Иногда окажется полезным разбивать четырехкомпонентный спинор на два двухкомпонентных спинора согласно тождеству

$$O(4) = SU(2) \otimes SU(2). \quad (\text{П.4.21})$$

Используя индексы A и \dot{A} , $A = 1, 2$, запишем майорановский четырехкомпонентный спинор через его компоненты, содержащиеся в $SU(2) \otimes SU(2)$:

$$\chi^a = \begin{pmatrix} \chi^A \\ \bar{\chi}_{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (\text{П.4.22})$$

$$\bar{\chi}_a = (\chi_A, -\bar{\chi}^{\dot{A}}).$$

Обратив эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \chi^A &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi, \\ \bar{\chi}_{\dot{A}} &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi \end{aligned} \quad (\text{П.4.23})$$

и

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{AB} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.4.24})$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB} = -\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}, \quad \varepsilon_{12} = 1.$$

В этих обозначениях ковариантные производные можно записать как

$$\begin{aligned} D_A &= \frac{\partial}{\partial \theta^A} - i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}} \theta^{\dot{A}} \partial_\mu, \\ D_{\dot{A}} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}}} - i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}} \theta^A \partial_\mu, \end{aligned} \quad (\text{П.4.25})$$

где

$$\sigma^\mu(1, \sigma). \quad (\text{П.4.26})$$

Вещественное векторное суперполе V можно разложить как

$$\begin{aligned}
 V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C - i\theta\chi - i\bar{\chi}'\bar{\theta} - \frac{1}{2}i\theta^2(M - iN) + \frac{1}{2}i\bar{\theta}^2(M + iN) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu \\
 & + i\bar{\theta}^2\theta(\lambda - \frac{1}{2}i\hat{\partial}\bar{\chi}') - i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda}' - \frac{1}{2}i\hat{\partial}\chi) \\
 & - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D + \frac{1}{2}\square C).
 \end{aligned}
 \tag{П.4.27}$$

Теперь мы можем выписать суперсимметричное преобразование, зависящее от параметра ζ , действующее на эти 16 полей:

$$\begin{aligned}
 \delta C &= \bar{\zeta}\gamma_5\chi, \\
 \delta\chi &= (M + \gamma_5 N)\zeta - i\gamma^\mu(A_\mu + \gamma_5\partial_\mu C)\zeta, \\
 \delta M &= \bar{\zeta}(\lambda - i\hat{\partial}\chi), \quad ; \\
 \delta N &= \bar{\zeta}\gamma_5(\lambda - i\hat{\partial}\chi), \\
 \delta A_\mu &= i\bar{\zeta}\gamma_\mu\lambda + \bar{\zeta}\partial_\mu\chi, \\
 \delta\lambda &= -i\sigma^{\mu\nu}\zeta\partial_\mu A_\nu - \gamma_5\zeta D, \\
 \delta D &= -i\bar{\zeta}\hat{\partial}\gamma_5\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{П.4.28}$$

Мы назовем это суперполе векторным, поскольку оно содержит векторную частицу в своем представлении (не потому, что суперполе само по себе является векторным полем относительно преобразований группы Лоренца). В общем случае векторные поля могут быть комплексными и *приводимыми*. Для образования неприводимых представлений удобно налагать на эти поля связи, не разрушающие их суперсимметричную природу. Эти связи должны тем самым коммутировать с генераторами суперсимметрии.

Заметим, что поскольку D_α антикоммутирует с генератором суперсимметрии, мы можем наложить этот оператор производной на суперполе и снова получить некоторое представление суперсимметрии. Попробуем построить разные представления суперсимметрии, основанные на этом простом принципе. Мы можем наложить

$$D_\alpha\phi = 0. \tag{П.4.29}$$

Суперполе, удовлетворяющее этой связи, называется *киральным суперполем*. Заметим, что оно содержит только половину полей, содержащихся в исходном суперполе, но по-прежнему правильно преобразуется под действием нашей группы. Киральное суперполе обладает разложением

$$\phi(x, \theta) = A + 2\theta\psi - \theta^2 F. \tag{П.4.30}$$

Вариация этого суперполя позволяет найти вариации его компонент:

$$\delta\phi = -i[\phi, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}]. \tag{П.4.31}$$

Легко получаем

$$\begin{aligned}\delta A &= 2\zeta\psi, \\ \delta\psi &= -\zeta F - i\partial_\mu A\sigma^\mu\bar{\zeta}, \\ \delta F &= -2i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\zeta}.\end{aligned}\tag{П.4.32}$$

Можно также попробовать другие комбинации связей, скажем

$$D_A\varphi = 0,\tag{П.4.33}$$

наложенных на киральное суперполе. Мы обнаружим, однако, что сочетание этих двух связей, наложенных одновременно, означает, что φ является постоянным.

Другая возможная связь — это

$$D^A D_A\varphi = 0.\tag{П.4.34}$$

Это дает линейный мультиплет. (К сожалению, действия, основанные на этой связи, обычно эквивалентны действиям, основанным на киральных суперполях, так что ничего нового мы отсюда не узнаем.) Другая возможная связь — это

$$[D_A, D_{\dot{B}}]\varphi = 0.\tag{П.4.35}$$

К сожалению, это дает постоянное поле. Мы могли бы также наложить связь

$$D_{\dot{B}} D^A D_A\varphi = 0.\tag{П.4.36}$$

Такая связь снова дает киральное суперполе. Наконец, мы могли бы также попробовать связь

$$D_A \bar{D}^2\varphi = 0\tag{П.4.37}$$

для вещественного φ . Это действительно даст совершенно новое суперполе, которое мы используем для построения действия теории Янга–Миллса.

Итак, новые поля, преобразующиеся как неприводимые представления группы суперсимметрии, это лишь киральное суперполе, векторное суперполе и суперполе Янга–Миллса. Другие комбинации, которые можно было бы попытаться использовать, дают либо постоянное поле, либо повторяют исходный набор полей.

Теперь обсудим проблему построения инвариантного действия, определив интегрирование по грасмановым переменным. Это должно быть сделано достаточно корректно. Обычное интегрирование по вещественным переменным, разумеется, является трансляционно инвариантным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x+c),\tag{П.4.38}$$

где c — вещественное смещение. Мы хотим, чтобы интегрирование по

грассмановым переменным обладало тем же свойством:

$$\int d\theta \varphi(\theta) = \int d\theta \varphi(\theta + c). \quad (\text{П.4.39})$$

Если разложить эту функцию $\varphi(\theta)$ в ряд Тейлора, получим простое выражение

$$\varphi(\theta) = a + b\theta. \quad (\text{П.4.40})$$

Определив

$$\begin{aligned} I_0 &= \int d\theta, \\ I_1 &= \int d\theta\theta, \end{aligned} \quad (\text{П.4.41})$$

из условия трансляционной инвариантности получим

$$\int d\theta \varphi(\theta) = aI_0 + bI_1 = (a + bc)I_0 + bI_1. \quad (\text{П.4.42})$$

Отсюда ясно, что мы должны положить $I_0 = 0$, а I_1 можно взять равным единице:

$$\begin{aligned} I_0 &= 0, \\ I_1 &= 1, \end{aligned} \quad (\text{П.4.43})$$

то есть

$$\int d\theta = 0; \quad \int d\theta\theta = 1. \quad (\text{П.4.44})$$

Другими словами, мы получили странно выглядящее тождество

$$\int d\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{П.4.45})$$

С помощью этих тождеств можно показать, что

$$\int \prod_{i=1}^N d\theta_i d\bar{\theta}_i \exp \left[\sum_{i,j=1}^N \bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j \right] = \det(A_{ij}). \quad (\text{П.4.46})$$

Таким образом, в общем случае инвариантное действие имеет вид (см. (П.4.27), (П.4.30))

$$\begin{aligned} \int d^4\theta d^4x V(x, \theta) &\rightarrow D\text{-член}, \\ \int d^2\theta d^4x \varphi(x, \theta) &\rightarrow F\text{-член}. \end{aligned} \quad (\text{П.4.47})$$

Первый интеграл выделяет только D -член суперполя. Второй интеграл выделяет только F -член кирального суперполя. В общем случае будем называть их F и D членами. Можно проверить, что они являются инвариантными действиями:

$$\delta \int d^8x V = \int d^8x \bar{\epsilon}^a Q_a V = 0. \quad (\text{П.4.48})$$

Это следует из того, что интеграл от полной производной как в x -пространстве, так и в θ -пространстве равен нулю.

Попробуем теперь выписать простые инвариантные действия, ос-

нованные на инвариантных F и D членах. Простейшее инвариантное действие называется моделью Весса–Зумино:

$$S = \int d^8 x \bar{\phi} \phi + \left(\int d^6 x \left[\mu \phi + \frac{1}{2} m \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \right] + \text{h. c.} \right). \quad (\text{П.4.49})$$

Выписанная покомпонентно после интегрирования по θ , оно принимает вид

$$S = \int d^4 x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{2} G^2 \right\}. \quad (\text{П.4.50})$$

Заметим, что теперь мы построили инвариантное действие с неприводимым представлением суперсимметрии с мультиплетом, содержащим спин 0 и спин 1/2: (1/2, 0). Чтобы построить мультиплет (1, 1/2), нужна следующая конструкция для действия Максвелла, которая дается формулой

$$S = \int d^4 x d^2 \theta W^A W_A. \quad (\text{П.4.51})$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_A &= \bar{D}^2 D_A V, \\ W_{\dot{A}} &= D^2 D_{\dot{A}} V, \\ D_{\dot{A}} W_B &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.4.52})$$

где V – вещественный векторный супермультиплет, преобразующийся как

$$\delta V = \bar{\Lambda} - \Lambda. \quad (\text{П.4.53})$$

Поле V вещественное, но Λ – киральная величина: $\Lambda^+ = -\bar{\Lambda}$. Выполнив это преобразование, находим, что

$$\delta W_A = 0, \quad (\text{П.4.54})$$

так что это действие тривиально инвариантно как относительно преобразований суперсимметрии, так и калибровочных преобразований группы $U(1)$. Заметим, что векторный супермультиплет содержит поле Максвелла A_μ , тогда как киральный супермультиплет Λ содержит калибровочный параметр λ . Это действие, выписанное покомпонентно, есть

$$S = \int d^4 x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} D^2 \right). \quad (\text{П.4.55})$$

Оно инвариантно относительно преобразования

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi, \\ \delta \psi &= \left(-\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \gamma_5 D \right) \epsilon, \\ \delta D &= \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \end{aligned} \quad (\text{П.4.56})$$

Следующий мультиплет, интересующий нас, это $(2, 3/2)$. Раньше считалось, что теория Рариты–Швингера порочна в своей основе, поскольку она не допускает непротиворечивых взаимодействий с другими полями. Однако физики рассмотрели возможность взаимодействия поля Рариты–Швингера с гравитоном. Все несоответствия исчезают для этого мультиплета.

§ П.5. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Существует по крайней мере четыре способа сформулировать теорию супергравитации:

- (1) Покомпонентное представление. Этот метод широко использует технику проб и ошибок, однако он дает наиболее явную форму действия.
- (2) Представление с помощью кривизны. Этот метод опирается на теорию групп и аналогию с теорией Янга–Миллса.
- (3) Тензорное исчисление. Оно дает точные правила умножения представлений суперсимметрии.
- (4) Суперпространство. Это наиболее изящная формулировка супергравитации, однако она же и самая трудная. Суперпространственные формулировки для высоких значений N пока что неизвестны, поскольку ограничения на кручение слишком трудно разрешить.

Мы остановимся на методе кривизны, поскольку он напоминает построение теории Янга–Миллса, которой мы пользовались до сих пор.

Поскольку группа $Osp(1/4)$ имеет 14 образующих, определим 14 полей связности группы $Osp(1/4)$ выражением

$$h_\mu^A = (e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}, \bar{\psi}_\mu^a). \quad (\text{П.5.1})$$

Тогда глобальная вариация полей связности есть

$$\delta h_\mu^A = f_{bc}^A \varepsilon^B h_\mu^C, \quad (\text{П.5.2})$$

где

$$\varepsilon^A = (\varepsilon^a, \varepsilon^{ab}, \bar{\varepsilon}^a). \quad (\text{П.5.3})$$

Ковариантная производная теперь дается выражением

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &= \partial_\mu + h_\mu^A M_A \\ &= \partial_\mu + e_\mu^a P_a + \omega_\mu^{ab} M_{ab} + \bar{\psi}_{\mu,\alpha} Q^\alpha \quad (a > b). \end{aligned} \quad (\text{П.5.4})$$

Под действием локального калибровочного преобразования эти поля преобразуются как

$$\delta h_\mu^A = \partial_\mu \varepsilon^A + h_\mu^B \varepsilon^C f_{CB}^A. \quad (\text{П.5.5})$$

Теперь возьмем коммутатор двух ковариантных производных:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = R_{\mu\nu}^A M_A, \quad (\text{П.5.6})$$

где

$$R_{\mu\nu}^A = \partial_\mu h_\nu^A - \partial_\nu h_\mu^A + h_\nu^B h_\mu^C f_{CB}^A. \quad (\text{П.5.7})$$

В покомпонентной записи получаем

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^a(P) &= \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b - (\mu \leftrightarrow \nu), \\ R_{\mu\nu}^{ab}(M) &= \partial_\mu \omega_\nu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{cb} - (\mu \leftrightarrow \nu), \\ R_{\mu\nu}^\alpha(Q) &= \partial_\mu \bar{\psi}_\nu^\alpha + \bar{\psi}_\nu^\alpha \omega_\mu^{ab} \sigma^{ab} - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (\text{П.5.8})$$

Легко показать, что вариация кривизны есть

$$\delta R_{\mu\nu}^A = R_{\mu\nu}^B \varepsilon^C f_{CB}^A. \quad (\text{П.5.9})$$

Действие теории супергравитации теперь запишется в виде

$$S = \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \{ R_{\mu\nu}(M)^{ab} R_{\rho\sigma}(M)^{cd} \varepsilon_{abcd} + R_{\mu\nu}(Q)^\alpha R_{\rho\sigma}(Q)^\beta (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \}. \quad (\text{П.5.10})$$

Если теперь проварьировать это действие, то окажется, что оно не является вполне инвариантным, если только не положить

$$R_{\mu\nu}(P)^a = 0. \quad (\text{П.5.11})$$

Выписанное выше действие инвариантно с точностью до члена

$$\delta \omega_a^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^a(P). \quad (\text{П.5.12})$$

Однако поскольку мы наложили эту связь (П.5.11) с самого начала, то это действие и в самом деле вполне инвариантно при данном преобразовании.

Такая связь выглядит весьма искусственной, пока не осознаешь, что она на самом деле эквивалентна обращению в нуль ковариантной производной от тетрады (П.2.31). Поэтому мы выбираем тетраду с нулевой производной, чтобы получить инвариантное действие.

Окончательное действие имеет вид

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2} e R - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma^5 D_\sigma \psi_\rho \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (\text{П.5.13})$$

К сожалению, для более высоких N найти действия намного труднее. Метод суперпространства пока что не позволил найти решения для высших N , но супергравитация для $N = 8$ была построена с помощью следующего трюка: расширив размерность пространства-времени до 11, можно построить $N = 1$, $D = 11$ супергравитацию. Затем компактификацией редуцируем эту теорию к $N = 8$, $D = 4$ супергравитации.

Исходной точкой для построения 11-мерной супергравитации будет осознание того факта, что нам необходимы равные количества бозонных и фермионных полей. Методом проб и ошибок найдем, что следующий выбор даст нам равные количества этих полей:

$$e_M^A = \frac{1}{2} 9 \times 10 - 1 = 44 \text{ компоненты,}$$

$$\psi_M = \frac{1}{2}(9 \times 32 - 32) = 128 \text{ компонент,} \quad (\text{П.5.14})$$

$$A_{MNP} = \binom{9}{3} = 84 \text{ компоненты.}$$

Здесь тетрада трансверсальная и бесследовая, а $\Gamma \cdot \psi = 0$. Тогда непосредственными вычислениями Креммер, Джулиа и Шерк доказали, что следующее действие инвариантно в 11-мерной теории:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2\kappa^2} e R - \frac{1}{2} e \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2}(\omega + \hat{\omega}) \right] \psi_P - \frac{1}{48} e F_{MNPQ}^2 \\ & - \frac{\sqrt{2}\kappa}{348} e (\bar{\psi}_M \Gamma^{MNPQRS} \psi_S + 12 \bar{\psi}^N \Gamma^{PQ} \psi^R) (F + \hat{F})_{NPQR} \\ & - \frac{\sqrt{2}\kappa}{3456} \varepsilon^{M_1, \dots, M_{11}} F_{M_1, \dots, M_4} F_{M_5, \dots, M_8} A_{M_9, M_{10}, M_{11}}, \end{aligned} \quad (\text{П.5.15})$$

где

$$\begin{aligned} \delta e_M^A &= \frac{1}{2} \kappa \bar{\eta} \Gamma^A \psi_M, \\ \delta A_{MNP} &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \bar{\eta} \Gamma_{[MN} \psi_{P]}, \\ \delta \psi_M &= \kappa^{-1} D_M(\hat{\omega}) \eta + \frac{\sqrt{2}}{288} (\Gamma_M^{PQRS} - 8 \delta_M^P \Gamma^{QRS}) \eta \hat{F}_{PQRS} \end{aligned} \quad (\text{П.5.16})$$

и где

$$\hat{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} + \frac{1}{8} \bar{\psi}^P \Gamma_{PMABQ} \psi^Q, \quad (\text{П.5.17})$$

F_{MNPQ} — это A_{MNP} , а \hat{F}_{MNPQ} — суперковариантизация F_{MNPQ} ; мы выбрали $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}$, антисимметризация проводится по формуле $\Gamma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A \Gamma^B - \Gamma^B \Gamma^A)$, индексы ABC относятся к плоскому пространству, а MNP — к искривленному.

$N = 1$, $D = 10$ супергравитацию можно получить обрезанием предыдущего действия. Спинор разлагается на пару майорана-вейлевских гравитонов и пару майорана-вейлевских фермионов со спином $1/2$. Тетрада разлагается на 10-мерную тетраду и скалярное поле ϕ , тогда как антисимметричное тензорное поле разлагается на бозонное поле B_{MN} . Таким образом, редукция дает следующий набор полей:

$$\{e_M^A; \phi; B_{MN}\}; \quad \{\psi_M; \lambda\}. \quad (\text{П.5.18})$$

Окончательно действие в десятимерии принимает вид

$$e^{-1} L = -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \psi_P - \frac{3}{4} \phi^{-3/2} H_{MNP}^2$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\bar{\lambda}\Gamma^M D_M\lambda - \frac{9}{16\kappa^2}(\varphi^{-1}\partial_M\varphi^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}\bar{\psi}_M\Gamma^N\Gamma^M\lambda(\varphi^{-1}\partial_N\varphi) \\
& + \frac{\sqrt{2}\kappa}{16}\varphi^{-3/4}H_{NPQ}(\bar{\psi}_M\Gamma^{MNPQR}\psi_R + 6\bar{\psi}^N\Gamma^P\psi^Q - \\
& - \sqrt{2}\bar{\psi}_M\Gamma^{NPQ}\Gamma^M\lambda) + \dots, \tag{П.5.19}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta e_M^A &= \frac{\kappa}{2}\bar{\eta}\Gamma^A\psi_M, \\
\delta\varphi &= -\frac{\sqrt{2}\kappa}{3}\varphi\bar{\eta}\lambda, \\
\delta B_{MN} &= \frac{\sqrt{2}}{4}\varphi^{3/4}(\bar{\eta}\Gamma_M\psi_N - \bar{\eta}\Gamma_N\psi_M - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\eta}\Gamma_{MN}\lambda), \tag{П.5.20} \\
\delta\lambda &= -\frac{3\sqrt{2}}{8}\varphi^{-1}(\Gamma\cdot\partial\varphi)\eta + \frac{1}{8}\varphi^{-3/4}\Gamma^{MNP}\eta H_{MNP} + \dots, \\
\delta\psi_M &= \kappa^{-1}D_M\eta + \frac{\sqrt{2}}{32}\varphi^{-3/4}(\Gamma_M^{NPQ} - 9\delta_M^N\Gamma^{PQ})\eta H_{NPQ} + \dots
\end{aligned}$$

и $H = dB$, и где ... означает четырехфермионные члены типа Ферми, которые мы опустили. Это низкоэнергетический предел струн типа IIA (поскольку фермионы обладают киральностями, противоположными исходным, в результате размерностной редукции). Поэтому нет и аномалий по сравнению с этой теорией, так как нет киральной асимметрии.

Теория типа IIB, однако, не может быть получена из размерностной редукции, так как она содержит фермионы одинаковой киральности (и, значит, содержит аномалии). В теории типа IIB вообще нет ковариантного действия (но имеются уравнения движения на массовой оболочке и корректно определенное действие в переменных светового конуса).

Далее, нам нужно найти взаимодействие супергравитации с веществом теории Янга-Миллса. Супер-янг-миллсовский мультиплет сам по себе дается выражением

$$\{A_M^a; \chi^a\}, \tag{П.5.21}$$

где a представляет элементы изоспиновой группы. Заметим, что на массовой поверхности имеется одинаковое количество бозонов и фермионов. Окончательный вид действия дается формулой

$$\begin{aligned}
e^{-1}L &= e^{-1}L_{SG}(H_{MNP}) - \frac{1}{4}\varphi^{-3/4}F_{MN}^a F^{MNa} - \frac{1}{2}\bar{\chi}^a\Gamma^M(D_M(\hat{\omega})\chi)^a \\
& - \frac{1}{8}\kappa\varphi^{-3/8}\bar{\chi}^a\Gamma^M\Gamma^{NP}(F_{NP}^a + \hat{F}_{NP}^a)(\psi_M + \frac{1}{12}\sqrt{2}\Gamma_M\lambda) \\
& + \frac{1}{16}\sqrt{2}\kappa\varphi^{-3/4}\bar{\chi}^a\Gamma^{MNP}\chi^a H_{MNP}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1536}\sqrt{2}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\bar{\psi}_Q(4\Gamma^{MNP}\Gamma^Q+3\Gamma^Q\Gamma^{MNP})\lambda \\
& -\frac{1}{512}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\bar{\lambda}\Gamma^{MNP}\lambda-\frac{1}{384}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\bar{\chi}^b\Gamma^{MNP}\chi^b,
\end{aligned}
\tag{П.5.22}$$

где, что удивительно, мы должны изменить условие $H = dB$ так, чтобы получилось

$$H = dB - 2^{-1/2}\kappa\omega_3. \tag{П.5.23}$$

Здесь ω_3 — член Черна–Саймонса:

$$\omega_3 = \text{Tr}(AF - \frac{1}{3}gA^3). \tag{П.5.24}$$

Вариация B под действием калибровочного преобразования теперь равна

$$\begin{aligned}
\delta B &= 2^{-1/2}\kappa\text{Tr}(\Lambda dA), \\
\delta H &= 0.
\end{aligned}
\tag{П.5.25}$$

Это действие инвариантно относительно преобразования

$$\begin{aligned}
\delta A_M^a &= \frac{1}{2}\varphi^{3/8}\bar{\eta}\Gamma_M\chi^a, \\
\delta\chi^a &= -\frac{1}{4}\varphi^{-3/8}\Gamma^{MN}\hat{F}_{MN}^a\eta + \frac{\sqrt{2}}{64}\kappa\{3\bar{\lambda}\chi^a\eta \\
& -\frac{3}{2}\bar{\lambda}\Gamma^{MN}\chi^a\Gamma_{MN}\eta - \frac{1}{24}\bar{\lambda}\Gamma^{MNPQ}\chi^a\Gamma_{MNPQ}\eta\}.
\end{aligned}
\tag{П.5.26}$$

Преобразования полей супергравитации те же, что и прежде (при модифицированном поле H), и новые, которые нужно добавить к закону преобразования, суть

$$\begin{aligned}
\delta'\lambda &= \frac{\sqrt{2}}{432}\kappa\bar{\chi}^a\Gamma^{MNP}\chi^a\Gamma_{MNP}\eta, \\
\delta'B_{MN} &= 2^{-1/2}\kappa\varphi^{3/8}\bar{\eta}\Gamma_{[M}\chi^a A_{N]}^a, \\
\delta'\psi_M &= -\frac{1}{256}\kappa\bar{\chi}^a\Gamma^{NPQ}\chi^a(\Gamma_{MNPQ} - 5g_{MN}\Gamma_{PQ})\eta.
\end{aligned}
\tag{П.5.27}$$

Возникает очевидный вопрос: существуют ли теории супергравитации для $N = 8$? Скорее всего, нет, поскольку суперсимметричные генераторы (образующие группы $\text{Osp}(N/4)$) имеют спины $1/2$. Если взять состояние гравитона с наивысшей спиральностью и подействовать на него всеми возможными Q , мы обнаружим, что этот ряд должен в конце концов оборваться, в противном случае мы бы получили частицы со спинами $5/2$ и 3 :

$$Q_\alpha Q_\beta \dots Q_\zeta |\text{гравитон}\rangle. \tag{П.5.28}$$

Хотя для свободных полей можно построить теории со спинами $5/2$ и 3 , представляется, что они окажутся противоречивыми при взаимодействии с другими частицами. Таким образом, поскольку между 2 и -2 имеется восемь полуцелых значений спина, то N должно быть равным восьми в выписанном выше ряде. Поэтому $O(8)$ является наиболее обширной группой для теории супергравитации со значениями спина не выше 2 .

§ П.6. СЛОВАРИК ТЕРМИНОВ

Автоморфная функция. Функция называется автоморфной, если она инвариантна относительно действия проективного преобразования: $\psi(z) = \psi[P(z)]$. Автоморфные функции служат подынтегральными выражениями в формулах для N -петлевой амплитуды струны.

Аномалия – неспособность классической симметрии (глобальной или локальной) сохраниться в процессе квантования. Она возникает, когда ток, связанный с данной симметрией, перестает сохраняться из-за квантовых поправок. Самая важная аномалия в теории суперструн – это конформная аномалия, что фиксирует размерность пространства–времени: она должна быть равной 26 или 10 . Кроме того, исчезновение киральной аномалии заставляет обращаться к группам вроде $E_8 \otimes E_8$ и $O(32)$. Можно также показать, что теория струн свободна от глобальных аномалий, которые могли бы нарушить модулярную инвариантность, так как последняя является глобальной симметрией.

Бетти число. p -е число Бетти – это число независимых гармонических p -форм для данного вещественного многообразия. Оно также равно размерности p -й группы когомологии или p -й группы гомологии для этой поверхности. Для двумерного тора первое число Бетти просто подсчитывает число независимых один-циклов. Поскольку двумерный тор содержит только два независимых цикла, то первое число Бетти в этом случае равно двум. Числа Бетти важны как топологические характеристики, обеспечивающие удобный способ классификации топологически эквивалентных поверхностей. Если две поверхности топологически эквивалентны, то их числа Бетти совпадают. Важные топологические характеристики, вроде эйлеровой, строятся из чисел Бетти.

Бозонизация – процесс построения фермионов из бозонов в двумерном случае, т.е. $\psi = :e^{\phi(z)}:$. Прежде это считалось невозможным. Очевидная причина, по которой такая процедура осуществима лишь в двумерном случае, состоит в том, что группа Лоренца в двумерном случае имеет лишь одну образующую, так что понятие «спина» становится тривиальным. Поэтому подлинный смысл бозонизации – это образование антикоммутирующих переменных из коммутирующих. В конформной теории поля бозонизация играет важную роль в построении действительно удовлетворительной фермионной вертексной функции. Это достигается, так как бозонизация дает явный вид неприводимых представлений алгебры Каца–Мууди для группы $SO(10)$.

Бьянки тождество – это тождество для два-форм кривизны, являющиеся следствием тождеств Якоби для ковариантных производных:

$$[D_{[\mu}, [D_{\nu}, D_{\lambda]}]] = 0.$$

Выписанное в явном виде, оно есть

$$D_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\delta\epsilon} = 0.$$

Поскольку это всего лишь тождество, оно не содержит никакой новой физической информации.

Вакуумное состояние есть нижнее состояние в гильбертовом пространстве. Оно соответствует классическому решению уравнений движения, полученному до введения квантовых поправок. Так, в теории струн классические решения, определенные на пространствах Калаби–Яу или на пространствах орбиобразий, соответствуют вакуумному состоянию полной квантовой теории. Важнейшая нерешенная проблема – вычислить, какие вакуумные состояния неустойчивы, а какие должны затухнуть в «истинный» вакуум. К несчастью, теория возмущений, служащая основным инструментом квантовой теории поля, недостаточна для определения того, какие вакуумные состояния неустойчивы в рамках теории струн.

Вейлевский спинор – представление матриц Дирака с определенной киральностью; это означает, что собственное значение Γ_{D+1} равно или $+1$, или -1 . Вейлевские спиноры могут быть определены лишь в пространстве с четным числом измерений.

Вейлевское преобразование – преобразование, порожденное изменением масштаба.

Верма модуль – набор состояний, порождаемых действием на вакуумный вектор $|h\rangle$ с собственным значением h всеми возможными комбинациями повышающих операторов L_{-n} ($\alpha_i < \alpha_{i+1}$):

$$L_{-\alpha_1}^{\alpha_1} L_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \dots L_{-\lambda_n}^{\lambda_n} |h\rangle.$$

Модель Верма характеризуется двумя числами: собственным значением h оператора L_0 и центральным членом c . Если детерминант Каца отличен от нуля для всех элементов модуля, то последний образует неприводимое представление конформной группы.

Вещественное проективное пространство – множество прямых в \mathbf{R}^{n+1} , проходящих через начало координат. Оно эквивалентно сфере S_n в \mathbf{R}^{n+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками (т.е. два единичных вектора x, x' определяют одну и ту же прямую в \mathbf{R}^{n+1} , если $x = \lambda x'$). Заметим, что

$$P_3(\mathbf{R}) = \text{SO}(3) = \frac{\text{SU}(2)}{\mathbf{Z}_2}.$$

Эйлерова характеристика поверхности $P_n(\mathbf{R})$ равна $n+1$. Эта поверхность ориентируема, если n нечетное, и неориентируема, если n четное.

Вильсоновские линии. Калибровочно инвариантная вильсоновская петля – это контурный интеграл

$$U = P e^{i \int_C dz A},$$

где путь интегрирования выбирается вдоль замкнутой кривой C , а A – один-форма связности для некоторой алгебры Ли. Если многообразие является односвязным (т.е. любая замкнутая линия на этой поверхности может быть непрерывным образом стянута в точку), то обращение A в нуль означает, что $U = 1$. Однако если многообразие не односвязно, то U необязательно равен единице при обращении A в нуль. Поэтому E_6 можно свести к подгруппе, коммутирующей со всеми элементами U . Это называется нарушением симметрии посредством вильсоновских линий.

Вирасоро алгебра – бесконечномерная алгебра, образующие которой подчиняются соотношениям

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n, -m}.$$

При $c = 0$ получаем алгебру Уитта, определяющую репараметризацию окружности посредством преобразования $z^{n+1} d_z$. Алгебру Вирасоро часто обозначают $\text{Vect}(S_1)$. Группа, порождаемая этой алгеброй, есть $\text{Diff}(S_1)$, т.е. группа диффеоморфизмов окружности. Алгебра Вирасоро не является алгеброй Каца–Мууди, но можно строить полупрямое произведение этих двух алгебр. Кроме того, с помощью конструкции Сугавары можно строить образующие алгебры Вирасоро, взяв квадраты образующих алгебры Каца–Мууди. Алгебра Вирасоро совершенно необходима для понимания теории струн по нескольким причинам. Во-первых, образующие алгебры Вирасоро естественным образом появляются при вычислении компонент тензора энергии–импульса для струны. Во-вторых, их коммутационные соотношения соответствуют репараметризационной и конформной симметриям струны. В-третьих, операторы алгебры Вирасоро порождают конформные преобразования двумерной мировой поверхности, действуя на амплитуду струны. В-четвертых, их положительные моменты уничтожают физические состояния, что существенно при доказательстве отсутствия в теории струн духовых состояний. В-пятых, оператор Q формализма BRST построен из образующих алгебры Вирасоро.

Вложение спиновой связности – помещение спиновой связности, преобразующейся под действием группы $O(6)$ в касательном пространстве, в калибровочную связность, преобразующуюся под действием калибровочной группы. Вложение спиновой связности является простейшим способом удовлетворить тождествам Бьянки при компактификации пространств Калаби–Яу. Это также позволяет редуцировать калибровочную группу. Если спиновая связность обладает группой голономий $SU(3)$ (чтобы она могла сохранять ковариантно постоянный спинор), то ее вложение в калибровочную группу гетеротической струны редуцирует

эту калибровочную группу до E_6 посредством разложения

$$E_8 \otimes E_8 \supset SU(3) \otimes E_6 \otimes E_8.$$

Вне массовой поверхности. Частица называется находящейся вне массовой поверхности, если для нее не выполняется уравнение $p_\mu^2 = -m^2$, и, стало быть, она является виртуальной. Частицы и поля, не лежащие на массовой поверхности, появляются в функциях Грина, в промежуточных состояниях фейнмановских диаграмм и в формуле для действия.

Вторичное квантование — это квантование полей (а не координат), определенных в пространстве–времени. Если у поля $\phi(x_1)$ имеется канонически сопряженное поле $\pi(x_2)$, то вторичное квантование постулирует, что

$$[\pi(x_2), \phi(x_1)]_{t_1=t_2} = -i\delta^{(3)}(x_1 - x_2).$$

Вторичное квантование является основой квантовой теории поля.

Гармоническая форма. Вещественная форма называется гармонической, если действие оператора Лапласа обращает ее в нуль. В силу теоремы Ходжа о разложении для любой p -й группы голономий существует по крайней мере одна гармоническая p -форма. Таким образом, p -е число Бетти равно числу гармонических p -форм.

Гаусса–Бонне теорема утверждает, что индекс Эйлера равен интегралу по эйлеровой характеристике в двумерном пространстве:

$$\chi(M) = \int_M e(M).$$

Теорема Гаусса–Бонне — это теорема об индексе, связанная с выводом величины d для когомологий де Рама в двумерном случае. Для римановой поверхности эта характеристика равна $2 - g$, где g — род поверхности.

Гетеротическая струна (этот термин происходит от греческого слова, означающего «гибридную силу») является наиболее вероятным кандидатом на роль теории всех известных взаимодействий. Она основана на замкнутых струнах, но рассматривает секторы мод, движущихся влево и вправо, по отдельности. Сектор правых мод образован десятимерной суперструной, тогда как сектор левых мод образован 26-мерной струной Намбу–Гото, компактифицированной до десятимерного пространства–времени; в результате остается 16-мерная поверхность, которая компактифицируется на решетке группы $E_8 \otimes E_8$ или группы $Spin(32)/Z_2$. На однопетлевом уровне эта теория свободна от аномалий и конечна.

Гиперболическое. Проективное преобразование называется гиперболическим, если его множитель веществен, положителен и не равен единице. Неподвижные точки всегда можно выбрать так, чтобы множитель был меньше единицы. Гиперболические проективные преобразования играют важную роль при вычислении N -петлевой амплитуды.

Голоморфная факторизация. Метод голоморфной факторизации основан на утверждении о том, что мера многопетлевой амплитуды замкнутой струны равна квадрату модуля некоторой голоморфной формы, разделенному на некую функцию от детерминанта матрицы периодов. Интуитивно это означает, что левые и правые моды (кроме нулевых мод) вносят одинаковый вклад в эту меру. Голоморфная факторизация может в конце концов позволить выписать меру для подынтегрального выражения в формуле многопетлевой амплитуды на основании простых рассуждений об инвариантности. Доказательство этой теоремы проходит лишь в 26-мерном пространстве из-за наличия аномалии, называемой «аналитической аномалией».

Голоморфная функция. Функция f на комплексном n -мерном пространстве \mathbb{C}^n называется голоморфной, если

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \bar{\partial} f = 0$$

для всех k . Это обобщение понятия аналитичности на случай n -мерного комплексного пространства.

Грассманово число θ , антикоммутирует со всеми другими грассмановыми числами и коммутирует с обычными вещественными или комплексными числами.

Грина–Шварца модель, GS-модель. В отличие от модели Невё–Шварца–Рамона NS–R, эта модель построена на основе пространственно-временных майорана-вейлевских спиноров в десятимерии. Она обладает явной пространственно-временной суперсимметрией. Однако с ней трудно работать, поскольку ковариантное квантование является сильно нелинейным. В формализме светового конуса, тем не менее, GS-модель обеспечивает удобный способ вычисления многофермионных процессов.

Группа голономий – группа, порождаемая переносом спинора ψ вдоль замкнутых контуров на многообразии. При этом спинор преобразуется как $U_1 U_2 \dots U_N \psi$ в результате последовательных переносов вокруг замкнутых контуров $1, 2, \dots, N$. В N -мерном пространстве группа голономий является подгруппой группы $O(N)$.

Группа гомологий многообразия равна множеству циклов, факторизованному по множеству границ. Гомология является глобальным свойством многообразия, позволяющим различать топологически неэквивалентные многообразия. Замечательный факт состоит в связи этого глобального свойства с локальным свойством, выраженным когомологией де Рама: размерность p -й группы гомологий равна размерности p -й группы когомологий де Рама.

Группа классов отображений – это группа диффеоморфизмов римановой поверхности, факторизованная по диффеоморфизмам, связанным с тождественным отображением:

$$\text{ГКО} = \frac{\text{Diff}(M)}{\text{Diff}_0(M)}$$

Это эквивалентно пространству Тейхмюллера, факторизованному по пространству модулей. Она также эквивалентна множеству глобальных диффеоморфизмов римановой поверхности (включающему, например, твисты Дена). По этой группе необходимо факторизовать, чтобы избавиться от повторного счета при вычислении амплитуды замкнутой струны, возникающего из-за модулярной инвариантности. Группа классов отображений совпадает с модулярной группой.

Дена твист является глобальным диффеоморфизмом на римановой поверхности. Он равносителен разрезанию тора вдоль одного из его циклов, повороту одного из берегов разреза на 2π и последующему склеиванию разреза. Полученный диффеоморфизм является глобальным и не может быть достигнут непрерывными деформациями тождественного отображения. Множество твистов Дена образует дискретную группу, называемую группой классов отображений и совпадающую с модулярной группой.

ДФ-состояния. Состояния Дель Гидиче–Ди Веччи–Фубини являются реальными поперечными осцилляторами, определенными в 24-мерном пространстве. Они образуют базис физического гильбертова пространства. Они эквивалентны физическим осцилляторам струнной модели после квантования в переменных светового конуса.

де Рама когомология. p -я группа когомологий де Рама является множеством p -форм, замкнутых по модулю точных форм. Размерность p -й группы когомологий де Рама для данного многообразия равна p -му числу Бетти для этого многообразия.

Дирака индекс. Индекс Дирака есть разность между решением уравнения Дирака с нулевым собственным значением, обладающим положительной киральностью, и решением с отрицательной киральностью для данного многообразия:

$$\text{Индекс}(\hat{D}) = n_+ - n_- .$$

При соответствующей регуляризации его можно также представить в виде

$$\text{Индекс}(\hat{D}) = \text{Tr} \Gamma_{D+1} .$$

Если на многообразии M можно определить калибровку и спиновую связность, то

$$\text{Индекс}(\hat{D}) = \int_M \text{ch}(V) \hat{A}(M) .$$

Дольбо группа когомологий для комплексного многообразия – это группа когомологий, представляющая собой множество p -форм, замкнутых относительно оператора $\bar{\partial}$, взятое по модулю форм, точных относительно этого оператора. Индекс, связанный с группой когомологий Дольбо, определяется теоремой Римана–Роха.

Дуальность – свойство, состоящее в том, что амплитуда рассеяния может быть выражена либо как сумма по s -канальным полюсам, либо

как сумма по t -канальным полюсам, но не как сумма по тем и другим одновременно, т. е.

$$A(s, t) = \sum_n \frac{A_n(t)}{\alpha(s) - n} = \sum_n \frac{A_n(s)}{\alpha(t) - n}.$$

В этом проявляется отличие от обычной теории поля, в которой суммирование проводится по обоим множествам полюсов. По этой причине построение полевой теории струн считалось невозможным.

Дух — это частица с отрицательной метрикой; поэтому в функции Грина она распространяется с неправильным знаком. Духи связаны с отрицательным знаком, появляющимся в лоренцевой метрике. Физическая теория должна быть полностью свободна от духов (или ее духи должны сокращаться с другими духами, содержащимися в S -матрице). Если в теории имеются духи, являющиеся частью ее физического спектра, то эта теория допускает отрицательные вероятности и поэтому физически неприемлема. Как было показано, физическое пространство теории струн свободно от духов в силу тождеств Уорда, порождаемых алгеброй Вирасоро. Исторически струнные амплитуды были построены непосредственной вставкой сложного оператора проекции вдоль каждого пропагатора, что означало удаление из теории духовых состояний вручную. К несчастью, оператор проекции был весьма сложным, особенно для фермионных состояний. Замечательное свойство духовых состояний Фаддеева–Попова состоит в том, что они допускают непротиворечивое лоренц-ковариантное квантование (BRST), сокращающееся с этими духами, что делает вычисление фермионных струнных амплитуд сравнительно простым. Это образует основу конформной теории поля.

Замкнутая форма — форма, удовлетворяющая тождеству $d\omega = 0$. Для многообразия размерность пространства замкнутых p -форм (по модулю точных форм) является p -м числом Бетти для этого многообразия.

Исключительные группы — это группы Ли, не подпадающие под обычную классификацию $O(N)$, $SU(N)$ или $Sp(N)$. Их обозначают как F_4 , G_2 , E_6 , E_7 , E_8 . С точки зрения феноменологии, группа E_6 является предпочтительной исключительной группой, так как у нее есть комплексные представления для кварков и лептонов, принадлежащих мультиплету 27.

Калаби–Яу многообразие. Калаби предположил, а Яу затем доказал, что компактное кэлерово многообразие с пустым нулевым классом Черна всегда допускает кэлерову метрику с группой голономий $SU(3)$. Такие многообразия называются многообразиями Калаби–Яу, и они образуют классический вакуум для шестимерного многообразия струны после размерной редукции. Они получены в предположении, что $N = 1$ суперсимметрия сохраняется при компактификации, что означает существование ковариантно постоянного спинора.

Касательное пространство. В каждой точке искривленного многообразия M можно восстановить плоскую систему координат, называемую касательным пространством. Оно особенно полезно при опре-

делении спиноров на искривленных многообразиях, поскольку спиноры можно строить для лоренцевой группы в N -мерном пространстве, но не для группы $GL(N)$. Поэтому спиноры определяются только в касательном пространстве.

Каца–Муди алгебра. Алгебра Каца–Муди – это бесконечномерная алгебра Ли. Она определяется коммутационными соотношениями

$$[T_m^i, T_n^j] = f^{ijk} T_{m+n}^k + c \delta^{ij} \delta_{m, -n},$$

где все f суть структурные константы обычной алгебры Ли, а c – неопределенный центральный член. Рассматривая индекс как фурье-образ непрерывной функции, определенной на отрезке от 0 до 2π , можно разместить образующие алгебры Каца–Муди на окружности. Алгебра Вирасоро не является алгеброй Каца–Муди, но она образует с ней полупрямое произведение:

$$[L_m, T_n^i] = -n T_{m+n}^i.$$

Алгебры Каца–Муди полезны по нескольким причинам. Прежде всего, струнные состояния, возникающие после компактификации на решетке корневых векторов некоторой алгебры Ли, как можно показать, преобразуются под действием обобщения Каца–Муди этой алгебры Ли. Таким образом, комформная теория поля и алгебры Каца–Муди тесно связаны друг с другом.

Каца детерминант – это определитель матрицы

$$\langle \alpha | \beta \rangle,$$

где $|\alpha\rangle$ – модуль Верма. Детерминант Каца был вычислен Кацем в явном виде для всех модулей Верма двумерной конформной группы. Если этот детерминант отличен от нуля для всех элементов модуля Верма, то данный модуль Верма образует неприводимое представление соответствующей группы. Модули Верма важны тем, что они дают нам нетривиальную информацию о башне резонансов, возникающих в исследуемой струнной модели. В геометрической теории струн основные струнные поля суть модули Верма (что объясняет происхождение странных духов Фаддеева–Попова, возникающих в полевой теории струн BRST).

Кобы–Нильсена переменные суть определенные на окружности параметры, позволяющие параметризовать N -точечную амплитуду Венициано. Переменные Кобы–Нильсена являются наиболее удобными и часто используемыми переменными для дуальной модели. Они позволяют явным образом продемонстрировать циклическую симметрию.

Компактификация – это процесс, при котором мы берем многообразие R^n и факторизуем его на решетку. Простейшая компактификация была введена Калуцей, который компактифицировал пятимерное многообразие до четырехмерного пространства–времени, сделав пятое измерение периодическим. В зависимости от выбранной решетки компак-

тифицированное многообразие имеет симметрию, соответствующую этой решетке. Так, изоспин можно ввести в модель суперструн не с помощью множителей Чана–Патона, а посредством компактификации. Компактификация также позволяет редуцировать десятимерную струну к четырехмерной теории, свернув нежелательные шесть измерений. Поэтому компактификация играет ключевую роль в получении осмысленной четырехмерной феноменологии на струне. Трудность, связанная с компактификацией и остающаяся неразрешенной проблемой вот уже 70 лет, с тех пор как Калуца впервые предложил компактифицировать пятое измерение, состоит в выборе из множества возможных классических решений такого, которое действительно предпочтительно для данной теории. В настоящее время для орбиобразий и пространств Калаби–Яу возможны десятки тысяч различных классических решений. Лишь непертурбативные формализмы (вроде полевой теории струн) могут ответить на вопрос о том, какой из этих возможных вакуумов является истинным вакуумом квантовой теории.

Комплексное многообразие. Грубо говоря, комплексное многообразие размерности N — это вещественное многообразие размерности $2N$, если мы всегда можем найти комплексные переменные с голоморфными (т. е. аналитическими) функциями, переводящими вещественные переменные в комплексные. Поэтому не всякое вещественное многообразие размерности $2N$ является комплексным многообразием.

Комплексное проективное пространство. Комплексное проективное пространство CP_N — это комплексное пространство размерности $N + 1$, в котором все точки z_i отождествлены с точками λz_i , где λ — некоторое ненулевое комплексное число. Оно одновременно является компактным и кэлеровым. Оно совпадает со сферой S_{2N+1} , если выполнить следующее отождествление:

$$CP_N = \frac{S_{2N+1}}{U(1)}.$$

Конформная аномалия — явление, состоящее в том, что квантованное действие струны не является конформно инвариантным. Наиболее яркое его проявление — неспособность действия Полякова сохранить инвариантность относительно масштабного преобразования $g_{ab} \rightarrow \sigma g_{ab}$. Это преобразование порождает новые неинвариантные члены, которые обращаются в нуль в двух случаях: если фиксировать размерность пространства–времени равной 26 или 10, а также если допустить, что скалярная частица является частью действия. Во втором случае возникает теория Лиувилля, которая в настоящей книге не рассматривается.

Конформная группа. В четырехмерном пространстве конформная группа равна $O(4,2)$ или $SU(2,2)$. Она имеет 15 образующих, соответствующих четырем трансляциям P^a , шести лоренцевым генераторам M^{ab} , четырем собственным конформным бустам K^a и одному масштабному преобразованию, или растяжению D . В двумерном пространстве, однако, конформная группа имеет бесконечное число образующих,

соответствующих генераторам алгебры Вирасоро L_n . Она эквивалентна группе $\text{Diff}(S_1)$.

Конформная калибровка – калибровка, в которой двумерный метрический тензор фиксируется пропорциональным δ_{ab} . Такой выбор калибровки осуществим в классическом случае лишь для римановых поверхностей рода нуль. Когда мы переходим к римановым поверхностям более высокого рода или квантуем систему, то возникают осложнения: например, метрика зависит от $3N - 3$ комплексных параметров Тейхмюллера и конформная аномалия нарушает конформную инвариантность, если размерность отлична от $D = 26$.

Конформная теория поля – формализм, с помощью которого можно вычислить все корреляционные функции $\langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle$ теории струн, зная поведение произведений различных $\varphi(z)$ на малых расстояниях. Поскольку амплитуды являются корреляционными функциями, то это позволяет вычислить все бозонные и фермионные амплитуды, используя лишь соображения конформности. (Это не теория поля в смысле вторичного квантования).

Конформные духи – это духи Фаддеева–Попова, возникающие при выборе конформной калибровки. BRST-оператор Q построен из этих духовых полей. Такие конформные духовые поля являются одной из отличительных особенностей «новой» теории струн, отсутствующей в «старой» теории струн начала 70-х годов.

Конформный вес служит меткой неприводимых представлений конформной группы. Под действием конформного преобразования поле $\varphi(z)$ преобразуется с конформным весом h , если

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi(\bar{z}) \left(\frac{d\bar{z}}{dz} \right)^h.$$

Если поле обладает конформным весом единица, то его криволинейный интеграл инвариантен относительно конформного преобразования. При построении моделей струн мы требуем, чтобы вершинная функция имела вес единица, с тем, чтобы были применимы калибровочные условия Вирасоро. Струнная переменная $X_\mu(z)$ имеет конформный вес нуль. Образующие алгебры Вирасоро имеют конформный вес 2. Духи b и c конформной теории поля имеют конформные веса 2 и -1 соответственно.

Космологическая постоянная – это член $\lambda\sqrt{-g}$, появляющийся в действии общей теории относительности в добавление к тензору кривизны. Одна из насущных проблем космологии – объяснить, почему эта величина является столь чрезвычайно малым числом, не прибегая к «тонкой настройке» соответствующих уравнений вручную. Суперсимметрия достаточна для обращения в нуль космологической постоянной, но в конечном итоге суперсимметрия должна нарушаться, так что одной лишь суперсимметрии недостаточно для решения этой проблемы. Это одна из важных проблем, с которой сталкивается любая квантовая

теория гравитации, в том числе теория суперструн.

Кэлеров потенциал. Можно показать, что для кэлера многообразия эрмитова метрика может быть выражена через единственную функцию, называемую кэлеровым потенциалом φ :

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}.$$

Кэлера форма – это форма

$$\Omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

для эрмитовой метрики.

Кэлерово многообразие. Комплексное многообразие является кэлеровым, если на нем существует эрмитова метрика и его кэлера форма замкнута, т. е.

$$d\Omega = 0.$$

Для кэлеровых многообразий можно доказать много красивых теорем, например, что все разнообразные лапласианы, которые могут быть выписаны для комплексных многообразий, совпадают.

Майорана-вейлевский спинор – спинор, являющийся одновременно вейлевским и майорановским, т. е. вещественным и обладающим определенной киральностью. Он существует лишь в пространствах, размерность которых равна $2 \pmod{8}$. Майорана-вейлевские фермионы используются в модели Грина–Шварца.

Майорановский спинор есть чисто вещественное представление матриц Дирака. Таким образом, частицы являются своими собственными античастицами. Майорановские спиноры могут быть определены лишь в пространствах с размерностями $2, 3, 4 \pmod{8}$.

Мировая поверхность есть двумерное риманово многообразие, замечаемое при движении струны.

Модель NS–R. Модель Невё–Шварца–Рамона (после GSO-проекции) является простейшей теорией суперструн. Она состоит из струны $X_\mu(\sigma)$ и ее суперсимметричного партнера, антикоммутирующего векторного поля $\psi_\mu(\sigma)$. В зависимости от граничных условий на ψ_μ мы можем описать либо фермионы, либо бозоны. Модель обладает двумерной суперсимметрией, но десятимерная пространственно-временная суперсимметрия весьма проблематична. Напротив, действие Грина–Шварца вполне суперсимметрично в десятимерии (но его трудно квантовать ковариантно).

Модулярная группа для тора есть $SL(2, Z)$, т. е. множество вещественных матриц с целочисленными элементами и единичным детерминантом. Это группа инвариантности подынтегрального выражения для N -петлевой амплитуды замкнутой струны. Если тор параметризован как квадрат в плоскости (σ, τ) , противоположные стороны которого отождествлены, то модулярная группа отвечает за перемену ролей параметров σ и τ . Модулярная группа решающим образом связана

с суперсимметрией и конечностью многопетлевой амплитуды.

Многообразие. Пространство M является многообразием, если существует его покрытие лоскутами U_i , каждый из которых является подпространством n -мерного вещественного пространства \mathbf{R}^n или n -мерного комплексного пространства \mathbf{C}^n . Теории взаимодействующих струн определены на многообразиях (т.е. римановых поверхностях), но теории взаимодействующих точечных частиц не могут быть определены таким образом. Фейнмановские диаграммы не составляют многообразия, поскольку их локальная топология не совпадает с топологией \mathbf{R}^n .

Множитель. Проективное преобразование $SL(2, R)$ всегда можно диагонализировать и привести к виду $P(z) = wz$. Мультипликативная константа w называется множителем. В однопетлевой амплитуде суперструны множитель проективного преобразования первой петли входит в функцию распределения.

На массовой поверхности. Частица называется лежащей на массовой поверхности, если она удовлетворяет уравнению $p_\mu^2 = -m^2$ и, следовательно, является физической, а не виртуальной. Свойства амплитуды Венециано, такие, как циклическая симметрия, выполняются лишь на массовой поверхности. S -матрица с необходимостью лежит на массовой поверхности, тогда как лагранжиан и функции Грина лежат вне массовой поверхности. Для струны условие массовой поверхности есть

$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0.$$

Неймана функция — это функция Грина для римановой поверхности, такая, что нормальная производная на границе равна нулю. Мы требуем такого граничного условия, чтобы сохранить тот факт, что $X' = 0$ на конце открытой струны. Экспонента от функции Неймана для римановой поверхности рода N входит в амплитуду суперструны для N -петлевого рассеяния.

Неподвижные точки проективного преобразования — это те точки, которые остаются на месте под действием данной группы: $P(z) = z$. Проективное преобразование имеет две неподвижные точки: $x^{(1)} = P^\infty(z)$, $x^{(2)} = P^{-\infty}(z)$. Здесь z произвольно. Любое вещественное проективное преобразование можно параметризовать его двумя неподвижными точками и множителем. Если преобразование мультипликативно, т.е. $P(z) = wz$, то эти две неподвижные точки суть 0 и ∞ , а его множитель есть w . (Это параметризация однопетлевой амплитуды.)

Орбиобразие — поверхность, которая получается, если взять тор и факторизовать его с помощью дискретной группы. У орбиобразий обычно имеются неподвижные точки, т.е. точки, инвариантные относительно действия дискретной группы, и поэтому они не являются многообразиями. Конус, например, это орбиобразие, получающееся, если взять двумерную плоскую поверхность и факторизовать ее с помощью Z_n , так что начало координат будет неподвижной точкой. Когда гетеротическая струна компактифицируется на орбиобразии, группа $E_8 \otimes E_8$ обычно редуцируется до подгруппы, коммутирующей

с действием этой дискретной группы. Очевидно, что эти неподвижные точки не нарушают физических свойств полученной теории. Орбиобразия, вероятно, являются частными предельными случаями пространств Калаби–Яу.

Ориентируемость. Многообразие M , состоящее из лоскутов (открытых множеств) M_α , называется ориентируемым, если $\det(\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1}) > 0$, где M_α и M_β перекрываются и где φ_α суть преобразования, отображающие соответствующие лоскуты в \mathbf{R}^n . Если детерминант отрицателен, то ориентация многообразия изменилась, и это многообразие является неориентируемым (как, например, лист Мёбиуса или бутылка Клейна). Неориентируемые поверхности более высокого рода можно строить, беря двумерную поверхность с двумя отверстиями и соединяя края этих отверстий, отождествляя при этом точки на краях отверстий в циклическом или антициклическом порядке.

Ортосимплектическая группа. Ортосимплектические группы $Osp(N/M)$ суть градуированные группы Ли, относительно действия которых инвариантно выражение

$$x_i x_i + \theta_m C_{mn} \theta_n,$$

где θ суть грассмановы переменные. Их можно редуцировать следующим образом:

$$Osp(N/M) \supset O(N) \otimes Sp(M).$$

Супергравитация – это калибровочная теория, основанная на группе $Osp(N/4)$.

Первичное квантование – это квантование координат. Если координата p является канонически сопряженной для координаты x , то $[p, x] = -i$. Подход первичного квантования рассматривает в качестве фундаментального объекта, к которому применяется действие, координаты точки или струны, а не поле. Чтобы ввести взаимодействия, в подходе первичного квантования приходится суммировать по топологиям фейнмановских диаграмм. Поэтому формализм первичного квантования с необходимостью основан на теории возмущений.

Полякова действие. Лагранжиан Полякова имеет вид

$$L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu.$$

В классическом случае он инвариантен относительно репараметризации и преобразований Вейля. После квантования вейлевская инвариантность нарушается, кроме случая $D = 26$. Классически такое действие эквивалентно действию Намбу–Гото. Однако на квантовом уровне действие Полякова содержит специфическую информацию относительно метрики, по которой происходит суммирование с целью получить многопетлевые поверхности, тогда как для действия Намбу–Гото эту информацию приходится добавлять вручную.

Понтрягина класс. Класс Понтрягина для многообразия с кривизной,

принадлежащей алгебре Ли группы $O(n)$, есть

$$p(\Omega) = \det \left(1 - \frac{1}{2\pi} \Omega \right).$$

Проективное преобразование определяется формулой

$$P(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $ad - bc = 1$. Это порождает группу $SL(2, R)$, т.е. множество вещественных матриц размера 2×2 с единичным детерминантом. С N -петлевой амплитудой струны связано N проективных преобразований.

Пространство модулей определяется для замкнутой римановой поверхности как множество всех метрик с постоянной кривизной, разделенное на множество всех возможных диффеоморфизмов. Для многообразий рода N , где $N > 2$, размерность этого пространства равна $6N - 6$ (число независимых параметров, необходимое для параметризации поверхности). Именно по этому пространству интегрируется действие Полякова. Оно тесно связано с пространством Тейхмюллера, отличаясь от последнего лишь множеством глобальных диффеоморфизмов, или твистов Дена.

Редже полюс. Полюс Редже — это сингулярность S -матрицы в комплексном пространстве угловых моментов. В теории S -матрицы угловой момент и энергия рассеяния могут принимать комплексные значения. Если $\alpha(s)$ является угловым моментом как функция квадрата энергии, то амплитуда рассеяния будет иметь полюс по этой переменной. Каждый полюс Редже соответствует некоторому резонансу. В теории струн проводится суммирование по бесконечному числу полюсов Редже, или резонансов.

Редже траектория — это прямая линия, которая получается, если построить график зависимости углового момента от квадрата энергии в точках сингулярности S -матрицы (полюсах Редже). Квадраты энергии откладываются по оси абсцисс, а угловые моменты по оси ординат. В теории струн резонансы образуют бесконечное множество точек, которые, будучи соединенными, образуют семейство параллельных прямых с положительным углом наклона. Самая левая из этих прямых называется ведущей траекторией. Точка пересечения ведущей траектории с осью ординат называется интерсептом. Для струнной модели интерсепт принимают равным 1. Угол наклона этих траекторий называют реджевским наклоном α' .

Решетка Γ — это множество точек вида $p^I = \pi \sum n_i e_i^I$, где n суть целые числа, а e_i^I — множество независимых векторов в N -мерном пространстве. В струнной теории решетки используются для компактификации, уменьшающей число измерений от 26 или 10 до четырех. Один из способов это сделать — компактификация на тор, определенный фак-

торизацией евклидова пространства посредством решетки, т. е. R^N/Γ . Не всякую решетку можно связать с решеткой алгебры Ли. Например, решетка Лича в 24-мерном пространстве не является решеткой какой-либо алгебры Ли. Решетка называется четной, если $(p^f)^2$ есть четное число. Решетка называется автодуальной, если она совпадает с дуальной к ней решеткой. Дуальная решетка определяется набором линейно независимых векторов e_i^{*I} , таких, что

$$\sum_{I=1}^N e_i^{*I} e_j^I = \delta_{ij}.$$

В 16-мерном пространстве нет других автодуальных решеток, кроме связанных с решетками корней групп $E_8 \otimes E_8$ и $\text{Spin}(32)/Z_2$. Решетка корней алгебры Ли называется просто сплетенной, если все ее корни имеют одинаковую длину. Среди групп Ли только группы A , D и E являются просто сплетенными.

Риманова поверхность – комплексное двумерное многообразие. Струна заматывает риманову поверхность с дырками при своем движении в пространстве–времени. Поэтому теория возмущений для струн основана на теории голоморфных функций, определенных на римановых поверхностях рода g .

Римана–Роха теорема об индексе – теорема об индексе, соответствующем оператору $\partial_{\bar{z}}$ на римановой поверхности. Она может быть выражена многими способами, но для наших целей удобна следующая формулировка: размерность пространства квадратичных дифференциалов минус размерность пространства конформных векторов Киллинга пропорциональна $1 - g$ для поверхности рода g . Для системы духовых мод это означает, что число независимых нулевых мод духов c минус число нулевых мод духов b равно $3(g - 1)$. Поэтому теорема Римана–Роха полезна при установлении того факта, что пространство квадратичных дифференциалов имеет размерность $3g - 3$; это есть пространство модулей. Для суперструн соответствующий вариант теоремы Римана–Роха позволяет вычислить размерность пространства супермодулей.

Риччи-плоская метрика. Метрика $g_{\mu\nu}$ называется риччи-плоской, если $R_{\mu\nu} = 0$.

Род компактной римановой поверхности равен числу дырок или ручек этой поверхности. Так, род тора равен 1.

Симплектическая группа – группа, относительно действия которой инвариантно следующее выражение:

$$\theta_m C_{mn} \theta_n.$$

Здесь θ суть грассмановы переменные. Наиболее важная для теории супергравитации симплектическая группа – это группа $\text{Sp}(4)$, локально изоморфная группе де Ситтера.

Спиновая связность (обозначается ω_{μ}^{ab}) входит в ковариантную

производную спинора:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + \omega_\mu^{ab} M^{ab}) \psi.$$

Здесь M^{ab} – образующая группы Лоренца в матричном виде. После добавления спиновой связности ковариантная производная становится подлинным тензором.

Спиновая структура – это набор всех возможных граничных условий, которым может удовлетворять фермион на спиновом многообразии рода g . Беря континуальный интеграл по однопетлевой диаграмме в модели NS–R, мы должны интегрировать по всем спиновым структурам, а именно по четырем возможным комбинациям граничных условий в направлениях (σ, τ) , чтобы сохранить модулярную инвариантность: (NS, R), (NS, NS), (R, NS), (R, R). Для поверхности рода g имеется 2^{2g} спиновых структур.

Спинорное многообразие – это многообразие, допускающее спиноры, т. е. на этом многообразии возможно определить спиноры и уравнение Дирака. Многие гладкие многообразия не являются спинорными, поскольку для спинорного многообразия первый и второй индексы Штифеля–Уитни должны быть равны нулю. Всякое ориентируемое многообразие в двух и трех измерениях является спинорным.

Суперконформная группа в четырехмерном пространстве равна $SU(2, 2/N)$. Это градуированная группа Ли, имеющая следующее разложение:

$$SU(2, 2/N) \supset SU(2, 2) \otimes U(N).$$

Калибровка этой группы дает суперконформную теорию гравитации. В двумерном пространстве, однако, суперконформная алгебра – это или алгебра супер-Вирасоро, или NS–R.

Суперполе – это функция сразу и пространственно-временных, и суперсимметричных грассмановых переменных: $\phi(x, \theta)$. В четырех измерениях, если грассмановы переменные являются майорановскими спинорами, это суперполе содержит 16 независимых полей. Оно образует некое представление группы суперсимметрии:

$$\delta \phi = \bar{\epsilon} Q \phi.$$

Обычно это представление является приводимым, так что на суперполе можно наложить связи. Суперполе остается представлением группы суперсимметрии, если операторы, налагающие связи, коммутируют с суперсимметричным генератором.

Тейхмюллера параметры – это набор, состоящий из $6N - 6$ конформно различных чисел, необходимых для параметризации замкнутой римановой поверхности рода N .

Тейхмюллера пространство есть пространство римановых поверхностей с постоянной кривизной, рассматриваемых с точностью до диффеоморфизмов, которые могут быть непрерывно связаны с тождественным отображением. Размерность этого пространства равна

$6N - 6$ для римановой поверхности рода N : это означает, что $6N - 6$ параметров Тейхмюллера параметризуют риманову поверхность рода N . Они возникают в явном виде как переменные интегрирования многопетлевой диаграммы. Пространство Тейхмюллера в действительности слишком обширно для вычисления континуального интеграла. Его еще нужно разделить на глобальные диффеоморфизмы группы классов отображений (модулярной группы), порождаемые твистами Дена.

Тетрада. В N -мерном пространстве тетрада есть вещественная $(N \times N)$ -матрица e_{μ}^a , которая преобразуется как тензор первого ранга при общем координатном преобразовании по индексу μ и при локальном преобразовании Лоренца по индексу a . Ее квадрат равен метрическому тензору:

$$e_{\mu}^a e_{\nu}^a = g_{\mu\nu}.$$

Тетрады абсолютно необходимы для определения спиноров в общей теории относительности, так как у группы $GL(N)$ нет конечномерных спинорных представлений.

Точная форма. p -форма ω_p называется точной, если существует $(p - 1)$ -форма ω_{p-1} , такая, что $\omega_p = d\omega_{p-1}$.

Фаддеева–Попова детерминант – составляющая меры, появляющаяся вследствие фиксации калибровки в континуальном интеграле. Если взять калибровку $F(A) = 0$ и параметризовать калибровочное преобразование параметром Λ , то детерминант Фаддеева–Попова будет равен

$$\det \left. \frac{\delta F(A^{\Lambda})}{\delta \Lambda} \right|_{F=0}.$$

При вычислении действия этот детерминант дает член

$$L \sim \bar{\eta} \frac{\delta F(A^{\Lambda})}{\delta \Lambda},$$

где η называются духами Фаддеева–Попова.

Форма кривизны. В теории дифференциальных форм форма

$$d\omega + \omega \wedge \omega$$

называется два-формой кривизны, если ω является один-формой связности, определенной над алгеброй Ли. Если выбрать в качестве касательного пространства группу Лоренца, то два-форму кривизны можно записать в виде

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^c \wedge e^d,$$

где a, b, c представляют лоренцевы индексы.

Форма связности – это один-форма ω , определенная над алгеброй Ли, которая добавляется к частной производной для получения истинной

ковариантной производной:

$$D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu.$$

Форма связности является смешанным тензором. Это вектор в пространстве-времени, но также элемент алгебры Ли. На языке теории расслоений, базовым пространством служит обычное пространство-время, а *расслоенным пространством* – пространство, связанное с алгеброй Ли. Форма связности позволяет «связать» базовое пространство с расслоенным при сдвигах в базовом многообразии. Для группы $SU(N)$ формой связности служит обычное поле Янга–Миллса:

$$\omega = A = A_\mu^a dx^\mu \lambda_a.$$

Для группы Лоренца форма связности называется спиновой связностью:

$$\omega = \omega_\mu^{ab} dx^\mu M^{ab}.$$

Здесь M – матричное представление образующих группы Лоренца.

Функция распределения имеет вид

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \omega^n)^{-D}.$$

При $D = 1$ коэффициент при ω^n дает распределение, отвечающее целому числу n . Эта функция не только определяет число состояний струнной модели на уровне n , но также управляет расходимостью однопетлевой амплитуды.

Чана–Патона фактор – это множитель, стоящий перед амплитудой Венециано, с помощью которого вводятся изоспиновые индексы на струнах. Это простейший способ ввести изоспин в теорию суперструн, совместимый с дуальностью. Мы просто умножаем N -точечные амплитуды на след изоспиновых матриц, который обладает циклической симметрией. Потребовав факторизации, а также чтобы частица Янга–Миллса принадлежала присоединенному представлению группы, мы фиксируем эту группу: она должна быть или $U(N)$, или $O(N)$, или $Usp(N)$. Факторы Чана–Патона необходимы для струн теории $O(32)$, но для гетеротических струн изоспины вводятся совершенно иным способом, а именно посредством компактификации.

Черна класс $c(M)$ для формы кривизны Ω равен

$$c(M) = \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right).$$

Черна–Саймонса форма. N -й класс Черна, поскольку он замкнут и точен, может быть записан в виде $\omega_N = d\omega_{N-1}$. Форма Черна–Саймонса возникает при формулировании калибровочных теорий, особенно при анализе аномалий.

Шпурионное состояние – состояние, не взаимодействующее с физическими состояниями: $\langle R|S\rangle = 0$. В 26-мерном пространстве шпурионные состояния с отрицательной нормой исключаются из теории струн, так как все они не взаимодействуют с ней.

Эйлерова характеристика определяется как сумма всех положительных чисел Бетти минус сумма всех отрицательных чисел Бетти:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^N (-1)^i b_i.$$

Это, вероятно, самое важное топологическое число в теории когомологий. Оно равно интегралу по эйлеровым характеристикам, получаемым согласно теореме Гаусса–Бонне в двух измерениях. В теории суперструн после компактификации на пространство Калиби–Яу и вложения спиновой связности номер поколения равен половине абсолютного значения эйлеровой характеристики.

BRST-преобразование. Преобразование Беччи–Руэ–Стора–Тупина – это преобразование калибровочных полей и их духов Фаддеева–Попова. Оно является глобальной симметрией, так что из него могут возникнуть новые связи. Симметрия порождается BRST-зарядом Q , таким, что $Q^2 = 0$. Для струны это фиксирует размерность $D = 26$ и интерсепт, равный 1.

GSO-проекция. Проекция Глиоззи–Шерка–Олива является транкированием модели Невё–Шварца–Рамона, выделяющим сектор с четной G-четностью, что делает пространство–время этой модели суперсимметричным и устраняет тахионы. На однопетлевом уровне это эквивалентно модулярной инвариантности. Это также эквивалентно суммированию по всем возможным спиновым структурам для однопетлевой амплитуды.

Spin(N) есть просто связанная покрывающая группа компактной дважды связанной группы $SO(N)$; так, $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$.

Z_N -дискретная группа перестановок, все элементы которой удовлетворяют условию $g^N = 1$.

§ П.7. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для ясности изложения мы сознательно опустили нормирующие множители, появляющиеся в функциональных интегралах по траекториям и в N -точечной амплитуде A_N . Это не должно вызывать затруднений, так как читатель легко может восстановить их самостоятельно.

В наших единицах планковская длина и планковская масса равны следующим величинам:

$$L = [\hbar G c^{-3}] = 1.6 \times 10^{-33} \text{ см},$$

$$M = [\hbar c G^{-1}] = 2.2 \times 10^{-5} \text{ г} = 1.2 \times 10^{19} \text{ ГэВ}/c^2.$$

Постоянные c и \hbar мы положили равными 1.

Мы используем лоренцеву метрику пространства-времени $(-, +, +, \dots, +)$. На мировой поверхности используется двумерная метрика $(-, +)$, где первый индекс относится к τ , а второй — к σ . Двумерные матрицы суть

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \bar{\psi} = \psi \rho^0.$$

Как правило, k_μ обозначает физический импульс, а p_μ — оператор, собственным значением которого служит этот импульс. Однако, как это принято в соответствующей литературе, мы будем часто игнорировать это различие и использовать оба этих обозначения взаимозаменяемо.

Значения наклона Редже выбраны следующим образом:

$$\alpha' = 1/2 \text{ для открытых струн, } \alpha' = 1/4 \text{ для замкнутых струн.}$$

Всюду, где возможно, для индексов искривленного пространства используются греческие буквы. 26- и 10-мерные лоренцевы индексы обозначаются буквами μ и ν соответственно. Греческие буквы α , β обозначают индексы двумерной искривленной мировой поверхности. Индексы плоского пространства, как лоренцевы, так и двумерные, обычно обозначаются латинскими буквами a, b, c . Когда это не может вызвать недоразумения, мы иногда используем метрику $(+, +, \dots, +)$ для плоского касательного пространства.

Гамма-матрицы выбираются таким образом, что

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = -2g_{AB}, \quad \Gamma_{D+1} = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_{D-1}.$$

В случае пространства с четным числом измерений они нормируются так, что

$$(\Gamma_{D+1})^2 = +1, \text{ если } D = 4k + 2, \quad (\Gamma_{D+1})^2 = -1, \text{ если } D = 4k.$$

Если появляются гамма-матрицы более чем с одним индексом, то берется сумма всех антисимметричных комбинаций этих индексов. Например, гамма-матрицы нормируются так, что

$$\Gamma^{AB} = \frac{1}{2} [\Gamma^A \Gamma^B - \Gamma^B \Gamma^A].$$

В калибровке светового конуса используются гамма-матрицы

$$\Gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 + \Gamma^{D-1}), \quad \Gamma^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 - \Gamma^{D-1}).$$

В частных случаях 10 и 4 измерений мы будем часто использовать символ γ^μ .

В конусном формализме, осуществляя редукцию до группы $SO(8)$, будем применять прямые произведения матриц Паули размера 2×2 :

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{aa}^i \\ \gamma_{bb}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\tau_3 \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1},$$

$$\gamma^1 = -i\tau_2 \otimes \tau_2 \otimes \tau_2, \quad \gamma^6 = i\tau_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_1,$$

$$\gamma^2 = i\mathbf{1} \otimes \tau_1 \otimes \tau_2, \quad \gamma^7 = i\tau_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_3,$$

$$\gamma^3 = i\mathbf{1} \otimes \tau_3 \otimes \tau_2, \quad \gamma^8 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},$$

$$\gamma^4 = i\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}, \quad \gamma_{ab}^{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{aa}^i \gamma_{ab}^j - \gamma_{aa}^j \gamma_{ab}^i).$$

Здесь τ_i — матрицы Паули, а каждая γ -матрица является прямым произведением трех блоков размера 2×2 .

ЛИТЕРАТУРА

Теория групп:

- [1] Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Representations, Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [2] Jacobson N. Lie Algebras. Dover, New York, 1962.
- [3] Georgi H. Lie Algebras in Particle Physics. Benjamin/Cummings, Reading, Mass. 1982.
- [4] Cahn R. N. Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations. Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1984.

Общая теория относительности:

- [1] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. Freeman, San Francisco, 1973.
- [2] Weinberg S. Gravitation and Cosmology. Wiley, New York, 1972.
- [3] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [4] Adler R., Basin M., Schiffer M. Introduction to General Relativity. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [5] Carmeli M. Group Theory and General Relativity. McGraw-Hill, New York, 1977.

Теория форм:

- [1] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Phys. Rep. **66**, 213 (1980).
- [2] Nash C., Sen S. Topology and Geometry for Physicists, Academic Press, New York, 1973.
- [3] von Westenholtz C. Differential Forms in Mathematical Physics. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] Gilkey P. B. Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem. Publish or Perish, Wilmington, Del.
- [5] Goldberg S. I. Curvature and Homology. Dover, New York, 1962.

Суперсимметрия и супергравитация:

- [1] von Nieuwenhuizen P. Phys. Rep. **68C**, 189 (1981).
- [2] Gates S. J., Grisaru M., Rocek M. and Siegel W. Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1983.
- [3] Jacob M., ed. Supersymmetry and Supergravity. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [4] West P. Introduction to Supersymmetry and Supergravity. World Scientific, Singapore, 1986.
- [5] Wess J., Bagger J. Introduction to Supersymmetry. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1983.
- [6] Mohapatra R. N. Unification and Supersymmetry. Springer-Verlag, New York, 1986.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- автоморфная функция 207, 597
 амплитуда рассеяния 46, 63, 106, 133
 аномалия 597
 анти-де Ситтера группа 566
 Атьи-Зингера теорема 445
- безмассовый вектор 128
 Бетти число 506, 508, 515, 524, 597
 Бозе статистика 177
 бозон 135, 151
 бозонизация 164, 187, 597
 бозонная струна 128
 бозонное разложение 585
 Бьянки модель 521
 – тождество 422, 579, 598
- Вайнберга-Салама теория 21
 вакуум 50, 76, 128, 159, 559
 вакуумное состояние 185, 598
 вейлевский спинор 598
 вейлевское преобразование 137, 598
 вектор с наивысшим весом 171
 Венециано модель 87
 Верма модуль 172, 324, 598
 вертекс 60, 93, 109, 129, 132, 145, 155
 вертексная функция 93, 219
 вершинная функция 291
 Весса-Зумино модель 591
 Вигнера-Инону сжатие 567
 вильсоновские линии 599
 Вирасоро алгебра 70, 100, 125, 197, 599
 – генераторы 69
 – супералгебра 141, 158
 Виттена индекс 446
 волновая функция 51
 волновое уравнение 34
- гамильтониан 35, 48, 67, 75, 77, 127
 гармоническая форма 515, 600
 гармонические осцилляторы 49
 Гаусса интеграл 33
 Гаусса-Бонне теорема 419, 600
 Гейзенберга принцип неопределенности 32
 гетеротическая струна 484, 600
 глобальная инвариантность 405
 – симметрия 14, 365, 369
 глобальные диффеоморфизмы 240
 голоморфная факторизация 601
 – функция 601
 голономий группа 499, 579, 601
 гомотопий группа 601
 гомотопия 440
 гравитон 25, 78, 104
 грассманово число 43, 604
- Грина функция 35
 Грина-Шварца действие 146, 148, 157
 – модель 154, 160, 601
 группа классов отображений 601
 – ортогональная 563
 – ортосимплектическая 585, 609
 группы параметры 564
 – ранг 571
 Гупты-Блейлера квантование 41, 52
- два-форма 515, 579
 двухточечная функция 264
 ДДФ-состояния 602
 действие 29, 37, 53, 55, 58, 65, 70, 74
 – гравитационное 322
 дельта-функция 42
 Дена твист 224, 257, 602
 де Рама группа когомологий 503, 602
 де Ситтера группа 566
 дзета-функция 253, 535
 дивергенция аксиального тока 581
 Дирака индекс 447, 524, 602
 – матрица 120, 382
 – спинор 120, 125, 136
 Дольбо группа когомологий 514, 602
 дуальность 466, 602
 дух 23, 56, 79, 170
 Дынкина диаграммы 572
- замкнутая форма 579, 603
 замкнутые струны 77, 150, 216
 заряд 54
 Зигеля действие 329
- изображений метод 92, 201
 инвариант 566
 интегральные формулы 48
 интерсепт 68, 131
 инфракрасная расходимость 64
 исключительные группы 603
- Кадомцева-Петвиашвили иерархия 263
 Калаби-Яу многообразие 603
 – теорема 502
 калибровка светового конуса 73
 Картана матрица 572
 Картана-Вейля представление 571
 касательное пространство 384, 603
 Каца детерминант 379, 604
 Каца-Муди алгебра 178, 195, 604
 квантование в переменных светового конуса 113, 139, 160
 – NS-R действия 138
 кватернионы 570
 Киллинга конформные векторы 242

- киральное суперполе 588
киральность 150
Клебша – Гордона коэффициенты 195
Клейна – Гордона уравнение 41, 45
Клиффорда алгебра 565
Кобы – Нильсена перемещение 604
ковариантное преобразование 575
когерентных состояний метод 212, 221
когомологии аксиомы 358
компактификация 604
комплексное многообразие 605
контрвариантное преобразование 575
конформная аномалия 605
– группа 566, 605
– калибровка 74, 606
– теория поля 136, 162, 606
конформные духи 606
конформный вес 100, 165, 606
космологическая постоянная 606
коцикл 193, 196, 483
Кристоффеля символ 575
кулоновское квантование 40, 55
кэлера потенциал 607
кэлера форма 515, 607
кэлера многообразие 515, 554, 607
- Лагранжа множитель 38, 70
лагранжиан 29, 36, 55, 65
лапласиан 507
Ли группы 563
-- градуированные 585
-- компактные вещественные 563
локальная симметрия 14, 136, 138, 365
локальные конформные преобразования 23
лоренц-инвариантность 140
Лоренца группа 566
- Майораны спинор 607
Майораны – Вейля спинор 147, 155, 607
-- фермион 144
Маквелла действие 323, 591
– теория 76, 128, 502
Манделстама переменная 96
– преобразование 316
массовая поверхность 99, 128, 600, 608
матрица периодов 235, 258, 272, 506
Мёбиуса преобразование 91, 99
мировая поверхность 64, 101, 607
многообразие 608
множитель 608
модулей пространство 239, 610
модулярная группа 224, 607
- Намбу – Гото действие 71
Невё – Шварца – Рамона действие 157
--- теория 122, 125, 157, 607
- Неймана функция 92, 236, 267, 292, 608
неподвижные точки 530, 608
- один-форма 501, 579
оператор смены картины 132, 187
орбиобразии 529, 608
ориентируемость 609
открытые струны 76, 150, 215
- Паули – Виллара поле 23
перемещение 586
перехода вероятность 36
– функция 31, 345
плотность 577
поле 47
поля связности 389, 592
Полякова действие 71, 237, 609
Понтрягина класс 425, 453, 609
почти комплексное многообразие 513
проективная группа 100, 115, 566
проективное преобразование 91, 610
пропагатор 24, 55, 60, 76, 115, 127, 130
– инфинитезимальный 35
простой корень 572
пространства – времени размерность 171
Пуанкаре группа 567
– дуальность 509, 515
Пуассона уравнение 89
пфаффиан 426
- распределения функция 614
расслоенное пространство 614
Редже полюс 610
– траектория 68, 76, 128, 610
релятивистская струна 76
репараметризационная группа 367
решетка 610
Римана – Роха теорема об индексе 611
риманова поверхность 611
ричи-плоская метрика 517, 554, 611
род римановой поверхности 611
- самодуальность 147
свободное поле 164
Сельберга дзета-функция 271
симплекс 22
симплектическая группа 568, 611
собственные состояния 75
сопряженная переменная 30
сопряженное представление 564
спин 177
– изотопический 413
спиновая связность 577, 611
– структура 126, 249, 612
спиновое поле 164
спиновой связности вложение 599
спиновое многообразие 447, 612

- статистическая сумма 143
 структурные константы 192, 564, 572
 струнная группа 366, 406
 струнные поля 150
 Сугавары форма 197
 супергруппы 585
 суперконформная алгебра 125, 129, 174
 – группа 198, 612
 суперконформное преобразование 176
 суперполе 175, 586, 612
 суперпространство 586
 суперсимметричная производная 173
 суперсимметричный оператор 198, 201
 – ток 123, 158, 175
 суперсимметрия 63, 118, 146, 153, 160
 суперструнная группа 403
 супертоки 128, 175
 суперунитарная группа 585
 супер-Янг – Миллс 469
- тахион 76, 92, 107, 128, 132, 217
 твист 101, 205, 483
 Тейхмюллера параметры 209, 229, 612
 – пространство 240, 612
 тензор 565
 – кручения 576
 – поляризации 93, 155
 тензора ранг 575
 теорема запрета 558
 тетрада 136, 578, 613
 Тодда класс 426, 454
 ток 53, 175, 183
 тока моменты 125
 Торелли группа 257
 точная форма 579, 613
 три-форма 581
 тэта-функция 210, 227, 259, 271
- ультрафиолетовые расходимости 63
 универсальная огибающая алгебра 171
 унитарные матрицы 567
 уравнения движения 52, 74, 121, 286
- Фаддеева – Полова** детерминант 613
 – духи 41
 – духовое поле 56, 327
 – квантование 41
- Фейнмана** диаграмма 63
 – континуальный интеграл 30
 – правила 398, 417
 – пропагатор 23, 44, 62
- Ферми** статистика 177
 – теория 16
 фермионное поле 126
 фермионов рассеяние 134
 фермионы 128, 135, 147, 164, 189, 219
 физическое состояние 79, 106, 114
 Фирца преобразование 146
- фоковское пространство 50
 форма кривизны 613
 – связности 613
 фундаментальное представление 567
 фурье-коэффициенты 292
 фурье-преобразование 46, 66
- Харди – Раманджана** функция 144
Хироты уравнения 263
Хирцебрука класс 426, 454
Ходжа оператор 506
 – теорема 507, 515
- Чана – Патона** фактор 414, 452, 614
Чаплина – Мантона действие 443
Черна класс 425, 453, 614
 – характер 425, 614
Черна – Саймонса действие 404
 – форма 423, 581, 614
- Шапиро – Вирасоро** модель 103
Шоттки группы 226, 232
Шпурионное состояние 80, 106, 615
Шрёдингера уравнение 60, 278
Штифеля – Уитни классы 427, 453
- Эйлера** бета-функция 96
 – класс 425, 453
 – характеристика 531, 615
Эйлера – Лагранжа уравнения 30
 энергии – импульса супертензор 175
 – тензор 54, 71, 124, 158, 183
 энергия струны 68
Эрмита многочлены 52, 282
 эрмитова матрица 568
- Юкавы** теория мезонов 16
 ядра теплопроводности метод 430
Якоби тождество 70, 564
Янга – Миллса поле 55, 76, 128
 – суперполе 589
 – теория 17
- a*-циклы 269
b-циклы 269
BRST-заряд 183
BRST-квантование 41, 56, 59, 73, 114
BRST-преобразование 615
BRST-ток 183
- GSO-проекция** 145, 615
- N*-точечная амплитуда рассеяния 87
 – функция 66, 133, 159, 264
N-форма 581
NS – R модель 128, 607
- S*-матрица 96, 203
S-представление 379
 $\text{spin}(N)$ 615
- T*-матрица 204
- V-представление** 378

ОГЛАВЛЕНИЕ¹⁾

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Часть I ПЕРВИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	
Глава 1. Континуальные интегралы и точечные частицы	11
§ 1 1 Для чего струны?	11
§ 1 2 Исторический обзор калибровочной теории	16
§ 1 3 Континуальный интеграл и точечные частицы	29
§ 1 4 Релятивистские точечные частицы	36
§ 1 5 Первичное и вторичное квантование	39
§ 1 6 Квантование Фадлева–Попова	41
§ 1 7 Вторичное квантование	46
§ 1 8 Гармонические осцилляторы	49
§ 1 9 Токи и вторичное квантование	52
§ 1 10 Резюме	57
Литература	60
Глава 2. Струны Намбу–Гото	62
§ 2 1 Бозонные струны	62
§ 2 2 Квантование Гупты–Блейлера	73
§ 2 3 Квантование в калибровке светового конуса	81
§ 2 4 Деревья	86
§ 2 5 BRST-квантование	84
§ 2 6 От континуального интеграла к операторам	93
§ 2 7 Проективная инвариантность и твисты	99
§ 2 8 Замкнутые струны	103
§ 2 9 Уничтожение духов	106
§ 2 10 Резюме	111
Литература	116
Глава 3. Суперструны	118
§ 3 1 Суперсимметричные точечные частицы	118
§ 3 2 Двумерная суперсимметрия	122
§ 3 3 Деревья	129
§ 3 4 Локальная двумерная суперсимметрия	136
§ 3 5 Квантование	138
§ 3 6 Проекция SGO	142
§ 3 7 Суперструны	146
§ 3 8 Квантование действия Грина–Шварца в конусных переменных	148
§ 3 9 Вершины и деревья	154
§ 3 10 Резюме	157
Литература	161
Глава 4. Конформная теория поля и алгебры Каца–Мури	162
§ 4 1 Конформная теория поля	162
§ 4 2 Суперконформная теория поля	172
§ 4 3 Спиновое поле	177
§ 4 4 Суперконформные духи	181
§ 4 5 Фермионный вершинный оператор	189
§ 4 6 Спиноры и деревья	192

¹⁾ Главы 6, 7, 8 перевел Г Э Арутюнов, главы 9, 10, 11 – А Д Попов, все остальное – С В Чудов – *Прим ред*

§ 4.7. Алгебры Каца – Муди	195
§ 4.8. Суперсимметрия	198
§ 4.9. Резюме	199
Литература	202
Глава 5. Многопетлевые амплитуды и пространства Тейхмюллера	203
§ 5.1. Унитарность	203
§ 5.2. Однопетлевые амплитуды	207
§ 5.3. Гармонические осцилляторы	210
§ 5.4. Однопетлевые амплитуды суперструн	220
§ 5.6. Многопетлевые амплитуды	226
§ 5.7. Римановы поверхности и пространства Тейхмюллера	237
§ 5.8. Конформная аномалия	245
§ 5.9. Суперструны	249
§ 5.10. Детерминанты и сингулярности	253
§ 5.11. Пространства модулей и грассманианы	254
§ 5.12. Резюме	267
Литература	272
Часть II. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ПОИСКИ ГЕОМЕТРИИ	
Глава 6. Полевая теория в калибровке светового конуса	274
§ 6.1. Почему полевая теория струн?	274
§ 6.2. Вывод полевой теории точечных частиц	277
§ 6.3. Полевая теория в калибровке светового конуса	281
§ 6.4. Взаимодействия	288
§ 6.5. Метод функций Неймана	294
§ 6.6. Эквивалентность амплитуд рассеяния	299
§ 6.7. Четырехструнное взаимодействие	302
§ 6.8. Полевая теория суперструн	307
§ 6.9. Резюме	313
Литература	318
Глава 7. Полевая теория BRST	320
§ 7.1. Ковариантная полевая теория струн	320
§ 7.2. Полевая теория BRST	326
§ 7.3. Фиксация калибровки	330
§ 7.4. Взаимодействия	333
§ 7.5. Аксиоматическая формулировка	338
§ 7.6. Доказательство эквивалентности	340
§ 7.7. Замкнутые струны и суперструны	347
§ 7.8. Резюме	358
Литература	362
Глава 8. Геометрическая полевая теория струн	364
§ 8.1. Зачем нужна геометрия?	364
§ 8.2. Струнная группа	370
§ 8.3. Объединенная струнная группа	375
§ 8.4. Представления группы USG	377
§ 8.5. Духовый сектор и касательное пространство	383
§ 8.6. Связности и ковариантные производные	388
§ 8.7. Геометрический вывод действия	392
§ 8.8. Интерполяционная калибровка	396
§ 8.9. Замкнутые струны и суперструны	400
§ 8.10. Резюме	404
Литература	409

Часть III. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Глава 9. Аномалии и теорема Атьи – Зингера	410
§ 9.1 Феноменология ТВО и выход за ее пределы	410
§ 9.2 Аномалии и фейнмановские диаграммы	415
§ 9.3. Аномалии в функциональном формализме	420
§ 9.4. Аномалии и характеристические классы	422
§ 9.5. Индекс оператора Дирака	427
§ 9.6 Гравитационные и калибровочные аномалии	432
§ 9.7. Сокращение аномалий в теории струн	443
§ 9.8. Простое доказательство теоремы Атьи – Зингера об индексе	445
§ 9.9. Резюме	452
Литература	456
Глава 10. Гетеротические струны и компактификация	457
§ 10.1 Компактификация	457
§ 10.2. Гетеротическая струна	462
§ 10.3. Спектр состояний	468
§ 10.4. Ковариантная и фермионная формулировки	471
§ 10.5 Деревья	473
§ 10.6. Однопетлевая амплитуда	477
§ 10.7 Группа E_8 и алгебра Каца – Му迪	481
§ 10.8. Десятимерная теория без суперсимметрии	483
§ 10.9. Лоренцевы решетки	488
§ 10.10 Резюме	491
Литература	495
Глава 11. Пространства Калаби – Яу и орбиобразия	496
§ 11.1. Пространства Калаби – Яу	496
§ 11.2. Обзор теории когомологий де Рама	502
§ 11.3. Когомологии и гомологии	506
§ 11.4 Кэлеровы многообразия	512
§ 11.5 Вложение спиновой связности	520
§ 11.6. Поколения фермионов	523
§ 11.7. Вильсоновские линии	522
§ 11.8. Орбиобразия	529
§ 11.9. Четырехмерные суперструны	534
§ 11.10. Резюме	553
§ 11.11 Заключение	558
Литература	560
Приложение	562
§ П.1. Краткое введение в теорию групп	562
§ П.2. Краткое введение в общую теорию относительности	575
§ П.3. Краткое введение в теорию форм	579
§ П.4. Краткое введение в суперсимметрию	584
§ П.5. Краткое введение в теорию супергравитации	592
§ П.6. Словарик терминов	597
§ П.7. Обозначения	615
Литература	617
Предметный указатель	618

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ
МИЧИО КАКУ
Введение в теорию суперструн

Заведующий редакцией академик В. И. Арнольд
Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ведущий редактор С. В. Чудов
Художник В. И. Шаповалов
Технические редакторы Л. П. Бирюкова и Г. П. Иванова
Корректор Е. Н. Клитина

Лицензия Л. Р. № 010174 от 20.05.97 г.

Подписано к печати 27.09.99. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 19,50 бум. л. Усл. печ. л. 39,00. Уч.-изд. л. 38,25. Изд № 1/8158. Тираж 3000 экз.
Заказ 787. С015.

Издательство «Мир» Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
129820, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93

М.Каку

**Введение
в теорию суперструн**

ISBN 5-03-002518-9



9 785030 025186